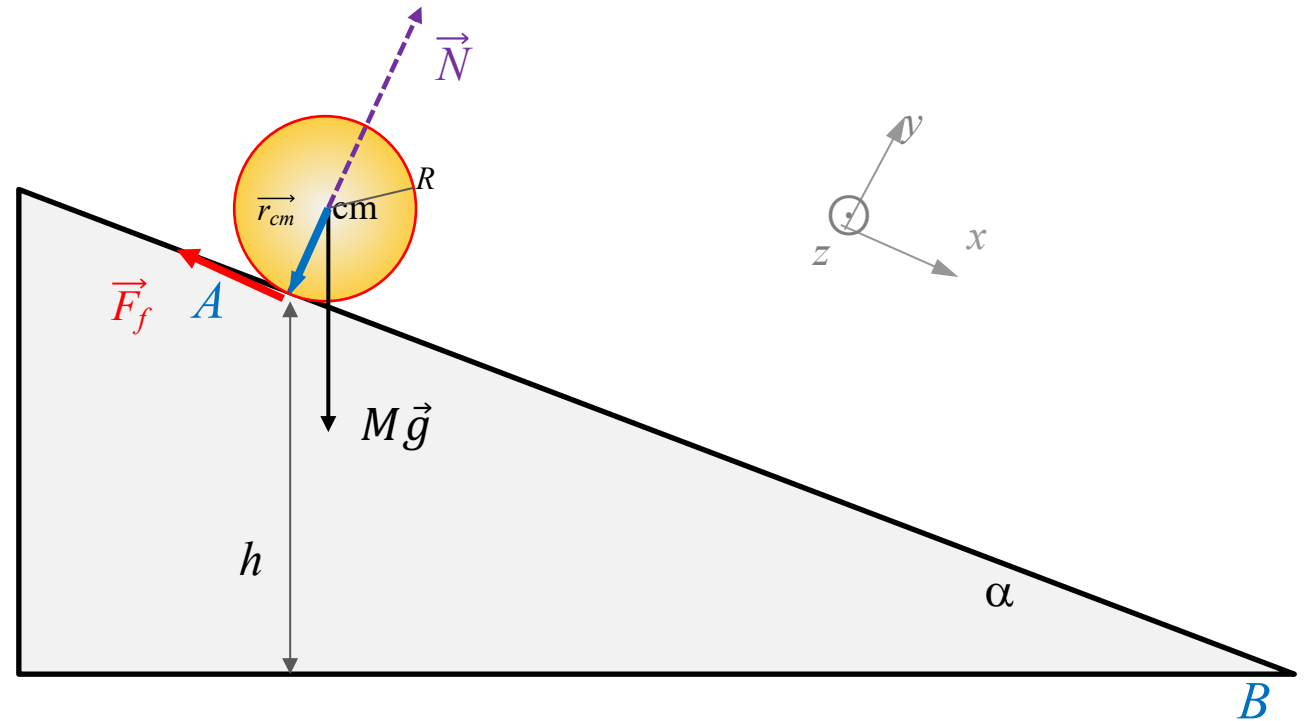


Week 12 – Part 1

11. La dynamique du solide indéformable

11.6. Théorème du moment cinétique pour un solide

11.7. Tenseur d'inertie



Dynamique du solide - RAPPEL

Dans un référentiel galiléen, et **avec O un point fixe** de ce référentiel, nous avons les relations suivantes pour un solide indéformable de masse M :

2nd loi de Newton appliquée au centre de masse :

1

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} \quad \vec{F}_{ext} \text{ résultante des forces extérieures agissant sur le système}$$

Théorème du moment cinétique :

2

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \text{ moment des forces extérieures agissant sur le système}$$

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe principal d'inertie : $\vec{L} = I \vec{\omega}$

3

Moment d'inertie par rapport à l'axe Δ passant par le cm : $I = \int_V r_{\perp}^2 dm$

Energie cinétique de rotation : $E_{cin} = \frac{1}{2} I_{cm,\Delta} \omega^2$

Dynamique du solide - RAPPEL

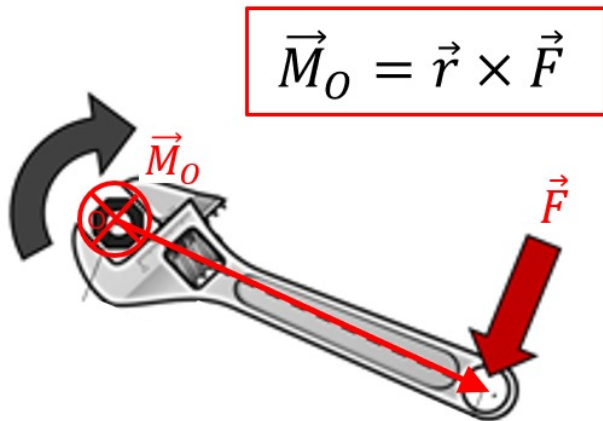
Dans un référentiel galiléen, et **avec O un point fixe** de ce référentiel, nous avons la relation suivante pour un solide indéformable de masse M :

Théorème du moment cinétique :

2

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \quad \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} \text{ moment des forces extérieures agissant sur le système}$$

■ Moment d'une force



Dynamique du solide - RAPPEL



3

$$I = \int_V r_{\perp}^2 dm$$

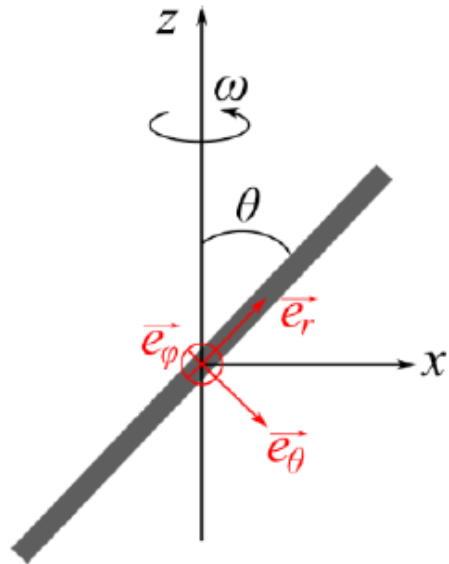
Exemple:

Masse d'une portion de barre dr : $dm = \frac{m}{l} dr$

Moment cinétique: $d\vec{L} = \vec{r} \times \vec{v} dm = \vec{r} \times \vec{v} \frac{m}{l} dr$

$$\vec{L}_O = - \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} \frac{m}{l} r^2 \omega \sin \theta dr \vec{e}_{\theta}$$

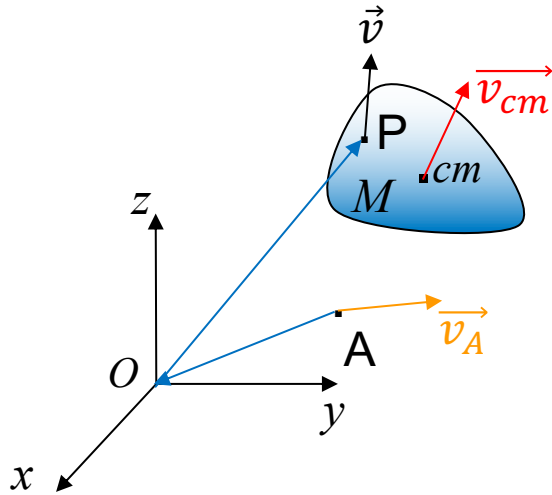
$$= - \frac{m}{l} \omega \sin \theta \vec{e}_{\theta} \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} r^2 dr = - \frac{ml^2}{12} \omega \sin \theta \vec{e}_{\theta}$$



11.6. Théorème du moment cinétique pour un solide

- Généralisation pour un point quelconque A –non-fixe

Soit le moment cinétique d'un point P exprimé par rapport à A , un point non-fixe :



$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \int_V \vec{AP} \times \vec{v} dm = \int_V (\vec{AO} + \vec{OP}) \times \vec{v} dm \\ &= \int_V \vec{AO} \times \vec{v} dm + \int_V \vec{OP} \times \vec{v} dm = \vec{AO} \times \int_V \vec{v} dm + \vec{L}_O\end{aligned}$$

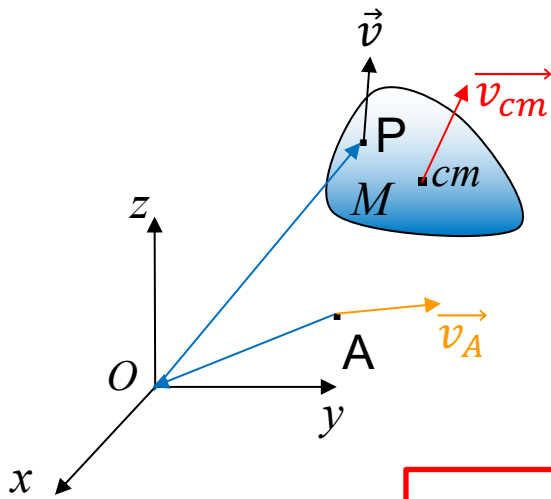
$$\vec{L}_A = \vec{AO} \times \vec{p}_{tot} + \vec{L}_O$$

11.6. Théorème du moment cinétique pour un solide

■ Généralisation pour un point quelconque A –non-fixe

Moment cinétique d'un point P exprimé par rapport à A , un point non-fixe :

$$\vec{L}_A = \vec{AO} \times \vec{p}_{tot} + \vec{L}_O$$



$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \frac{d}{dt} \vec{AO} \times \vec{p}_{tot} + \vec{AO} \times \frac{d}{dt} \vec{p}_{tot} + \frac{d\vec{L}_O}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -\vec{v}_A \times M\vec{v}_{cm} + \underbrace{\vec{AO} \times \vec{F}_{ext} + \vec{OP} \times \vec{F}_{ext}}_{\vec{AP} \times \vec{F}_{ext} = \vec{\mathcal{M}}_A}$$

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} + M \vec{v}_A \times \vec{v}_{cm} = \vec{\mathcal{M}}_A$$

Si A fixe dans le référentiel
Si A est le centre de masse
Si $\vec{v}_A$ colinéaire à $\vec{v}_{cm}$



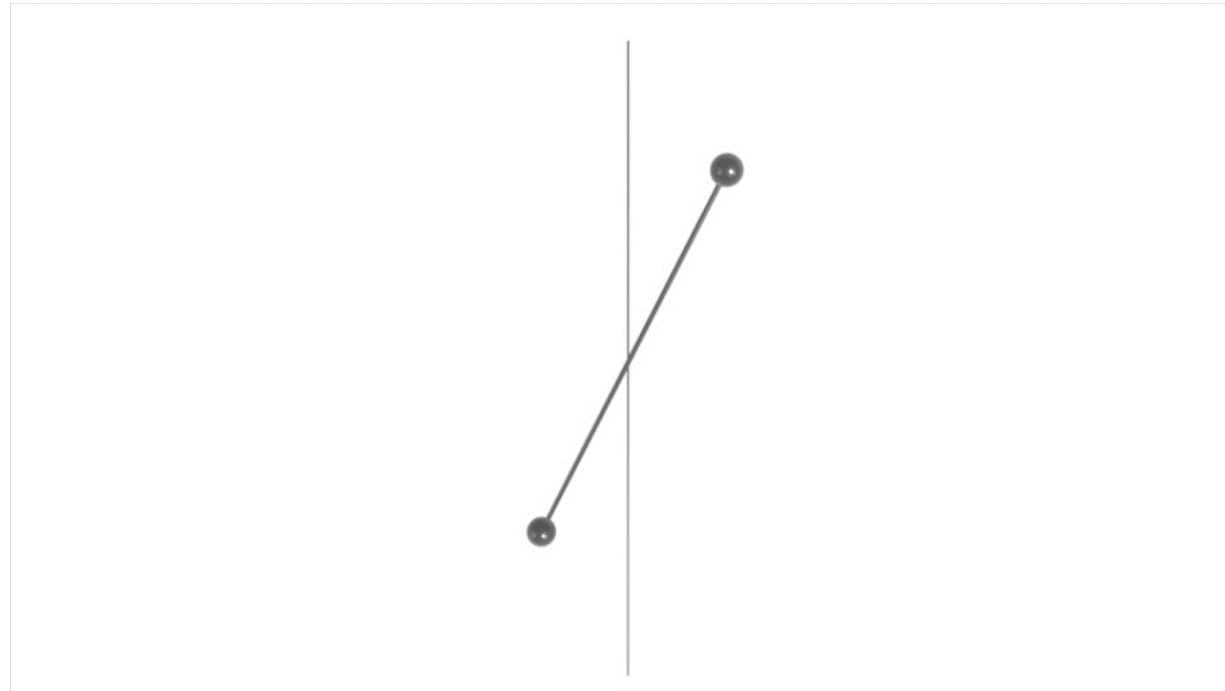
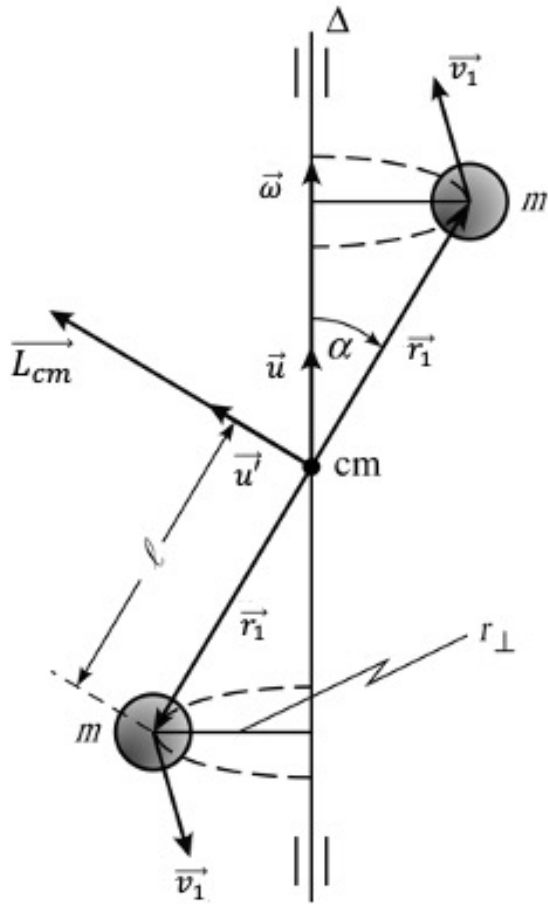
$$\vec{v}_A \times \vec{v}_{cm} = \vec{0}$$

Exemple ou $\vec{v}_A \times \vec{v}_{cm}$ non nul ?

