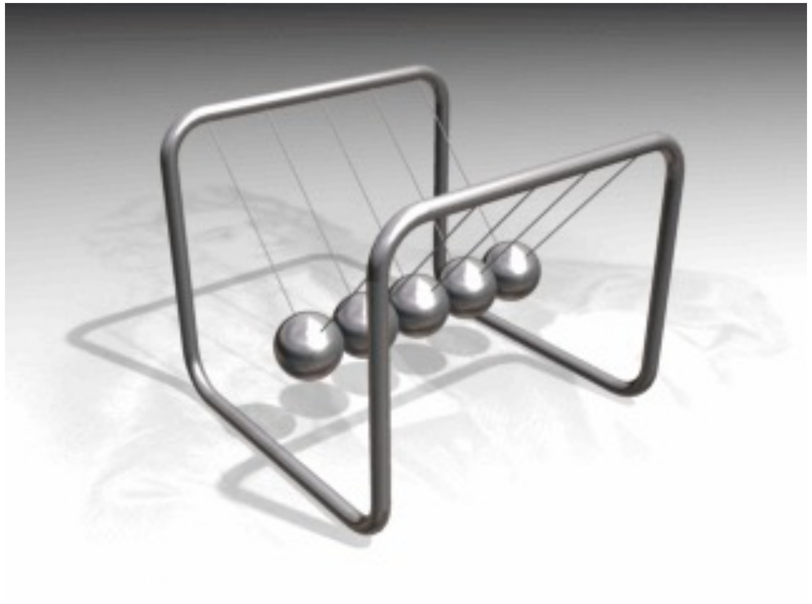
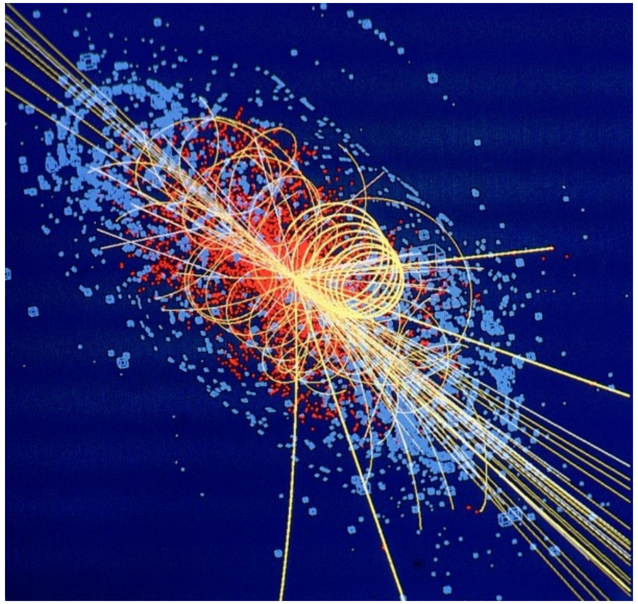
Week 7 – Part 1

8. Chocs (collisions) et système de masse variable

8.1. Centre de masse

8.2. Chocs élastiques

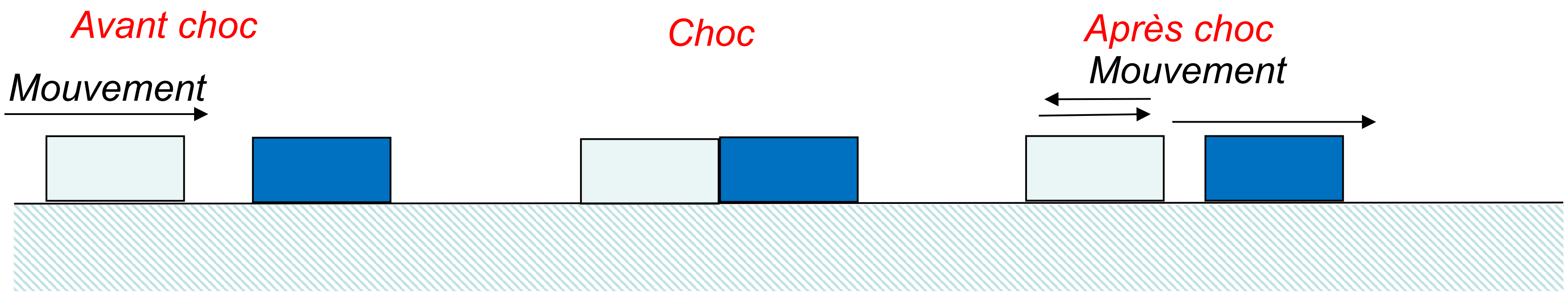


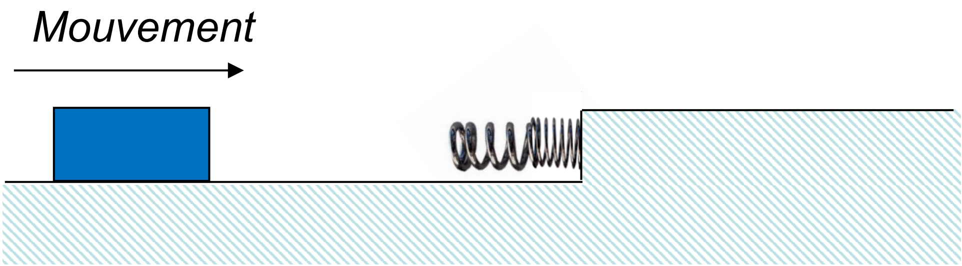


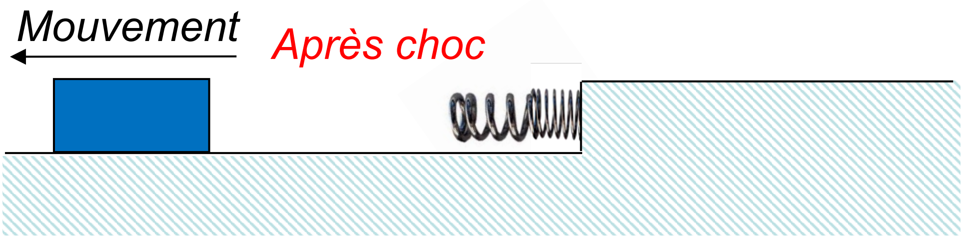
Collision de protons formant quatre muons dans une simulation au détecteur CMS (Image : CMS/CERN)