11.7. tenseur d'inertie

- Définition du «tenseur» - retour sur le système «haltère» avec 2 masses

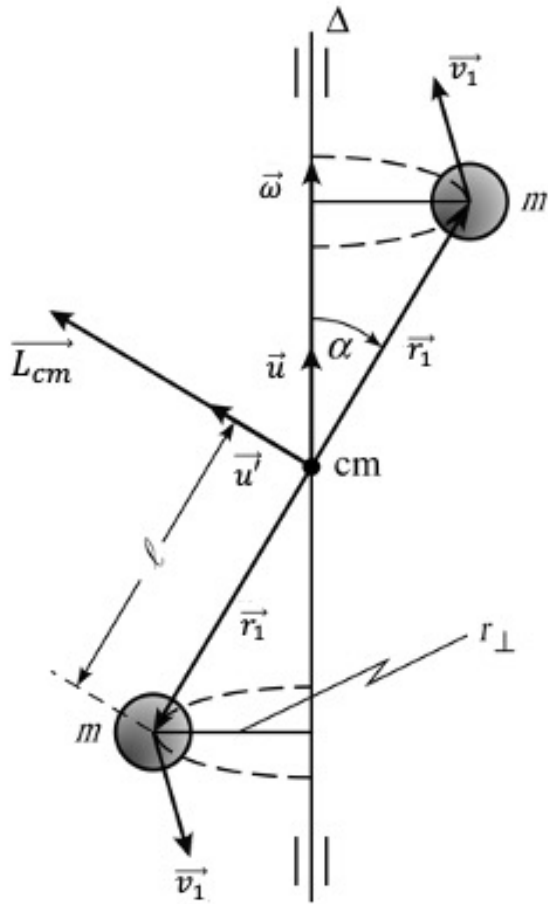
Hors programme



$$\vec{L}_{cm} = 2 m l \omega r_\perp \vec{u}'$$

11.7. tenseur d'inertie

■ Définition du «tenseur»



Dans le cas de l'haltère incliné $\vec{L}$ n'est pas parallèle à $\vec{\omega}$.

Il faut alors trouver une relation entre $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$.

Ceci est possible avec un nouvel objet mathématique.

Cet objet mathématique est un tenseur, représenté par une matrice (3x3)

On note le tenseur d'inertie $\underline{I}$

11.7. tenseur d'inertie

■ Définition du «tenseur»

Nous cherchons une relation du type

$$\vec{L} = \underline{\mathbf{I}} \vec{\omega} \quad \text{où}$$

$$\begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{yz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}$$

Composantes du vecteur
moment cinétique

Tenseur d'inertie

Composantes du vecteur
vitesse angulaire

$$\underline{\mathbf{I}} = \begin{pmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int xy dm & - \int xz dm \\ - \int yx dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int yz dm \\ - \int zx dm & - \int zy dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{pmatrix}$$

Cette matrice est le tenseur d'inertie, noté $\underline{\mathbf{I}}$

11.7. tenseur d'inertie

■ Moment d'inertie et Tenseur d'inertie

Pour un **axe principal de rotation d'un solide**: $\vec{L}$ et $\vec{\omega}$ sont parallèles. Dans ce cas, ils sont reliés par un scalaire I , le moment d'inertie :

$$\vec{L} = I \vec{\omega}$$

Si le moment cinétique L n'est pas colinéaire à $\vec{\omega}$, alors on écrit

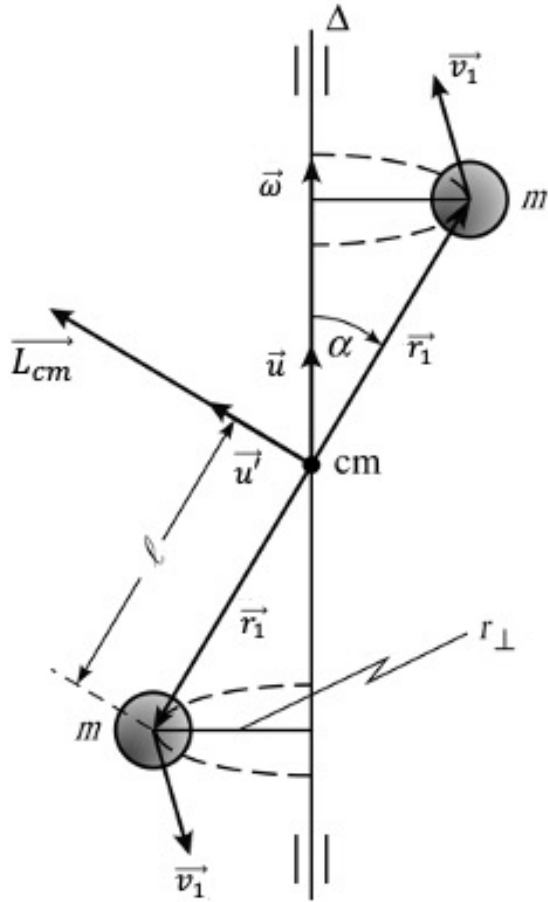
$$L = \underline{I} \vec{\omega}$$

avec $\underline{I}$ le tenseur d'inertie du solide

11.7. tenseur d'inertie

■ Exemple de «tenseur»

Hors programme



$$\vec{L}_{cm} = 2 m l \omega r_\perp \vec{u}'$$

$$L = \begin{pmatrix} m(l \cos \alpha)^2 & 0 & -ml^2 \sin \alpha \cos \alpha \\ 0 & 0 & 0 \\ -ml^2 \sin \alpha \cos \alpha & 0 & m(l \sin \alpha)^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \omega \end{pmatrix}$$

12. Applications du solide indéformable

12.1. Conditions d'équilibre

12.2. Mise en rotation d'un solide



12.1. Conditions d'équilibre

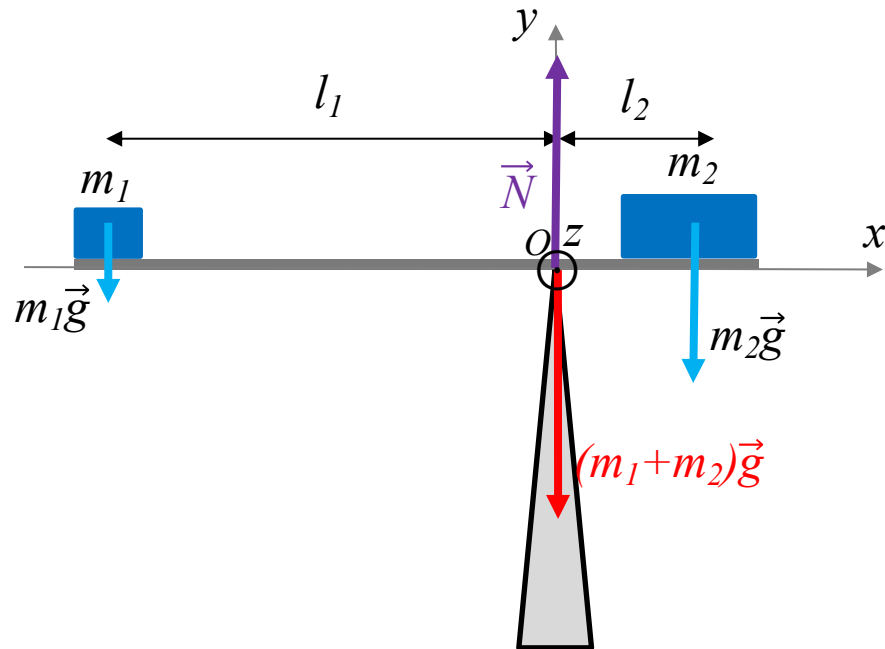
■ Conditions pour qu'un solide soit en équilibre – point fixe O

$$M \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$$

et

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} = \vec{0}$$

Exemple : équilibre d'une barre (sans masse) avec deux masses à chaque extrémité



$$\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0} \Rightarrow N = (m_1 + m_2)g$$

$$\sum \vec{\mathcal{M}}_{O,ext} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow l_2 \vec{e}_x \times (-m_2 g \vec{e}_y) + (-l_1 \vec{e}_x) \times (-m_1 g \vec{e}_y) = \vec{0}$$

$$-l_2 m_2 g \vec{e}_z + l_1 m_1 g \vec{e}_z = \vec{0}$$

projection sur $\vec{e}_z$: $-l_2 m_2 g + l_1 m_1 g = 0$

finalement

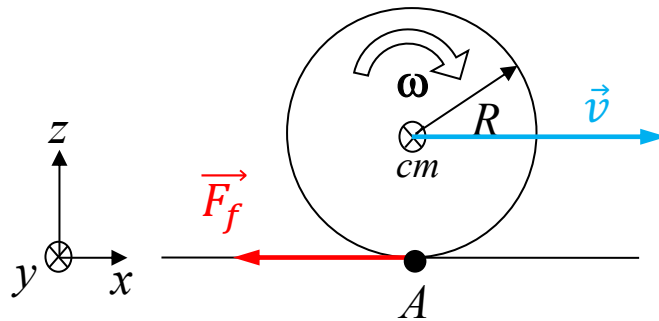
$$l_2 = l_1 \frac{m_1}{m_2}$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Roulement sans glissement - rappel

La force de frottement entre la roue et le sol permet un roulement sans glissement

⇒ ceci impose que la vitesse du point de contact en A de la roue avec le sol soit nulle



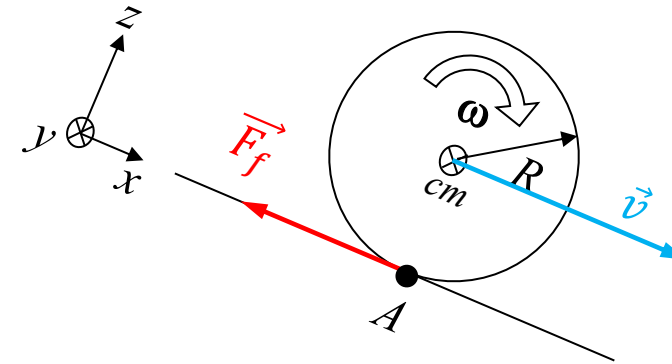
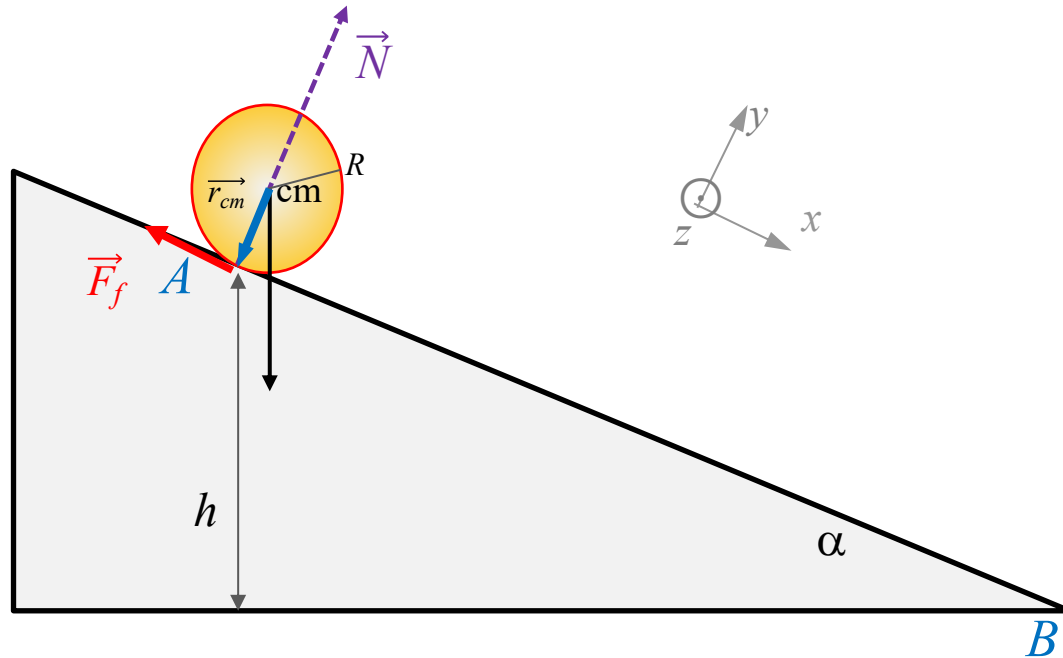
Condition de roulement sans glissement: $\vec{v}_A = \vec{0}$

ce qui conduit à $\vec{v}_{cm} = \omega R \vec{e}_x$



12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Roulement sans glissement et force de frottement



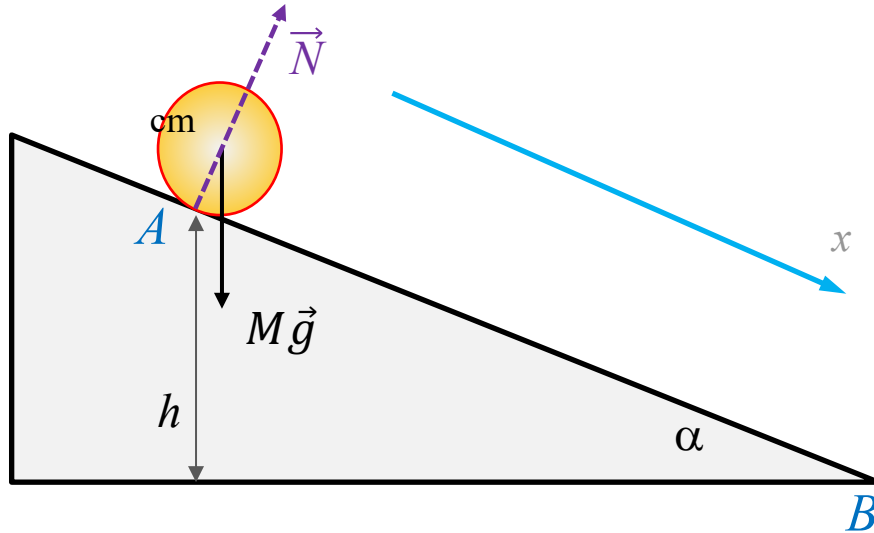
La force de frottement est responsable de la mise en rotation d'une roue sur un plan incliné.

Si pas de frottement, elle glisserait sans tourner.

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 1 : accélération d'une roue sur un plan incliné qui glisse

Absence de force de frottement sec $\Rightarrow$ glissement sans mise en rotation



$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_{ext,i} = \vec{0} \times M\vec{g} + \vec{r}_{cm} \times \vec{N} = \vec{0}$$

Dérivée du moment cinétique est nulle
 $\Rightarrow$ il n'y a pas de mise en rotation.

$\Rightarrow$ La mise en rotation nécessite un moment de force,
et donc une force de frottement au point de contact

Pour calculer l'accélération, on applique la 2nd loi de Newton au centre de masse :

$$a_{\text{glissement}} = g \sin \alpha$$

La vitesse de la bille en bas du plan incliné se calcule par la **conservation de l'énergie mécanique** :

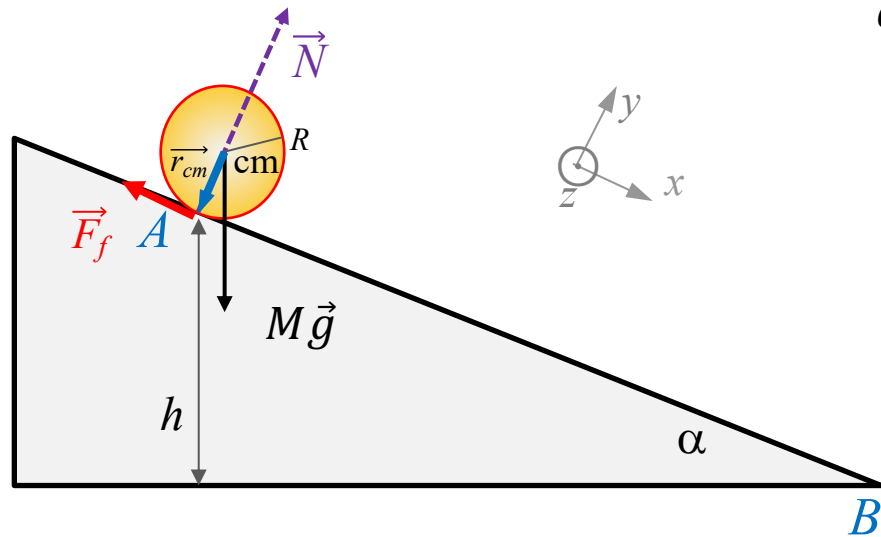
$$\begin{array}{l} \text{Etat initial en A: } Mgh \\ \text{Etat final en B: } \frac{1}{2} Mv^2 \end{array} \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

Aucune différence avec la
mécanique du point matériel

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 2 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

Présence d'une force de frottement sec: elle est opposée au sens du glissement.



$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \sum \vec{\mathcal{M}}_{cm,ext}$$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{0} \times M\vec{g} + \vec{r}_{cm} \times \vec{N} + \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_f = -RF_f \vec{e}_z$$

La mise en rotation ($\frac{dL}{dt} > 0$) est due au moment de la force de frottement statique F_f qui s'exerce au point A

Le moment cinétique augmente selon $-\vec{e}_z$, ce qui correspond au roulement de la bille vers le bas

La force de frottement est responsable de la mise en rotation de la roue.

La vitesse est nulle au point de contact (où s'exerce le frottement), cette force ne travaille pas

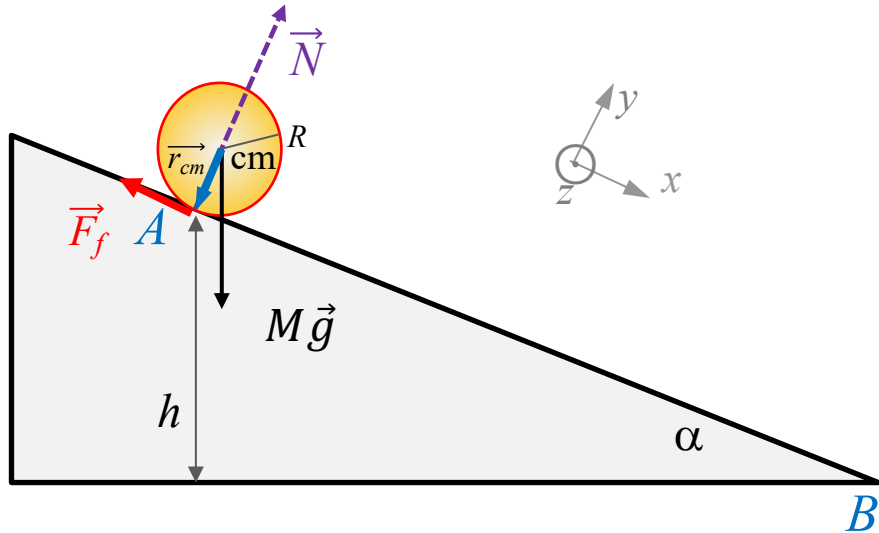
$$\delta W = F_f dl = F_f v_A dt = 0$$

Il n'y a donc pas de dissipation d'énergie.

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 2 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

Présence d'une force de frottement sec: elle est opposée au sens du glissement.



Pas de dissipation d'énergie => On peut appliquer la **conservation de l'énergie mécanique**

La vitesse de la roue en bas du plan incliné est déterminée par la **conservation de l'énergie mécanique** :

Avec: ω la vitesse de rotation de la bille, et $v = \omega R$
 I_{cm} son moment d'inertie

Etat initial en A: Mgh

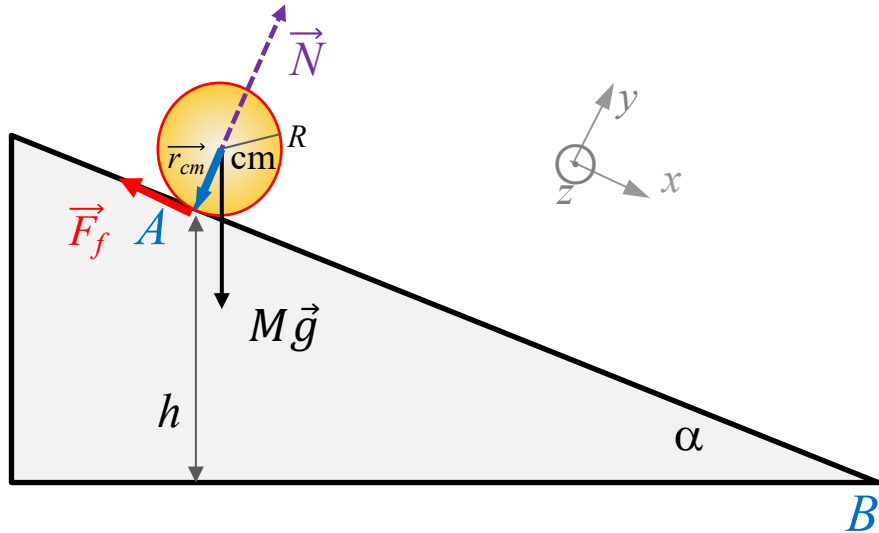
Etat final en B: $\frac{1}{2} (Mv^2 + I_{cm}\omega^2)$

La vitesse est plus faible que celle déterminée pour le cas sans frottement car une partie de l'énergie potentielle a été convertie en énergie cinétique de rotation

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{1 + I_{cm}/MR^2}}$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 2 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



Vitesse en B est plus faible dans le cas d'un roulement sans glissement, par rapport au cas sans frottement.

Donc l'accélération du centre de masse est aussi plus faible.

$$a_{\text{roulement}} < a_{\text{glissement}} (= g \sin \alpha)$$

Calcul de l'accélération du centre de masse (cm) :

Pour calculer l'accélération du centre masse nous utilisons deux lois essentielles

- 2nd loi de Newton appliquée au cm :

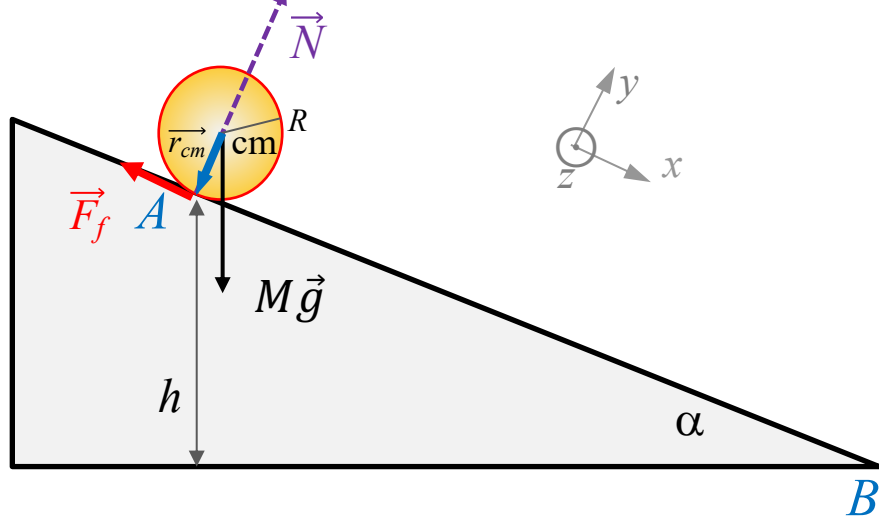
$$M \vec{a}_{cm} = M \vec{g} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

- Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_f = -R F_f \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad \vec{L}_{cm} = I_{cm} \vec{\omega}$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 2 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



Calcul de l'accélération du centre de masse:

Roulement sans glissement, la vitesse du **cm** est:

$$\vec{v}_{cm} = R \omega \vec{e}_x \quad \vec{a}_{cm} = R \dot{\omega} \vec{e}_x \quad a_{cm} = R \dot{\omega}$$

2nd loi de Newton projetée sur Ox : $Ma_{cm} = Mg \sin \alpha - F_f = MR \dot{\omega}$

Moment cinétique du **cm**

$$\vec{L}_{cm} = I_{cm} \vec{\omega} = -I_{cm} \omega \vec{e}_z$$

Théorème du moment cinétique du **cm** :

$$\frac{d\vec{L}_{cm}}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}_f = -RF_f \vec{e}_z$$