8. Chocs et système de masse variable - **définition**

- Conservation de l'énergie : **choc élastique**

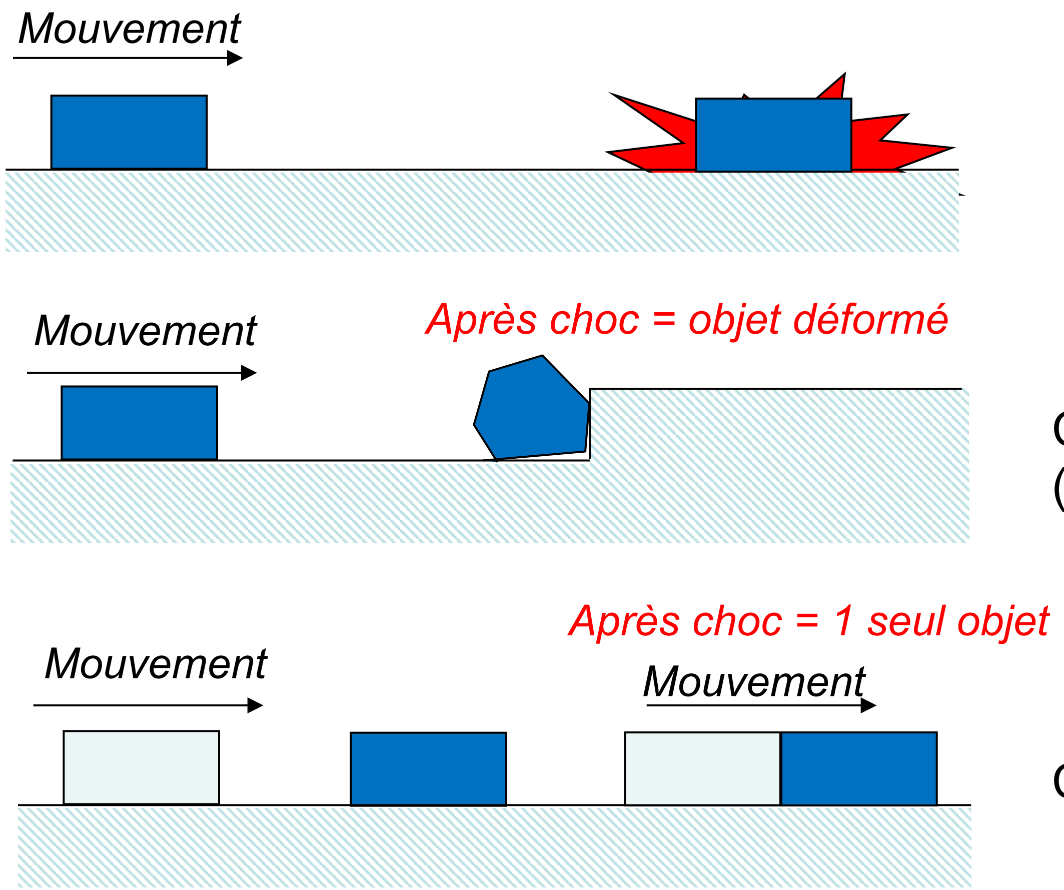






8. Chocs et système de masse variable – **définition**

- Non-conservation de l'énergie: **choc mou (inélastique)**



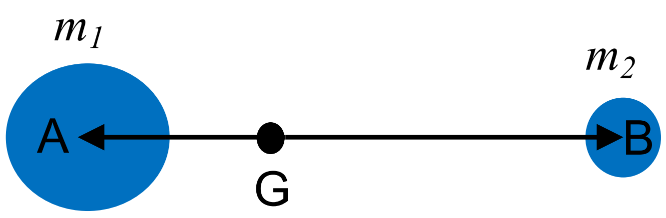
Freinage = chaleur

Choc inélastique
(déformation plastique)

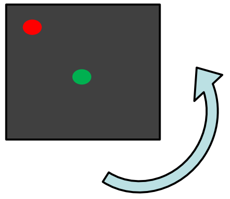
Choc inélastique 100%

8.1. Centre de masse

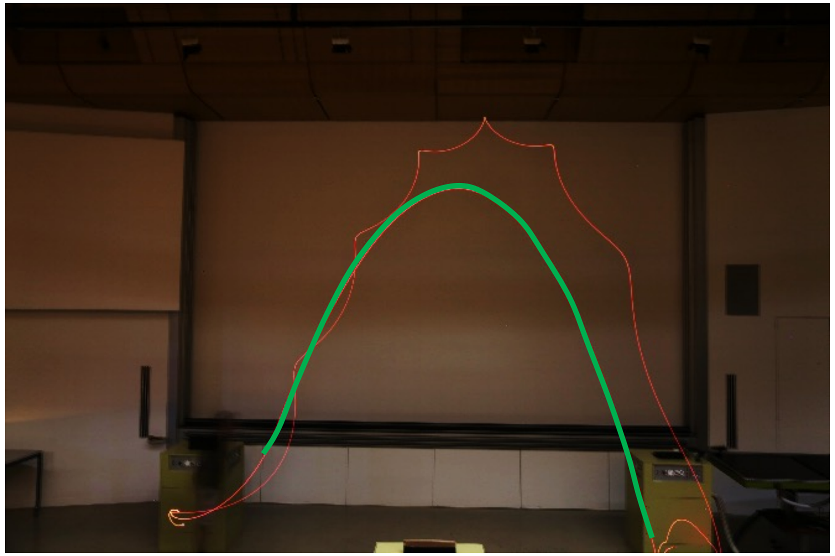
■ Définition du centre de masse



$$m_1 \overrightarrow{GA} + m_2 \overrightarrow{GB} = (m_1+m_2)\overrightarrow{GG} = \vec{0}$$