On projette sur $\vec{e}_z$: $\frac{dL_{cm}}{dt} = -I_{cm} \dot{\omega} = -RF_f \Rightarrow$

$$F_f = \frac{I_{cm} \dot{\omega}}{R} = \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2}$$

$$Ma_{cm} = Mg \sin \alpha - \frac{I_{cm} a_{cm}}{R^2}$$

Finalement

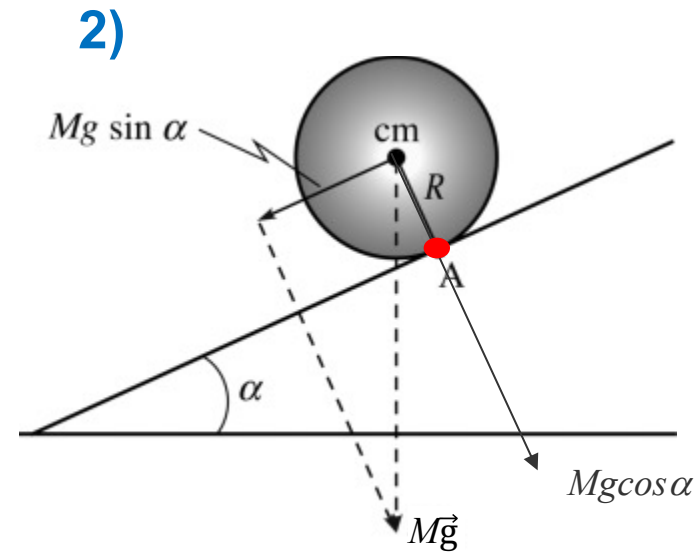
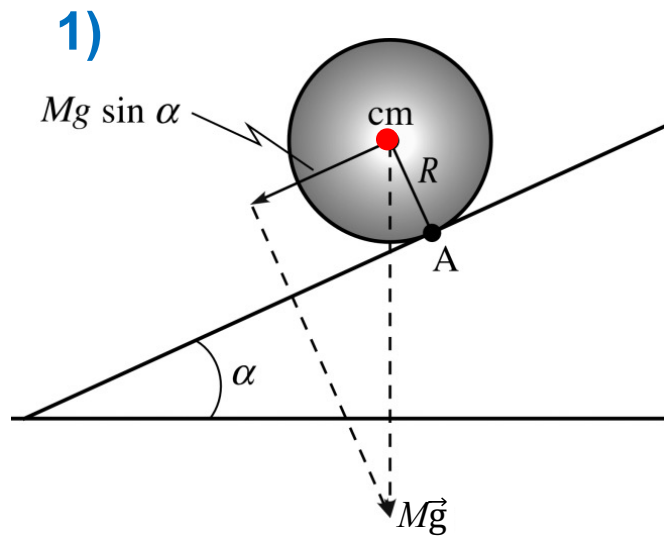
$$a_{cm} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 3 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

Remarque: la rotation d'un cylindre sur un plan incliné peut être traitée de deux façons différentes.

- 1) Rotation autour d'un axe passant par son centre de masse (calcul précédent)
- 2) Rotation autour d'un axe passant par le point de contact A (théorème de Steiner)



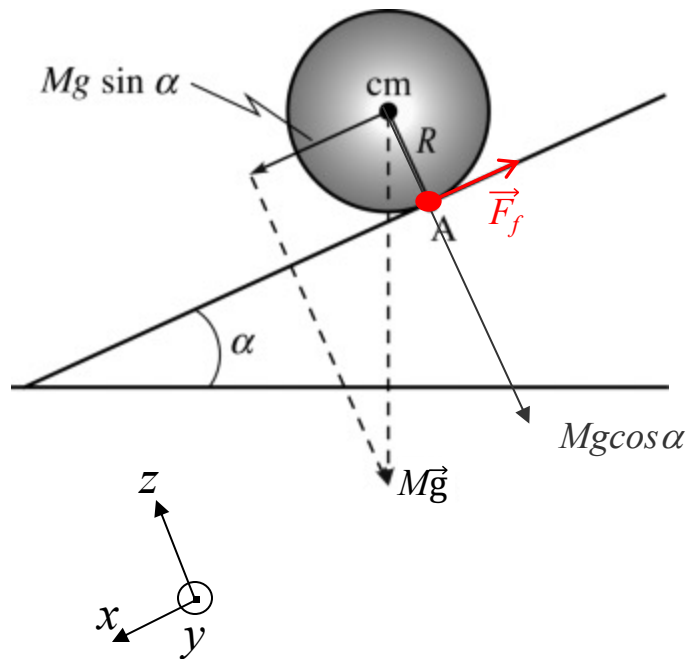
● : axe de rotation considéré

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 3 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné

Calcul de l'accélération en considérant une **rotation autour d'un axe passant par le point fixe A**

La mise en rotation ($\frac{dL}{dt} > 0$) est due **au moment du poids par rapport au point de contact A car celui-ci est fixe en raison de la force de frottement statique F_f**



$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} = \vec{M}_A = R\vec{e}_z \times M\vec{g} = RMg \sin \alpha \vec{e}_y$$

$$\vec{L}_A = I_A \vec{\omega} \Rightarrow \dot{\vec{L}}_A = I_A \dot{\vec{\omega}}$$

$$\text{En projetant sur } \vec{e}_y: \quad \dot{\omega} = \frac{\dot{L}_A}{I_A} = \frac{RMg \sin \alpha}{I_A}$$

L'accélération suivant $\vec{e}_x$ est $a_x = R\dot{\omega}$

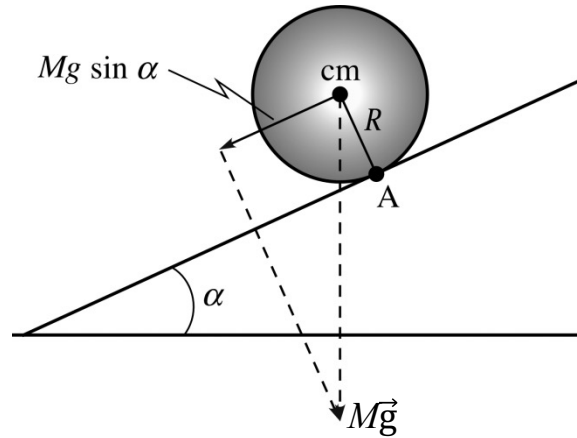
Le moment est $I_A = I_{cm} + MR^2$ (rotation autour d'un axe passant par A: théorème Steiner)

Finalement

$$a_x = \frac{R^2 Mg \sin \alpha}{I_{cm} + MR^2} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 3 : accélération d'une roue qui roule sans glisser sur un plan incliné



L'accélération est plus faible lorsque le cylindre (ou la sphère) roule au lieu de glisser (sans frottement).

⇒ Ceci est dû au moment d'inertie qui s'oppose à l'accélération angulaire

$$a_{cm} = \frac{g \sin \alpha}{1 + \frac{I_{cm}}{MR^2}}$$

Soient 3 objets:

- sphère pleine
- cylindre plein,
- cylindre creux

avec le même rayon R et la même masse M

Sur le plan incliné, ils arriveront dans l'ordre suivant :

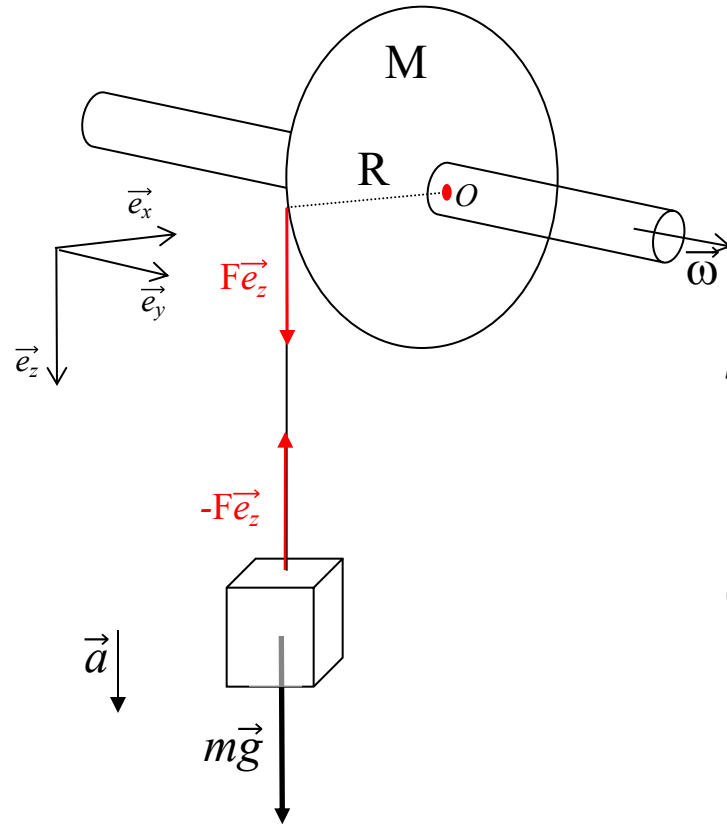
1. sphère $I_{cm} = \frac{2}{5}MR^2 \Rightarrow a = \frac{5}{7}g \sin \alpha$

2. cylindre plein $I_{cm} = \frac{1}{2}MR^2 \Rightarrow a = \frac{2}{3}g \sin \alpha$

3. cylindre creux $I_{cm} = MR^2 \Rightarrow a = \frac{1}{2}g \sin \alpha$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 4 : Accélération d'une masse m avec poulie de moment d'inertie $I = \frac{1}{2} MR^2$



2nd Loi Newton : $m\vec{a} = m\vec{g} - F\vec{e}_z \Leftrightarrow m a = mg - F$

projection sur Oz

Moment cinétique :

$$\vec{L}_O = I \vec{\omega} \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_{F_{ext}} = -R\vec{e}_x \times F\vec{e}_z = RF\vec{e}_y$$

projection sur Oy $\Rightarrow \frac{dL_O}{dt} = RF = I \frac{d\omega}{dt} = I \dot{\omega} \Rightarrow F = I \frac{\dot{\omega}}{R}$

d'où $ma = mg - F = mg - I \frac{\dot{\omega}}{R}$

or nous avons $a = R \dot{\omega}$ et $I = \frac{1}{2} MR^2$

soit $mR \dot{\omega} = mg - \frac{1}{2} MR^2 \frac{\dot{\omega}}{R} = mg - \frac{1}{2} MR \dot{\omega}$

L' accélération angulaire est $\dot{\omega} = \frac{mg}{(m + 1/2 M)R}$

L' accélération est

$$a = R \dot{\omega} = \frac{mg}{m + 1/2 M}$$

$$a < g$$

Week 12 – Part 2

12. Applications du solide indéformable

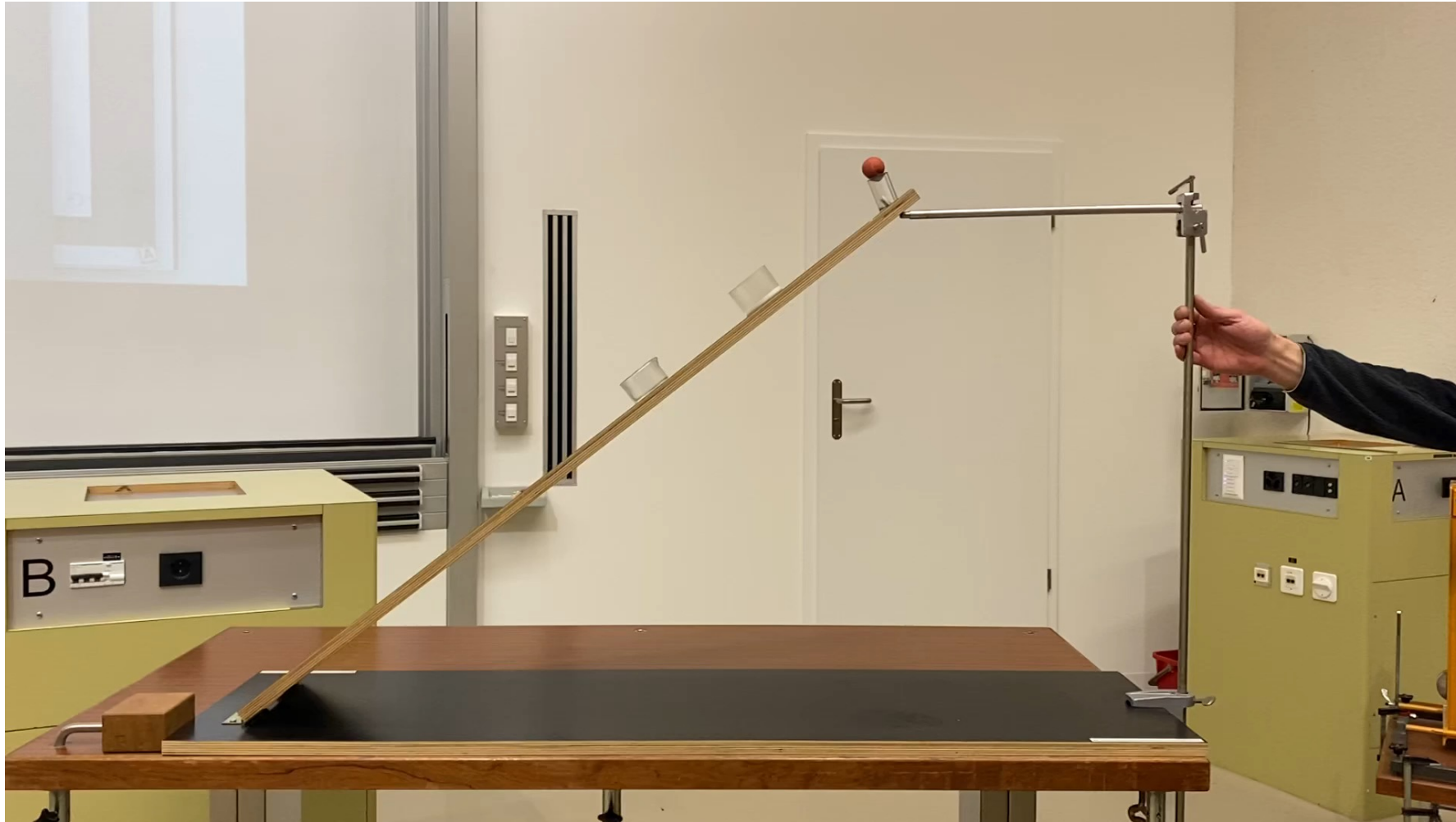
12.2. Mise en rotation d'un solide

12.3. Calcul de moments d'inertie usuels



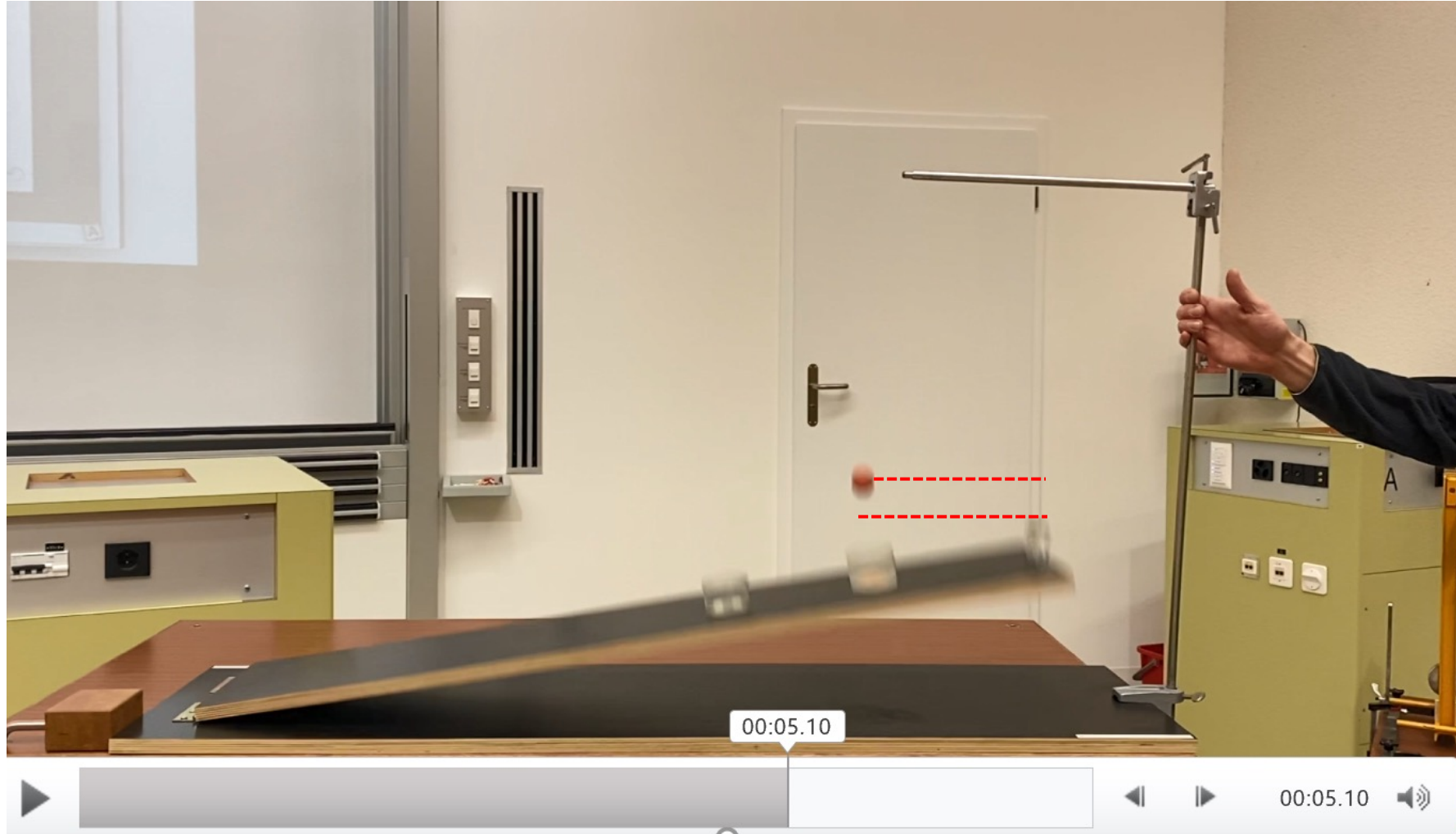
12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : accélération d'un point d'une planche qui pivote autour d'un axe



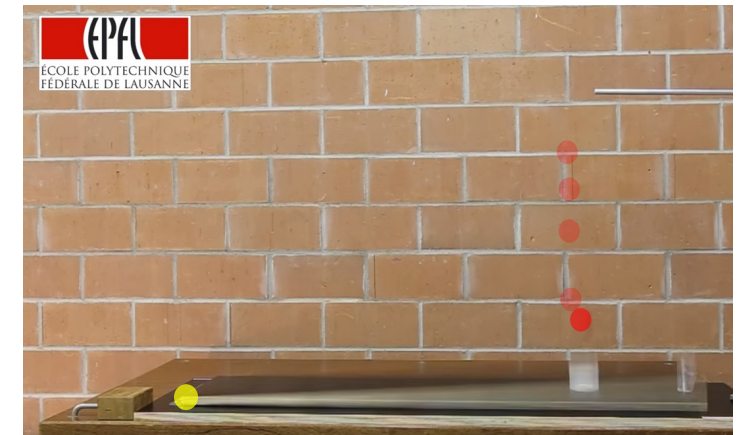
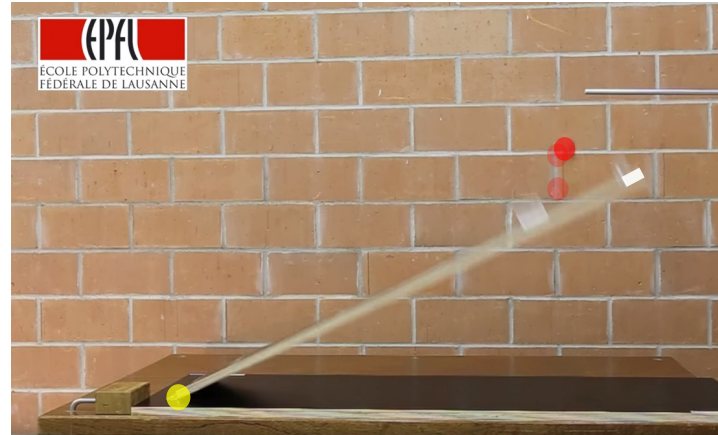
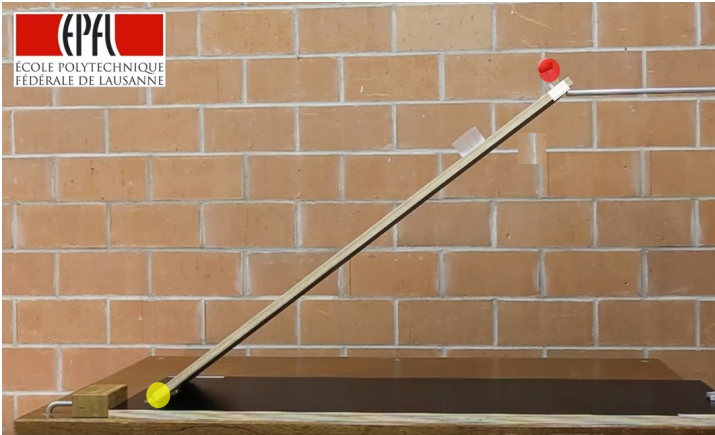
12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : accélération d'un point d'une planche qui pivote autour d'un axe



12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : accélération d'un point d'une planche qui pivote autour d'un axe



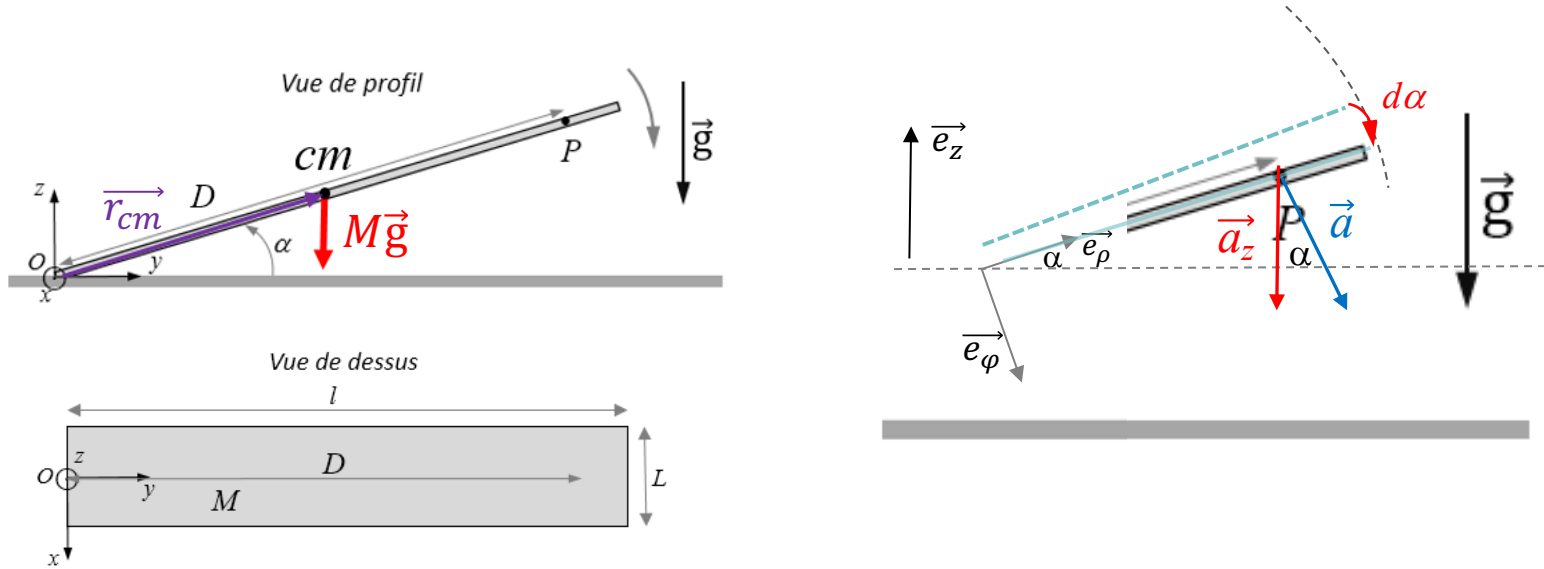
Expérience : une balle (point rouge) repose sur un support au bout d'une planche (marque blanche) qui peut tourner autour d'un axe (point jaune) à l'une de ses extrémités. Lorsque la planche est lâchée, celle-ci pivote et la balle tombe sous l'effet de la pesanteur. On remarque que la balle ne touche plus la planche pendant sa chute et qu'elle arrive au sol après la planche

⇒ l'extrémité de la planche (marque blanche) accélère donc plus vite que la balle.

⇒ Calcul de l'accélération de l'extrémité de la planche

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : accélération d'un point d'une planche qui pivote autour d'un axe



On calcule l'accélération $\vec{a}$ d'un point P situé à une distance D de l'axe de rotation.