● *Centre de masse*



Trajectoire du centre de masse:

Trajectoire d'un point de l'objet:

Définitions générales :

$$\vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{r}_i$$

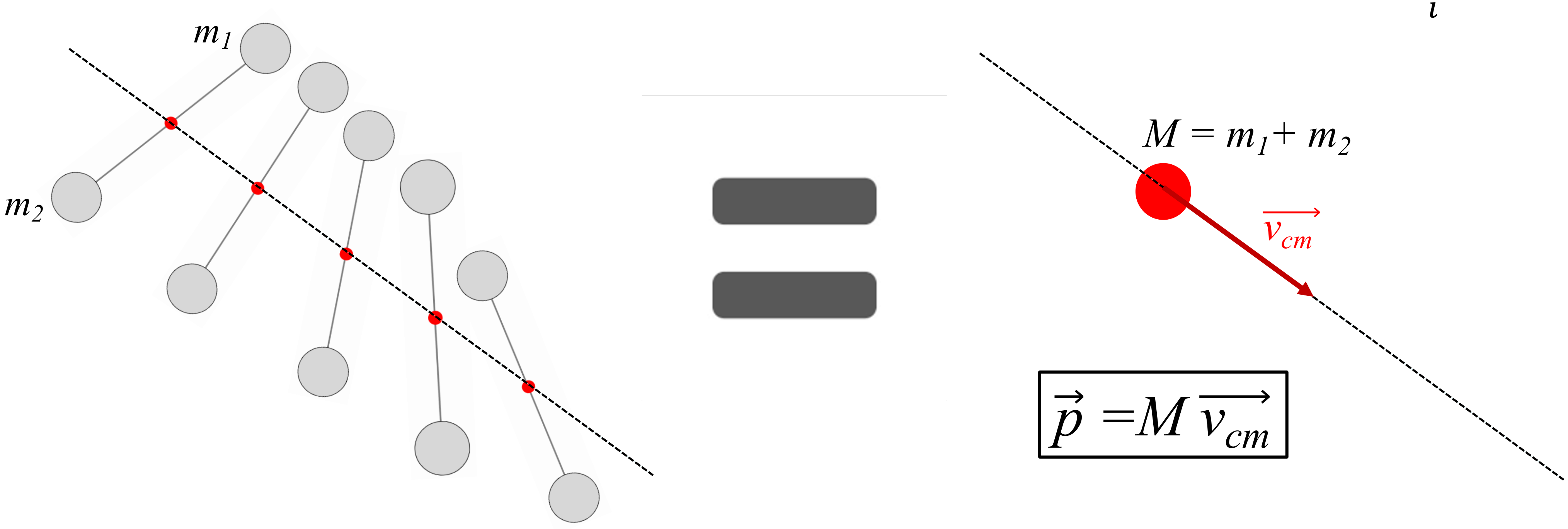
$$\vec{v}_{CM} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \vec{v}_i$$

$$avec \quad M = \sum_{i=0}^{N} m_i$$

8.1. Centre de masse

■ Référentiel lié au centre de masse (cm)

Quantité de mouvement d'un système de particules : $\vec{p} = \vec{p_1} + \vec{p_2} + \vec{p_3} + \ldots = \sum_i \vec{p_i}$



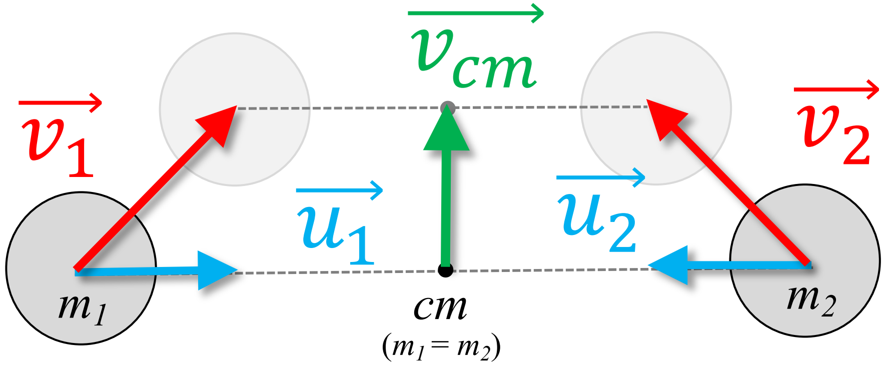
$$\boxed{\vec{p} = M\,\overrightarrow{v_{cm}}}$$

La quantité de mouvement de deux particules est la somme des quantités de mouvement de chaque particule. C'est aussi la quantité de mouvement du système constitué par les deux particules de masse $M = m_1 + m_2$ se déplaçant à la vitesse du centre de masse v_{cm}.

8.1. Centre de masse

■ Référentiel lié au centre de masse (*cm*)

Soit le système formé des masses m_1 et m_2, le centre de masse (cm) du système se déplace en ligne droite à la vitesse v_{cm}.



$\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v'_1}$ *et* $\overrightarrow{v'_2}$: vitesses dans le référentiel du laboratoire

$\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u'_1}, \overrightarrow{u'_2}$: vitesses dans le référentiel du ***cm***

Relations entre vecteurs “vitesse” :

$$\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{u_1} + \overrightarrow{v_{cm}}$$

$$\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{u_2} + \overrightarrow{v_{cm}}$$

Position et Vitesse du ***cm***
dans le référentiel “laboratoire”

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_i}$$

$$\frac{d\overrightarrow{r_{cm}}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\overrightarrow{r_1}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{r_2}}{dt}\right) \qquad M = m_1 + m_2$$

$$\boxed{\overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_1 \overrightarrow{v_1} + m_2 \overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}}$$

Position et Vitesse du ***cm***
dans le référentiel “Centre de masse” (R_{cm})