Puis on projette cette accélération sur Oz et on la compare à g

a) Accélération angulaire $\dot{\omega}$ quand on lâche la planche (à $t=0$)

- Moment du poids $\vec{\mathcal{M}}_O$ avec $\vec{p} = -Mg \vec{e}_z$ **appliqué au centre de masse** (à la distance $d_{cm} = \frac{l}{2}$)

$$\vec{\mathcal{M}}_O = \underbrace{(d_{cm} \cos \alpha \vec{e}_y + d_{cm} \sin \alpha \vec{e}_z)}_{\vec{r}_{cm}} \times \underbrace{(-Mg \vec{e}_z)}_{\vec{p}} = -\frac{l}{2} \cos \alpha \cdot Mg \vec{e}_x$$

- **Théorème du moment cinétique** en O (ω la vitesse angulaire selon Ox avec $\vec{\omega} = -\omega \vec{e}_x$) :

$$\vec{\mathcal{L}}_O = I \vec{\omega} = -I \omega \vec{e}_x \quad \text{et} \quad \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O \Rightarrow \frac{d(-I \omega \vec{e}_x)}{dt} = -gM \frac{l}{2} \cos \alpha \vec{e}_x \Rightarrow \frac{d\omega}{dt} = \dot{\omega} = \frac{Ml}{2I} g \cos \alpha$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 5 : accélération d'un point d'une planche qui pivote autour d'un axe

b) Composante a_z à $t=0$ de l'accélération du point P ($OP=D$)

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2)\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi})\vec{e}_\varphi$$

$\vec{a}$ en fonction de $\dot{\omega}$ (coordonnées polaires) : $\vec{a} = -D\omega^2\vec{e}_\rho + D\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$

Au moment où on lâche la planche ($t=0$) : $\omega = 0$ soit $\vec{a} = D\dot{\omega}\vec{e}_\varphi$

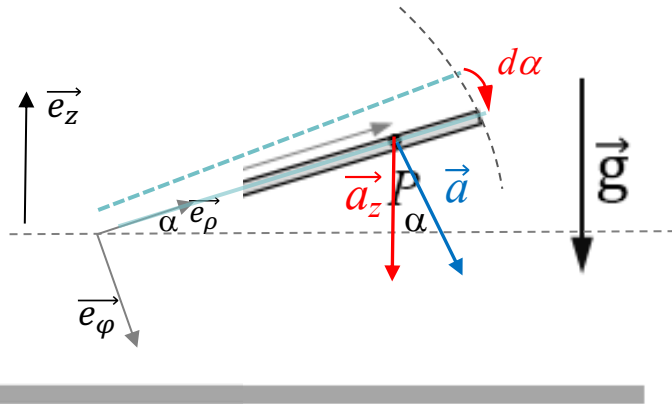
On projette $\vec{a}$ sur Oz : $a_z = -D\dot{\omega} \cos \alpha$ avec $\dot{\omega}$ calculé en a) : $a_z = -\frac{Dl}{2I} Mg \cos^2 \alpha$

Avec le moment d'inertie de la planche: $I = \frac{1}{3} Ml^2$

$$a_z = -\frac{3D}{2l} g \cos^2 \alpha$$

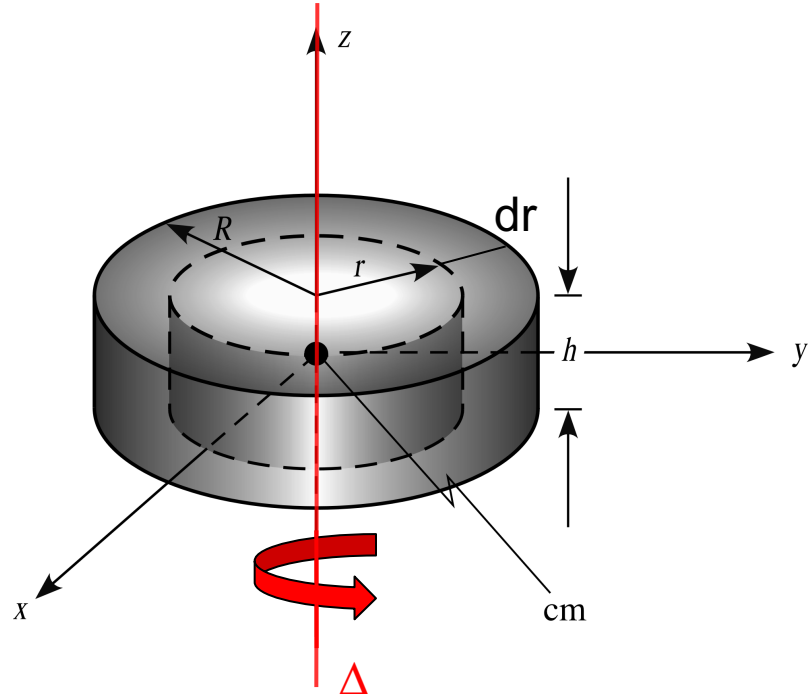
On remarque que l'accélération augmente avec la distance D

Pour $\alpha = 30^\circ \Rightarrow |a_z| > g$ pour $D > \frac{8}{9}l$ accélération supérieure à g



12.3. Calcul de moments d'inertie usuels

■ Roue pleine: moment d'inertie pour une rotation selon Oz



Définition:
$$I_{cm,\Delta} = \int_V r_{\perp}^2 dm$$

Si masse homogène:
$$I_z = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV$$

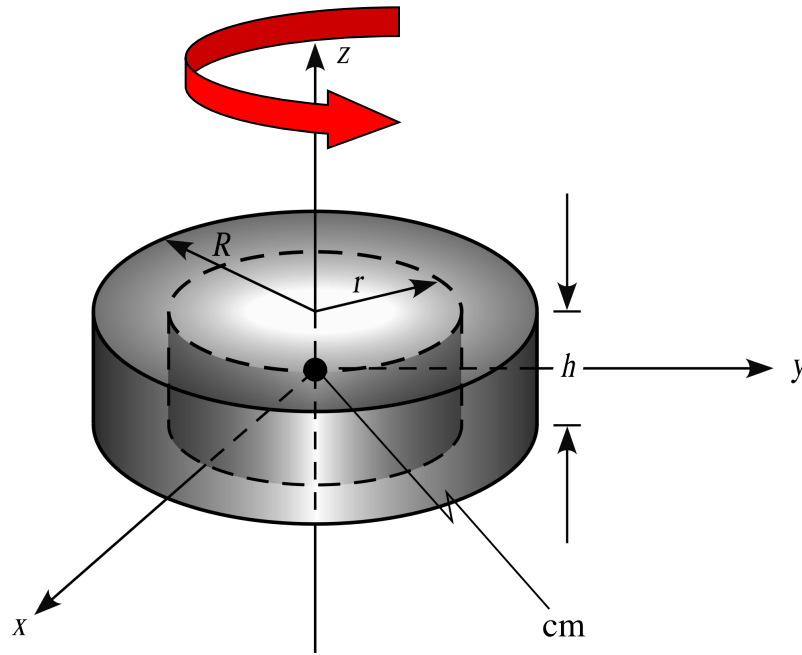
Comment calcule-t-on I_z ?

Seule la distance par rapport à l'axe Δ intervient ($r_{\perp}$), on choisit un élément de volume tel que tous les points dans ce volume dV sont à une **distance constante** de l'axe Δ pendant la rotation.

⇒ Dans le cas d'un cylindre, un anneau de rayon r , d'épaisseur dr et de hauteur h satisfait cette hypothèse : $dV = 2\pi r dr h$

12.3. Calcul de moments d'inertie usuels

■ Roue pleine: moment d'inertie pour une rotation selon Oz



$$I_z = \rho \int_V r_{\perp}^2 dV \text{ avec } dV = 2\pi r h dr$$

Par définition, $r_{\perp}$ est la distance entre dV et l'axe. Tel que r est défini dans la figure ci-contre, $r_{\perp} = r$, soit

$$\begin{aligned} I_z &= \rho \int_0^R r^2 \overbrace{2\pi r dr h}^{dV} = \rho 2\pi h \int_0^R r^3 dr \\ &= \rho \pi h \frac{1}{2} R^4 \end{aligned}$$

$$\left. \begin{array}{l} \text{Le volume du cylindre est } V = \pi R^2 h \\ \text{La masse du cylindre est } M = V\rho \end{array} \right\} M = V\rho = \pi R^2 h\rho$$

Finalement le moment d'inertie selon Oz s'écrit

$$I_z = \frac{1}{2} M R^2$$

12.3. Calcul de moments d'inertie usuels

- Moment d'inertie d'une tige mince de section S et de longueur L , avec $S \ll L$

Définition:
$$I_{cm,\Delta} = \int_V r_{\perp}^2 dm$$

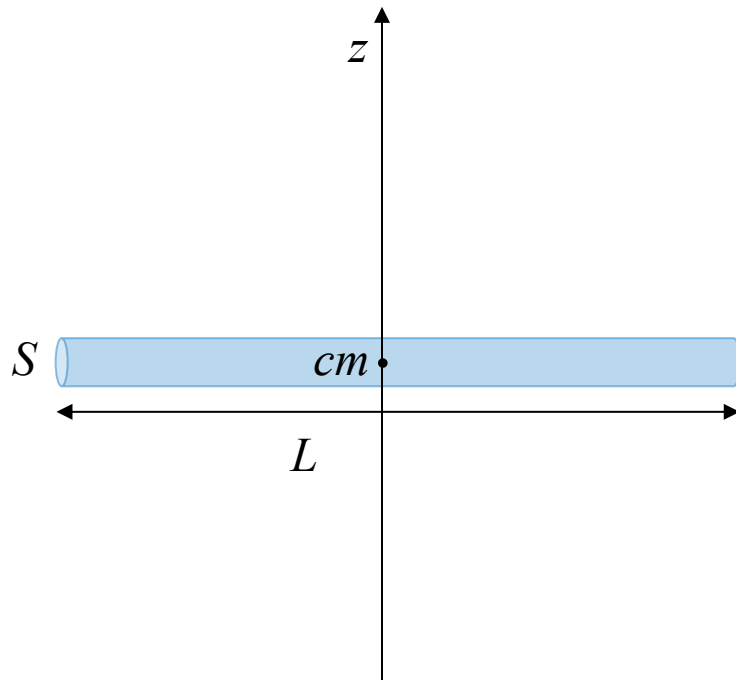
Moment d'inertie selon un axe passant par son centre de masse :

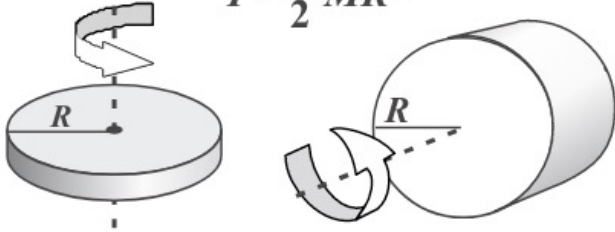
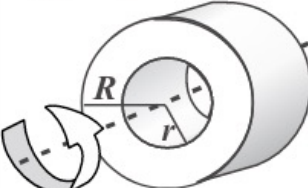
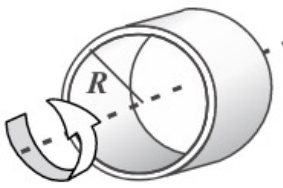
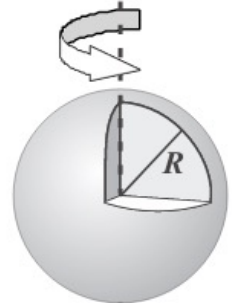
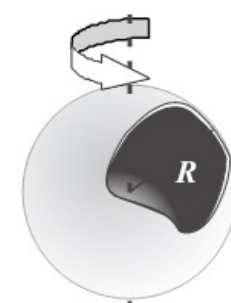
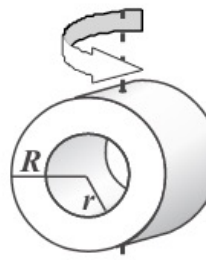
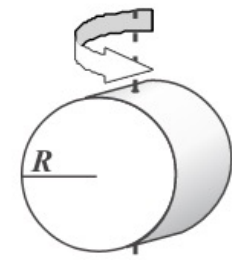
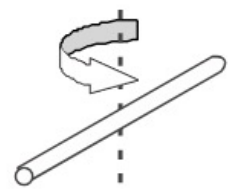
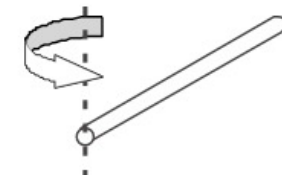
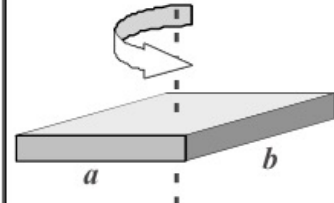
$$I_z = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho dV = \int_{-L/2}^{L/2} x^2 \rho S dx = \rho S \left[\frac{x^3}{3} \right]_{-L/2}^{L/2} = \rho S \frac{2L^3}{3 \cdot 8} = \rho S \frac{L^3}{12}$$

$$\text{or } \rho = \frac{M}{V} = \frac{M}{SL}$$

finalement

$$I_z = M \frac{L^2}{12}$$



Disque plein ou Cylindre plein (trou de rayon r nul) $I = \frac{1}{2} MR^2$ 	Cylindre troué $I_{CM} = \frac{1}{2} M(R^2 + r^2)$ 	Anneau ou Cylindre creux (trou de rayon $r = R$) $I = MR^2$ 	
Sphère pleine $I = \frac{2}{5} MR^2$ 	Sphère creuse $I = \frac{2}{3} MR^2$ 	Cylindre troué $I = \frac{1}{12} M(3R^2 + 3r^2 + L^2)$ 	Cylindre plein (trou de rayon r nul) $I = \frac{1}{12} M(3R^2 + L^2)$ 
Tige mince $I = \frac{1}{12} ML^2$ 	Tige mince $I = \frac{1}{3} ML^2$ 	Disque plein $I = \frac{1}{12} MR^2$ 	Plaque rectangulaire $I = \frac{1}{12} M(a^2 + b^2)$ 

Pour un objet fait d'un même matériau, quel cylindre à le plus grand moment d'inertie?

Week 12 – Part 3

12. Applications du solide indéformable

12.2. Mise en rotation d'un solide

12.3. Calcul de moments d'inertie usuels

12.4. Moment d'inertie : exemples et applications

12.5 Stabilité gyroscopique



12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 4 : La meule

ou comment exercer une force supérieure au poids de la roue

La roue de masse m tourne sans glissement

Forces extérieures à considérer :

$\vec{N}$ réaction du sol

$\vec{R}$ force de « rappel » en O

$m\vec{g}$ le poids

2nd loi de Newton:

$$m \frac{d\vec{v}_{cm}}{dt} = \vec{R} + \vec{N} + m\vec{g}$$

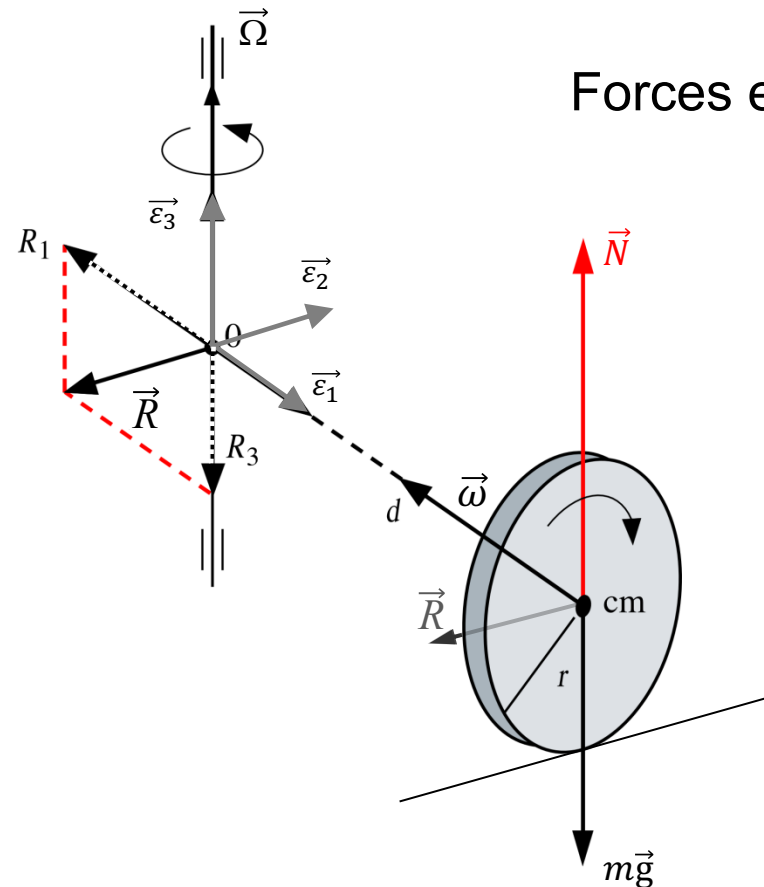
On projette dans un repère $O, \vec{e}_1, \vec{e}_2, \vec{e}_3$

$$-m\Omega^2 d = R_1 \quad \left(a_n = \frac{v^2}{R} = R\omega^2 \right)$$

$$0 = R_2$$

$$0 = R_3 + N - mg$$

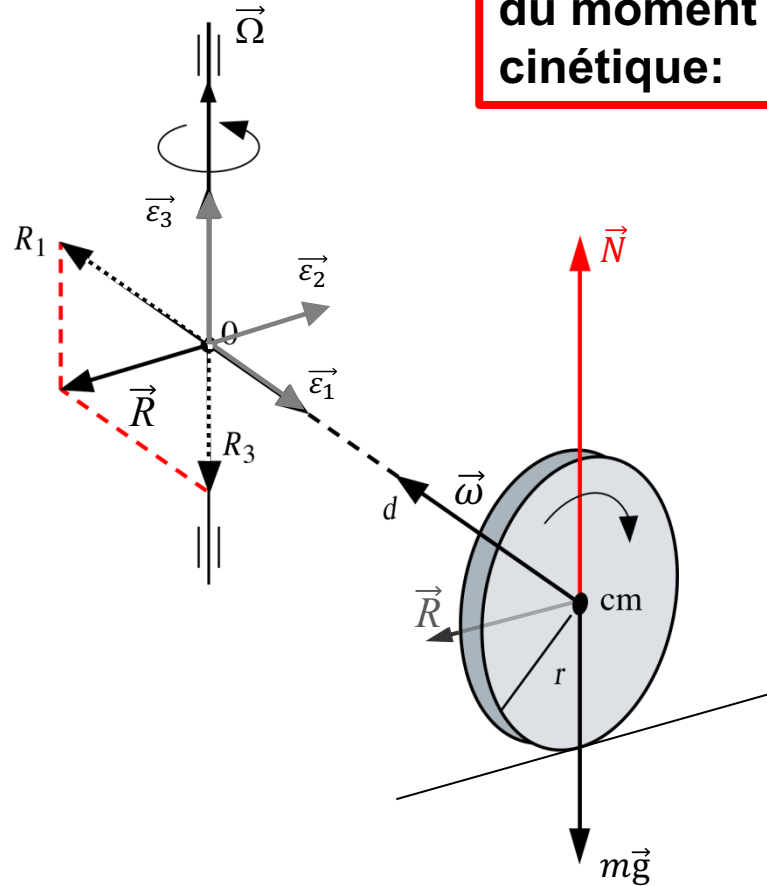
Valeur de R_3 ?



12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 4 : La meule

**Théorème
du moment
cinétique:**



I_1 : moment d'inertie pour la rotation de la roue autour de ε_1

I_3 : moment d'inertie pour la rotation de la roue autour de ε_3

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{M}_{O,i}^{Ext}$$

et $\vec{L}_O = -I_1 \omega \vec{\varepsilon}_1 + I_3 \Omega \vec{\varepsilon}_3$

$$\dot{\vec{L}}_O = -I_1 \omega \dot{\vec{\varepsilon}}_1 = -I_1 \omega \vec{\Omega} \times \vec{\varepsilon}_1 = -I_1 \omega \Omega \vec{\varepsilon}_2$$

$$\vec{M}_O^{ext} = d \vec{\varepsilon}_1 \times (N - mg) \vec{\varepsilon}_3$$

$$\vec{M}_O^{ext} = d(mg - N) \vec{\varepsilon}_2$$

$$\Rightarrow -I_1 \omega \Omega \vec{\varepsilon}_2 = d(mg - N) \vec{\varepsilon}_2$$

$$N = mg + I_1 \frac{\omega \Omega}{d}$$

$$\dot{\mathbf{e}}_\rho = -\dot{\phi} \sin \phi \mathbf{e}_x + \dot{\phi} \cos \phi \mathbf{e}_y = \dot{\phi} \mathbf{e}_\phi$$

12.2. Mise en rotation d'un solide

■ Exemple 4 : La meule

La distance parcourue pour un tour complet est $2\pi d$

La roue a quant à elle parcourue la distance $2\pi r \times \underbrace{\frac{T}{\tau}}_{\text{nombre de tours}} = 2\pi r \times \frac{\omega}{\Omega}$

$$\text{d'où } 2\pi d = 2\pi r \times \frac{\omega}{\Omega}$$

nombre de tours

$$\text{et donc } \omega r = \Omega d$$

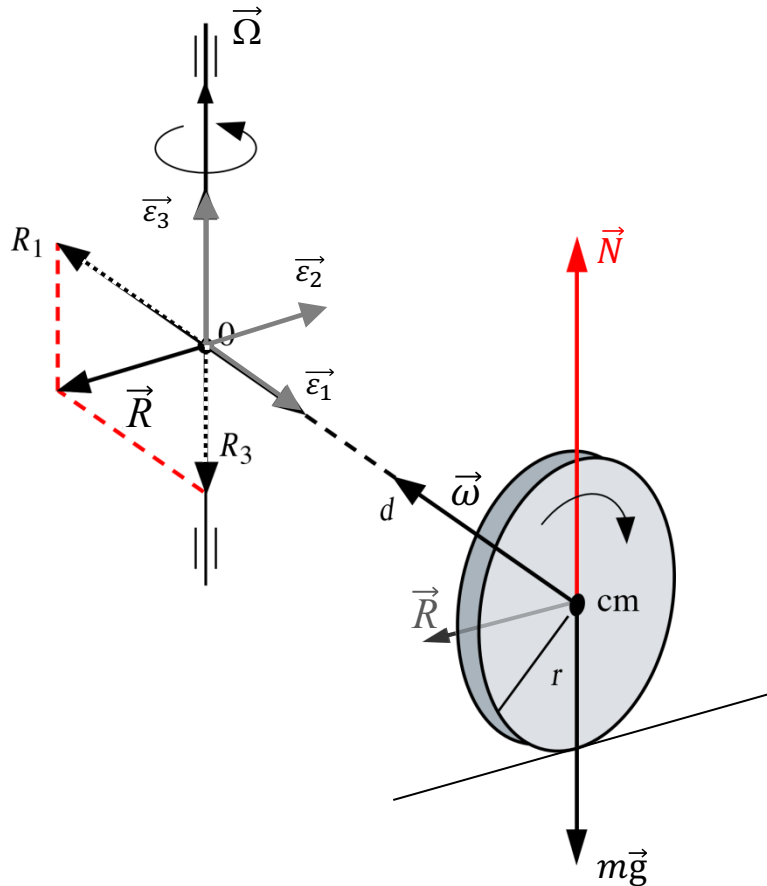
$$\text{avec } I_1 = \frac{1}{2}mr^2$$

$$N = m \left(g + \frac{1}{2}r\Omega^2 \right)$$

La force exercée par la roue sur le sol est supérieure au poids de celle-ci

$$\Omega = \frac{2\pi}{1s}, \quad r = 0.5 \text{ m}$$

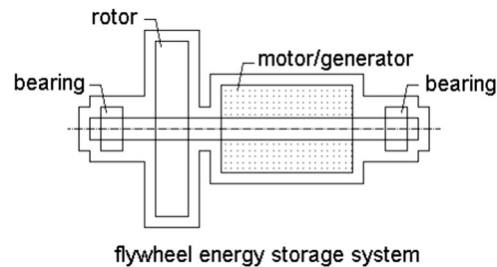
$$N = m (9.81 \text{ m/s}^2 + \pi^2 \text{ m/s}^2) \quad \text{soit } 2 \times \text{le poids}$$



12.4. Moment d'inertie: exemples et applications

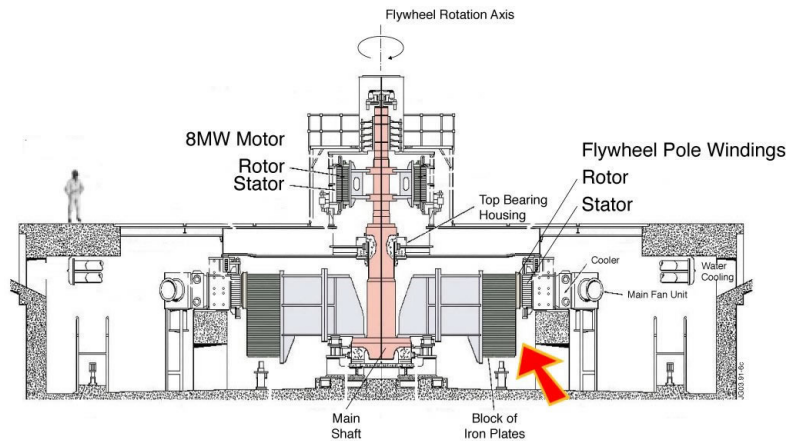
■ Application : stockage de l'énergie

Il est possible de stocker une quantité d'énergie considérable dans un corps solide en rotation



Soit un cylindre de rayon 1,5 m, de longueur 2 m,
et de masse volumique $\rho = 10^4 \text{ kg/m}^3$
et qui ralentit de 5000 t/min à 3000 t/min en 1 minute

La puissance générée est de 232 MW (Ville de Lausanne 100-250 MW)



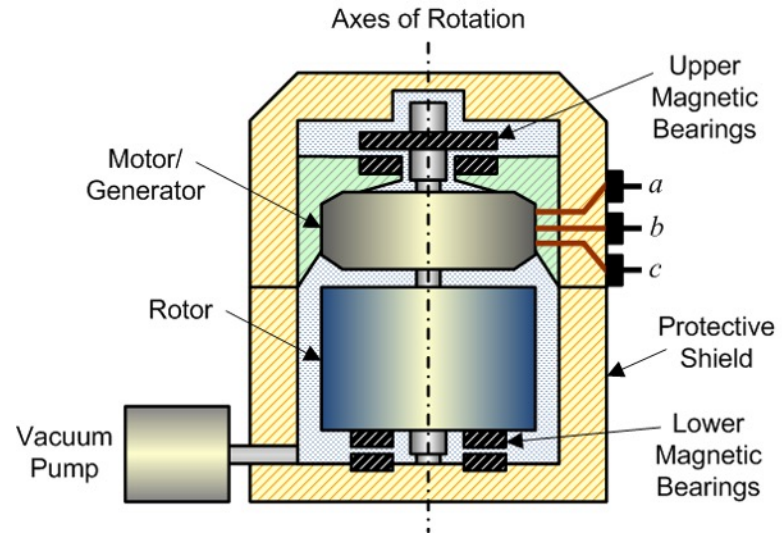
Roue d'inertie « flying wheel » utilisée au réacteur de fusion européen JET (UK) pour amorcer le plasma
⇒ très grande puissance électrique fournie en couplant la roue à un générateur électrique.