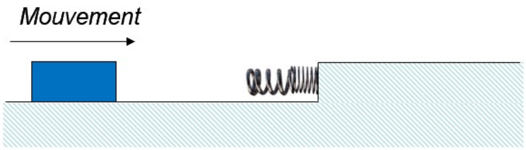
$$\overrightarrow{r_{cm,R_{cm}}} = \frac{1}{M}\sum_{i=1}^{N} m_i \overrightarrow{r_{i,R_{cm}}} = \vec{0}$$

$$\frac{d\overrightarrow{r_{cm,R_{cm}}}}{dt} = \frac{1}{M}\left(m_1 \frac{d\overrightarrow{r_{1,R_{cm}}}}{dt} + m_2 \frac{d\overrightarrow{r_{2,R_{cm}}}}{dt}\right) = \vec{0}$$

$$\boxed{\overrightarrow{u_{cm}} = \frac{m_1 \overrightarrow{u_1} + m_2 \overrightarrow{u_2}}{m_1 + m_2} = \vec{0}} \Rightarrow \overrightarrow{u_1} = -\frac{m_2}{m_1}\overrightarrow{u_2}$$

8.2. Chocs élastiques

■ Conditions:



Dans un choc élastique,
il n'y a <u>pas de perte d'énergie cinétique</u>

Condition 1 (C1) : Conservation de la quantité de mouvement

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'_1} + \overrightarrow{p'_2}$$

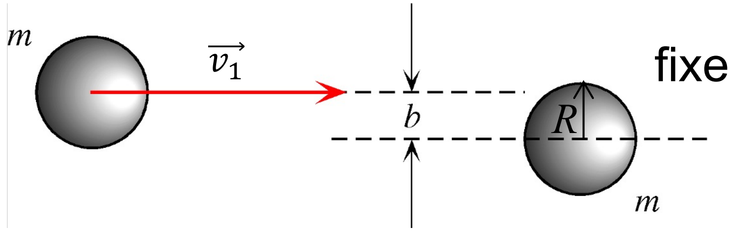
Condition 2 (C2) : Conservation de l'énergie cinétique

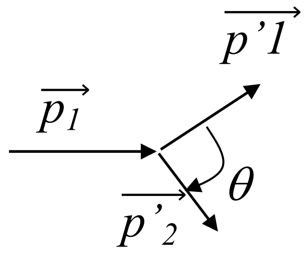
$$\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2 = \frac{1}{2}m_1 v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2 v'^2_2$$

ou encore
$$\frac{p_1^2}{2m_1} + \frac{p_2^2}{2m_2} = \frac{p'^2_1}{2m_1} + \frac{p'^2_2}{2m_2}$$

8.2. Chocs élastiques

Exemple 1 : $m_1 = m_2 = m$ et $\vec{v_2} = \vec{0}$, $b \neq 0$. (cible immobile fixe)





Quel est l'angle θ ?
pour $0<b<2R$

Le paramètre b définit le point d'impact. Si b=0, le choc est frontal et les billes auront des vecteurs vitesses colinéaires après le choc. Si b>2R, alors il n'y a pas de choc.

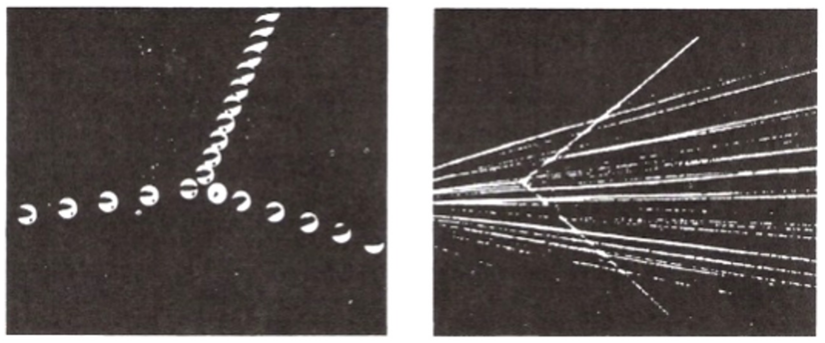
(C1) $\vec{p_1} = \vec{p'_1} + \vec{p'_2} \Rightarrow \vec{p_1}^2 = (\vec{p'_1} + \vec{p'_2})^2 = p'^2_1 + p'^2_2 + 2\,p'_1 p'_2 \cos\theta$

(C2) $p_1^2 = p'^2_1 + p'^2_2$ (car $m_1=m_2$ et $E_c=p^2/2m$)

d'où $p'^2_1 + p'^2_2 + 2\,p'_1 p'_2 \cos\theta = p'^2_1 + p'^2_2 \Rightarrow 2p'_1 p'_2 \cos\theta = 0$

$\Rightarrow \vec{p'_1} \cdot \vec{p'_2} = 0 \quad \Rightarrow \boxed{\vec{v'_1} \cdot \vec{v'_2} = 0}$

Les vecteurs vitesses sont perpendiculaires



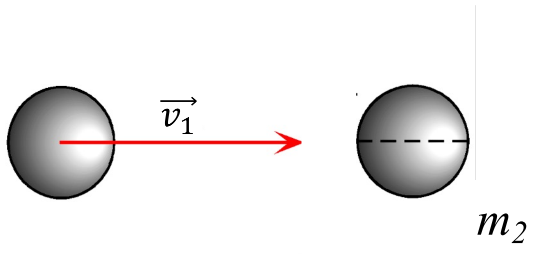
boules de billard et noyaux d'hélium

Les balles ont des ***directions perpendiculaires après le choc***

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/chocs2D.html

8.2. Chocs élastiques

Exemple 2 : $m_1 \neq m_2, \vec{v_2} = \vec{0}$, *b=0* ***(choc frontal)***



(C1) $\vec{p_1} = \vec{p'_1} + \vec{p'_2}$ *ou encore* $\vec{p'_2} = \vec{p_1} - \vec{p'_1}$

d'où: $p'^2_2 = (\vec{p_1} - \vec{p'_1})^2 = p_1^2 + p'^2_1 - 2p_1 p'_1 \cancel{\cos\theta}$ *avec* $\cos\theta = 1$ *(car b=0)*

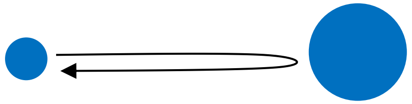
(C2) $\frac{p'1^2}{2m_1} + \frac{p'2^2}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1}$

$$\frac{p'1^2}{2m_1} + \frac{p_1^2 + p'1^2 - 2p_1 p'1}{2m_2} = \frac{p_1^2}{2m_1}$$

$$\boxed{p'^2_1\left(\frac{1}{2m_1} + \frac{1}{2m_2}\right) + p_1^2\left(\frac{1}{2m_2} - \frac{1}{2m_1}\right) - \frac{p_1 p'1}{m_2} = 0}$$

Equation du second degré en: p'_1

Cas particulier: si $m_2 >> m_1$ ⇨ $\frac{p'1^2}{2m_1} - \frac{p_1^2}{2m_1} = 0$



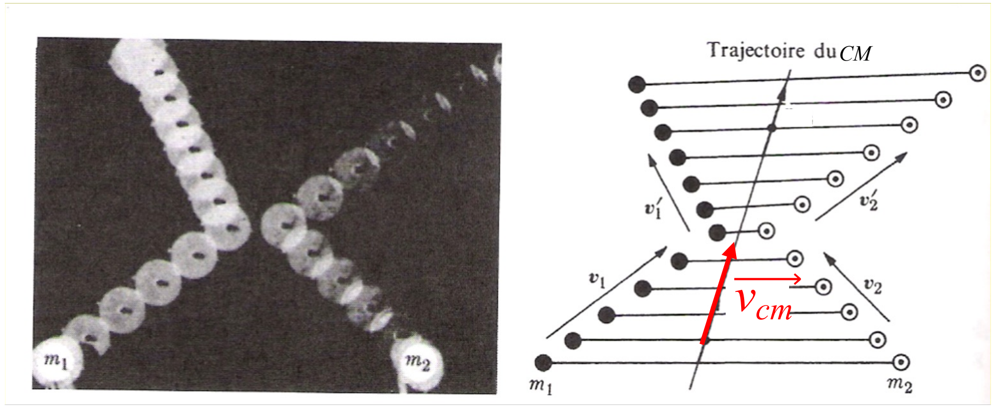
⇨ $\vec{p'1} = -\vec{p_1}$

8.2. Chocs élastiques

Exemple 3 : $m_1 \neq m_2$, $\vec{v_2} \neq \vec{0}$, $\vec{v_1} \neq \vec{0}$ $(cas\ g\acute{e}neral)$

Calcul des vitesses $\vec{v'1}$ et $\vec{v'2}$ après le choc

On change de référentiel ⇨ référentiel lié au centre de masse



Nous avons dans le référentiel du ***cm*** :

$$m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} = m_1\,\vec{u'1} + m_2\,\vec{u'_2} = (m_1+m_2)u_{cm} = 0$$

avec $\vec{u_1}$, $\vec{u_2}$: vitesses des balles **avant le choc**

$\vec{u'_1}$, $\vec{u'_2}$: vitesses des balles **après le choc**

Nous avons : $\vec{u_1} = \vec{v_1} - \vec{v_{cm}}$

$$\vec{u_2} = \vec{v_2} - \vec{v_{cm}}$$

$$\vec{u'_1} = \vec{v'1} - \vec{v_{cm}}$$

$$\vec{u'_2} = \vec{v'_2} - \vec{v_{cm}}$$

Et la vitesse du centre de masse dans le référentiel du laboratoire est :

$$\vec{v_{cm}} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2}$$

http://ressources.univ-lemans.fr/AccesLibre/UM/Pedago/physique/02/meca/chocs2D.html

8.2. Chocs élastiques

Exemple 3 : $m_1 \neq m_2,\ \vec{v_2} \neq \vec{0},\ \vec{v_1} \neq \vec{0}$

Nous avons donc dans le référentiel lié au ***cm***

(C1) $m_1\vec{u_1} + m_2\,\vec{u_2} = m_1\,\vec{u'_1} + m_2\,\vec{u'_2} = \vec{0}$

$\Rightarrow \boxed{m_1\,\vec{u_1} = -m_2\vec{u_2}}$ *et* $\boxed{m_1\,\vec{u'_1} = -\,m_2\,\vec{u'_2}}$

(C2) $\frac{1}{2}m_1\,u_1^{\,2} + \frac{1}{2}m_2\,u_2^{\,2} = \frac{1}{2}m_1\,u'^{\,2}_1 + \frac{1}{2}m_2\,u'^{\,2}_2$

On introduit **(C1)** dans **(C2):** $m_1\,u_1^{\,2} + \dfrac{m_1^{\,2}u_1^{\,2}}{m_2} = m_1\,u'^{\,2}_1 + \dfrac{m_1^{\,2}u'^{\,2}_1}{m_2}$

d'où $u'^{\,2}_1 = u_1^{\,2} \Rightarrow \vec{u'_1} = -\,\vec{u_1}$

et $u'^{\,2}_2 = u_2^{\,2} \Rightarrow \vec{u'_2} = -\,\vec{u_2}$

car choc frontal (b=0)

Si $\vec{u'_1} = \vec{u_1}$ *et* $\vec{u'_2} = \vec{u_2} \Rightarrow$ pas de choc

$\boxed{\vec{u'_1} = -\vec{u_1} \quad et \quad \vec{u'_2} = -\vec{u_2} \Rightarrow \text{choc élastique}}$

8.2. Chocs élastiques

Exemple 3 : $m_1 \neq m_2$, $\vec{v_2} \neq \vec{0}$, $\vec{v_1} \neq \vec{0}$

Choc élastique: $\overrightarrow{u'_1} = -\vec{u_1}$ et $\overrightarrow{u'_2} = -\vec{u_2}$

or $\overrightarrow{u'_1} = \overrightarrow{v'_1} - \overrightarrow{v_{cm}} \Rightarrow \overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{u'_1} + \overrightarrow{v_{cm}} = -\vec{u_1} + \overrightarrow{v_{cm}} = -\vec{v_1} + 2\overrightarrow{v_{cm}}$

avec $\vec{u_1} = \vec{v_1} - \overrightarrow{v_{cm}}$

Finalement, on trouve que

$$avec\ \overrightarrow{v_{cm}} = \frac{m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2}}{m_1+m_2}$$

$$\boxed{\begin{aligned}\overrightarrow{v'_1} &= \frac{(m_1 - m_2)\vec{v_1} + 2m_2\vec{v_2}}{m_1 + m_2}\\ \overrightarrow{v'_2} &= 2\overrightarrow{v_{cm}} - \vec{v_2} = \frac{(m_2 - m_1)\vec{v_2} + 2m_1\vec{v_1}}{m_1 + m_2}\end{aligned}}$$

On pourra vérifier que $\Delta\vec{v} = \vec{v_1} - \vec{v_2} = \overrightarrow{v'_2} - \overrightarrow{v'_1} = -\overrightarrow{\Delta v'}$

Week 7 – Part 2

8. Chocs et système de masse variable

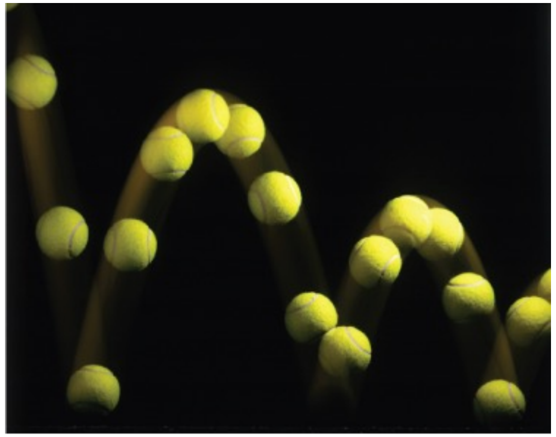
8.3. Chocs inélastiques (100%)

8.4. Système à masse variable

8.3. Chocs inélastiques (100%)

■ Définition

Dans un choc inélastique, la quantité de mouvement est conservée mais pas l'énergie cinétique.

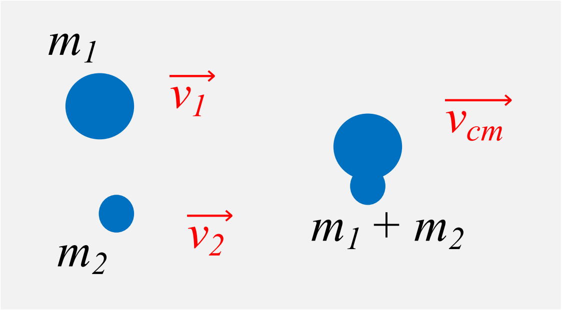


Richard Megna/Fundamental Photographs

8.3. Chocs inélastiques (100%)

■ Condition

<u>Choc 100% inélastique (ou choc mou)</u> : correspond à la situation où les deux objets restent « collés » après le choc. Ce type de choc dissipe (*en partie ou intégralement*) l'énergie cinétique du système formé par les deux objets rentrant en collision.



Condition 1 (C1) : Conservation de la quantité de mouvement

$$\overrightarrow{p_1} + \overrightarrow{p_2} = \overrightarrow{p'1} + \overrightarrow{p'2}$$

$$m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v_{cm}}$$

Mais pas de conservation de l'énergie cinétique

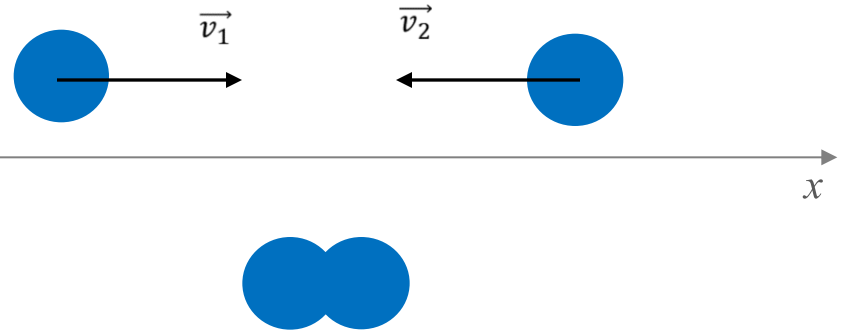
$$\frac{1}{2}m_1{v_1}^2 + \frac{1}{2}m_2{v_2}^2 \neq \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\, v_{cm}^2$$

8.3. Chocs inélastiques (100%)

Exemple : choc mou (100% inélastique) frontal entre **2 billes de même masse m et ayant des vecteurs “vitesse” opposés mais de même norme**.

Avant le choc

Après le choc



(C1): $m\vec{v_1} + m\vec{v_2} = m\vec{v'_1} + m\vec{v'_2}$ *avec* $\vec{v'_1} = \vec{v'_2} = \vec{v'}$ *car les 2 objets ne forment plus qu’un après le choc*

On projette sur Ox: $mv_1 - mv_2 = mv'_1 + mv'_2 = 2mv' = 0$ *car* $\|\vec{v_1}\| = \|\vec{v_2}\|$

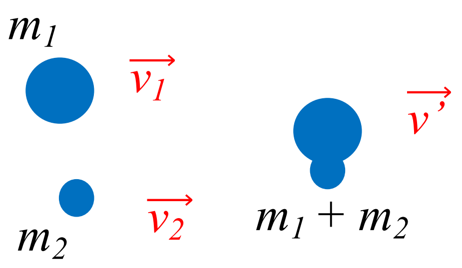
Energie cinétique avant le choc: $E_c = \frac{1}{2}m_1v_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_2^2$

Energie cinétique après le choc: $E'_c = \frac{1}{2}(2m)v'^2 = 0$

Non-conservation de l’énergie cinétique

8.3. Chocs inélastiques (100%)

■ choc mou entre **2 billes de masses et vitesses différentes**



Avant le choc : $\overrightarrow{v_1}$ *et* $\overrightarrow{v_2}$ Après le choc : $\overrightarrow{v'_1} = \overrightarrow{v'_2} = \overrightarrow{v'}$

Conservation de la quantité de mouvement lors du choc :

(C1) $m_1\overrightarrow{v_1} + m_2\overrightarrow{v_2} = (m_1 + m_2)\overrightarrow{v'}$

d'où $\boxed{\overrightarrow{v'} = \dfrac{m_1\,\overrightarrow{v_1} + m_2\,\overrightarrow{v_2}}{m_1 + m_2}}$

8.3. Chocs inélastiques (100%)

Variation de l'énergie cinétique

$$\Delta E_c = \underbrace{\frac{1}{2} m_1 v_1^2 + 1/2 m_2 v_2^2}_{E_c \text{ avant}} - \underbrace{\frac{1}{2}(m_1 + m_2) v'^2}_{E_c \text{ après}}$$

variation de l'énergie cinétique du système

soit $\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \frac{(m_1\vec{v_1} + m_2\vec{v_2})^2}{m_1 + m_2}$

$$\Delta E_c = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2^2 - \frac{1}{2} \frac{m_1^2 v_1^2 + m_2^2 v_2^2 + 2 m_1 m_2 \vec{v_1}\vec{v_2}}{m_1 + m_2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[m_1 \left(1 - \frac{m_1}{m_1+m_2}\right) v_1^2 + m_2 \left(1 - \frac{m_2}{m_1+m_2}\right) v_2 - 2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \vec{v_1}\vec{v_2}\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_1^2 + \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} v_2^2 - 2 \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2} \vec{v_1}\vec{v_2}\right]$$

On pose $\mu = \frac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

$$= \frac{1}{2}[\mu v_1^2 + \mu v_2^2 - 2\mu \vec{v_1}\vec{v_2}] = \frac{1}{2}\mu(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2$$

8.3. Chocs inélastiques (100%)

■ Variation de l'énergie cinétique

La variation d'énergie cinétique du système s'écrit

$$\boxed{\Delta E_c = \frac{1}{2}\mu\,(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2}$$

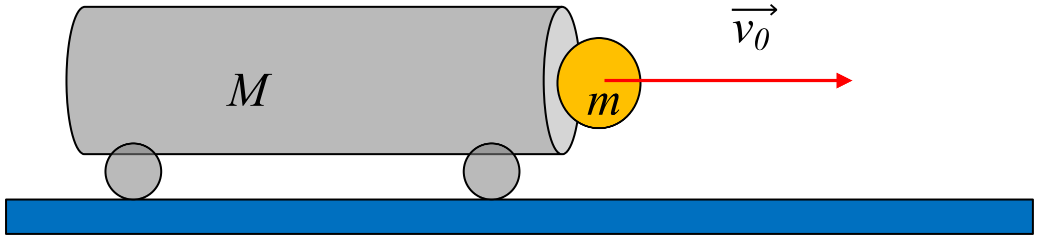
μ est la masse réduite telle que $\dfrac{1}{\mu} = \dfrac{1}{m_1} + \dfrac{1}{m_2}$ soit $\mu = \dfrac{m_1 m_2}{m_1+m_2}$

L'énergie cinétique perdue lors d'une collision 100% inélastique correspond à l'énergie cinétique de la masse réduite μ se déplaçant à la vitesse $\mathbf{v_1} - \mathbf{v_2}$. Cette énergie se transforme en déformation/chaleur.

Pourcentage (variation relative) de l'énergie cinétique perdue : $\dfrac{\Delta Ec}{E_c} = \dfrac{\mu\,(\vec{v_1} - \vec{v_2})^2}{m_1 v_1^2 + m_2 v_2^2}$

Attention : la variation d'énergie cinétique peut aussi s'écrire $\Delta E_c = E_c$ (après le choc) $- E_c$ (avant le choc)
Dans ce cas, $\Delta E_c < 0$ (le système perd de l'énergie, d'où le fait que la variation est négative)

8.3. Chocs inélastiques (100%)



Exercice : un canon immobile équipé de roues tire **un boulet de masse m à la vitesse $\vec{v_0}$.**
Sachant que **le canon de masse M roule sans frottement, calculez sa vitesse $\vec{v_f}$** après le tir.

Le tir peut être considéré comme un choc inélastique car l'énergie cinétique du système est non conservée. En revanche, il y a conservation de la quantité de mouvement.

Quantité de mouvement avant le tir : $\vec{p} = \vec{0}$

Quantité de mouvement après le tir : $\vec{p'} = m\vec{v_0} + M\vec{v_f}$

$$soit \quad \vec{v_f} = -\frac{m}{M}\vec{v_0}$$

Week 7 – Part 3

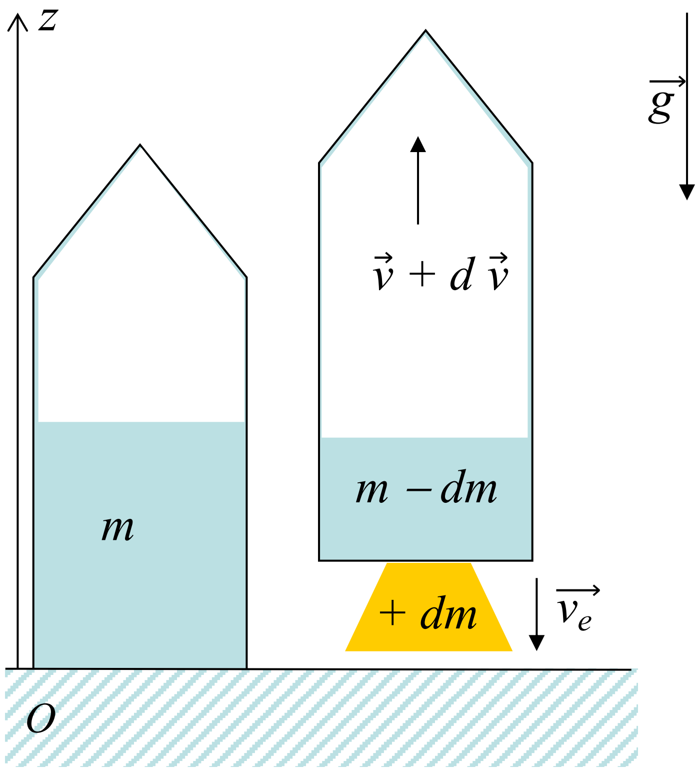
8. Chocs et système de masse variable

8.3. Chocs inélastiques (100%)

8.4. Système à masse variable

8.4. Système à masse variable

■ Mouvement avec masse variable : exemple de la fusée

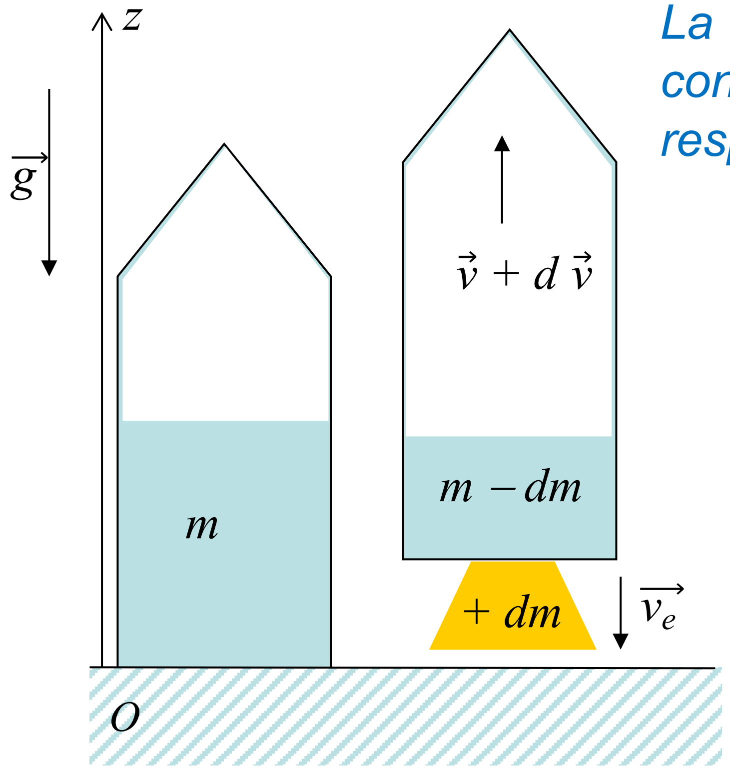


8.4. Système à masse variable

■ Mouvement avec masse variable: exemple de la fusée

Calcul de la vitesse d'une fusée au bout d'un temps t_f dans un champ de pesanteur terrestre (supposé constant)

a) Variation de la quantité de mouvement :



La masse totale de la fusée varie d'une quantité dm correspondant au carburant consommé. Cette variation de masse dm est aussi la masse des gaz émis responsables de l'augmentation dv de la vitesse de la fusée.

A l'instant t*, la quantité de mouvement est* $\vec{p} = m\vec{v}$

A $t+dt$***,*** *la quantité de mouvement totale* $\vec{p}\,'$ *du système est la somme de la quantité de mouvement de la fusée à la vitesse* $\vec{v}+d\vec{v}$ *et de la quantité de mouvement des gaz émis dont la vitesse est* $\vec{v_g}= \vec{v_e} +(\vec{v}+d\vec{v})$, $\vec{v_e}$ *étant la vitesse d'émission des gaz par rapport à la fusée.*

$$\vec{p}\,' =(m-dm)(\vec{v}+d\vec{v}) + dm(\vec{v_e}+\vec{v}+d\vec{v}) = m\vec{v}+md\vec{v} - dm\vec{v}-dmd\vec{v} + dm\vec{v_e}+dm\vec{v}+dmd\vec{v}$$
$$= m\vec{v} + md\vec{v} +dm\vec{v_e}$$

*On néglige le terme du 2nd ordre dmd****v***

La variation de la quantité de mouvement du système entre t et $t+dt$:

$$d\vec{p} = \vec{p}\,' - \vec{p} = m\, d\vec{v} + \vec{v_e}\, dm$$

8.4. Système à masse variable

■ Mouvement avec masse variable: exemple de la fusée => $v_f(t)$

Variation de la quantité de mouvement par rapport au temps : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v_e}\dfrac{dm}{dt}$

2nd loi de Newton : $\dfrac{d\vec{p}}{dt} = \overrightarrow{F_{ext}} = m\vec{g}$

On néglige la résistance de l'air, la variation de g avec l'altitude, et on suppose la Terre comme un référentiel galiléen

Equation du mouvement (vertical) : $m\dfrac{d\vec{v}}{dt} + \vec{v_e}\dfrac{dm}{dt} = m\vec{g}$

On projette sur Oz : $m\dfrac{dv}{dt} - v_e\dfrac{dm}{dt} = -mg \Rightarrow \dfrac{dv}{dt} = \dfrac{v_e}{m}\dfrac{dm}{dt} - g$

On multiplie par dt et on intègre entre le décollage $v=0$ et la vitesse finale $v=v_f$

$$\int_0^{v_f} dv = v_e \int_{m_f}^{m_0} \frac{dm}{m} - \mathrm{g}\int_0^{t_f} dt$$

m_0 est la masse de la fusée avec le plein de carburant et m_f la masse de la fusée vide : la quantité de matière propulsée à la vitesse $\vec{v_e}$ correspond à la différence de masse de la fusée au départ et à l'arrivée, soit $m_0 - m_f$.

finalement $v_f = v_e \ln\left(\dfrac{m_0}{m_f}\right) - gt_f$

A.N. : v_e = 55000 m/s et quantité de gaz expulsé 1290 kg/s
La masse initiale m_0 est 2,72x10^6 kg
Le temps jusqu'à ce que le carburant soit consommé est de 155s
On trouve v_f = 2680 m/s (9650 km/h)