La roue fait 9 m de diamètre et sa masse est de 775 t

Moment d'inertie: 13,5 million kg.m^2

12.4. Moment d'inertie: exemples et applications

■ Application: stockage de l'énergie



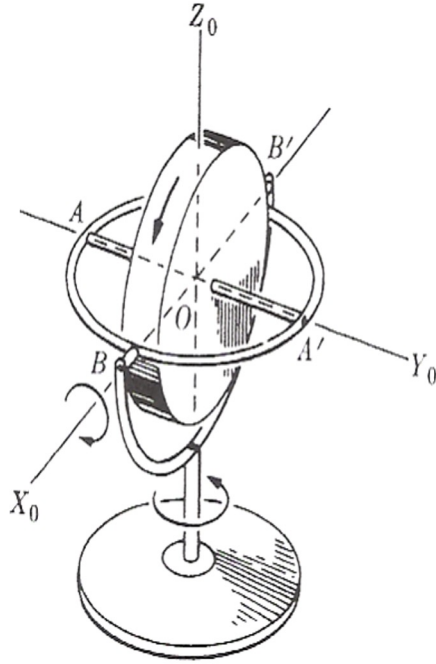
satellite



station de stockage

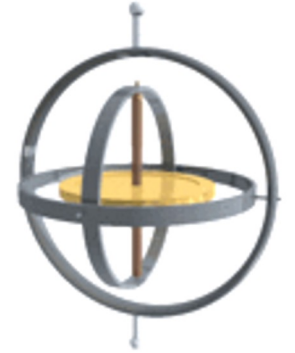
12.5. Stabilité gyroscopique

■ Le gyroscope



Principe : un disque tourne très vite autour d'un axe (OY_0). Celui-ci est mobile autour des axes OX_0 et OZ_0

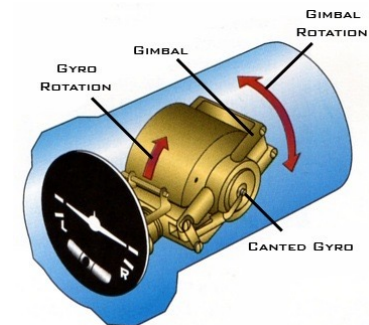
Observation : si l'on déplace le gyroscope, l'axe OY_0 est toujours dirigé dans la même direction



Conséquence de la conservation du moment cinétique $\vec{L}$

Applications :

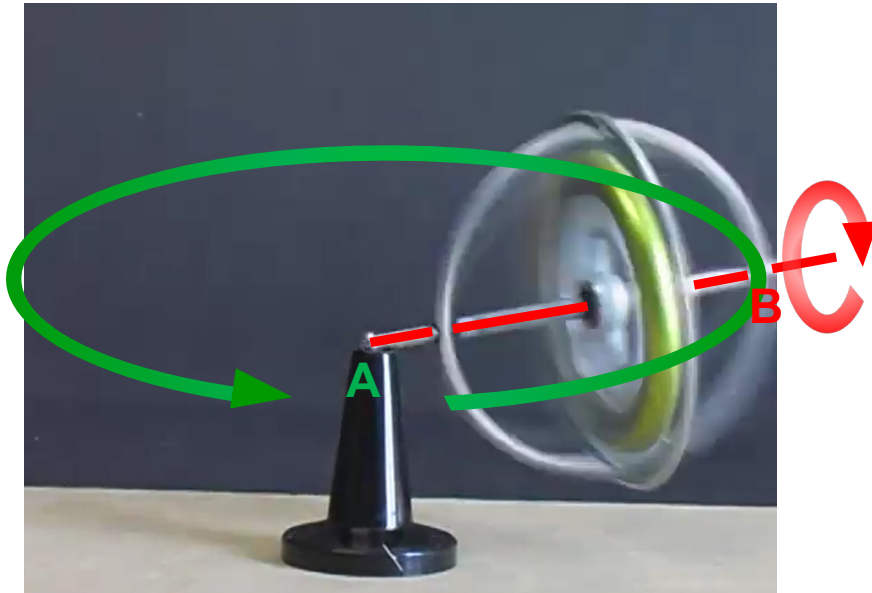
Les principales applications du gyroscope concernent le guidage (bateaux, avions, sous-marins) et l'horizon artificiel dans les avions



12.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

A) Description phénoménologique



Le disque du gyroscope est mis en rotation autour de son axe (en rouge) puis une des extrémités de cet axe est posée sur un support en A (on considère que les frottements sont négligeables en A).

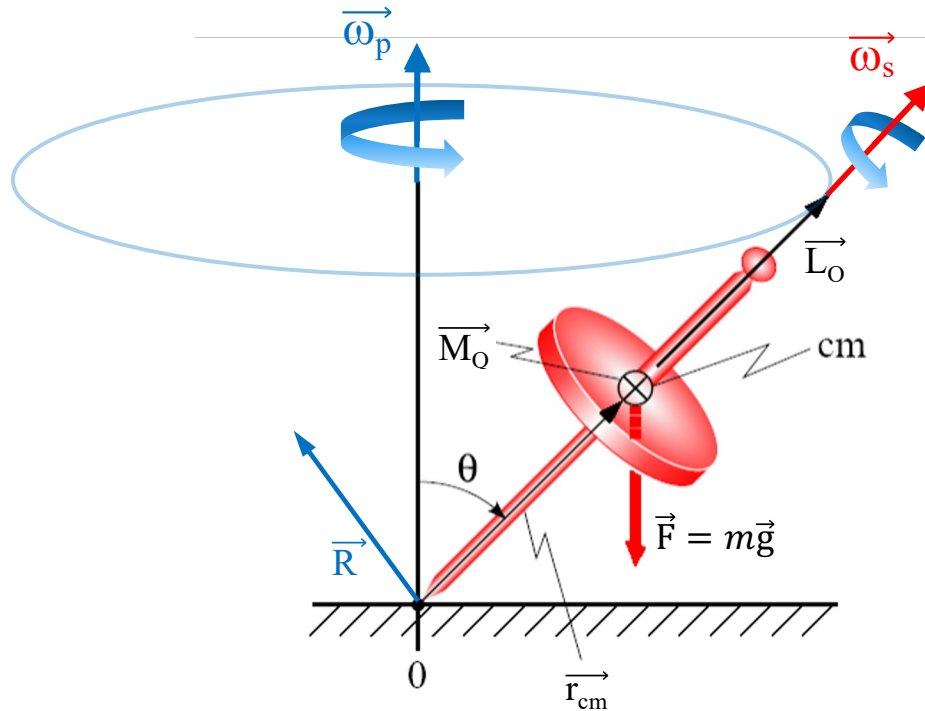
Lorsque le gyroscope est lâché, l'axe de rotation du gyroscope se met à tourner autour du point A. L'extrémité B de l'axe de rotation décrit une trajectoire circulaire (courbe verte). C'est un mouvement de précession.

Remarque : si la rotation du disque du gyroscope est dans l'autre sens alors le point B suit la trajectoire verte dans le sens opposé

12.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



$\vec{\omega}_s$: vitesse angulaire du gyroscope tournant sur lui-même

$\vec{\omega}_p$: vitesse angulaire de la rotation de l'axe du gyroscope autour de l'axe vertical (mouvement de précession)

cm : centre de masse

$\vec{F}$: le poids (force extérieure) dont le point d'application est le centre de masse c_m

$\vec{R}$: réaction (force extérieure) au point de contact en O

$\vec{M}_O$: moment de la force $\vec{F}$ appliqué au cm du gyroscope ($\vec{M}_O = \vec{r}_{cm} \times \vec{F}$)

$\vec{L}_0$: moment cinétique par rapport au point de contact ($\vec{L}_0 = I \vec{\omega}_s$) avec I moment d'inertie

12.5. Stabilité gyroscopique

■ Le gyroscope: étude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement

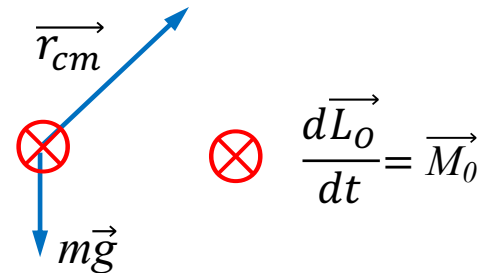
1) Mise en évidence du mouvement de précession

Théorème du moment cinétique :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum_i \vec{r}_{cm,i} \times \vec{F}_{ext,i} = \sum_i \vec{M}_O(F_{ext,i})$$

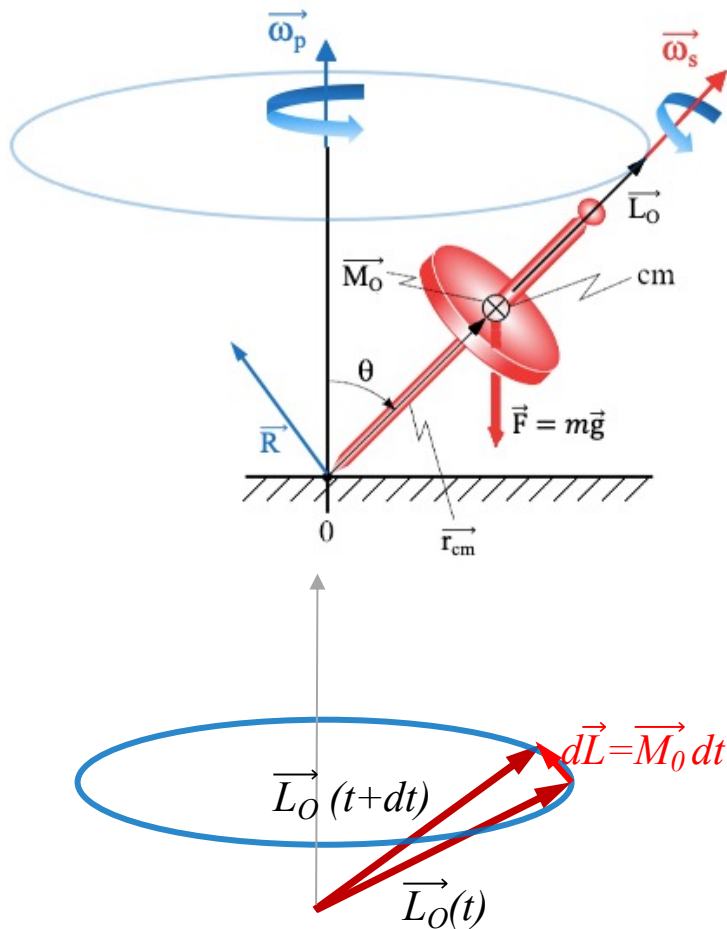
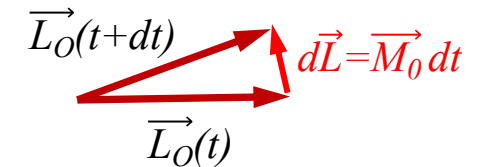
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{cm} \times m\vec{g} + \underbrace{\vec{0} \times \vec{R}}_0 = \vec{M}_0$$

Calcul du produit vectoriel
 $\vec{r}_{cm} \times m\vec{g}$



La direction du moment cinétique change selon $\vec{M}_0$

vue de dessus

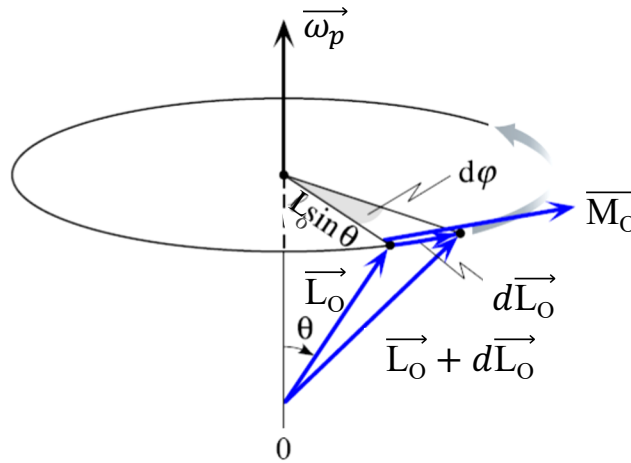
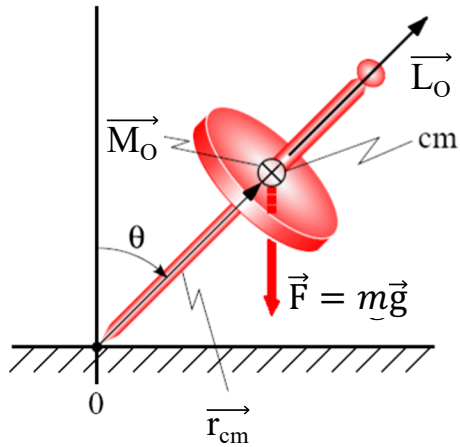


Le moment cinétique change de direction : il effectue un mouvement de précession autour de l'axe vertical passant par O

12.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

B) Analyse du mouvement



$$\tan d\varphi \approx d\varphi = \frac{dL_o}{L_o \sin \theta}$$

2) Calcul de la vitesse angulaire de précession ω_p

$$\vec{M}_o = \frac{d\vec{L}_o}{dt} \quad \vec{M}_o = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} \Rightarrow M_o = r_{cm} F \sin\theta = r_{cm} mg \sin\theta$$

$$\omega_p = \frac{d\varphi}{dt} = \frac{dL_o / L_o \sin\theta}{dt} = \frac{dL_o}{dt} \frac{1}{L_o \sin\theta} = \frac{M_o}{L_o \sin\theta}$$

$$= \frac{r_{cm} F \sin\theta}{L_o \sin\theta} = \frac{r_{cm} F}{I \omega_s} = \frac{r_{cm} mg}{I \omega_s}$$

Indépendant de θ !

12.5. Stabilité gyroscopique

■ Etude de la stabilité gyroscopique

C) Propriétés



Nous avons vu que l'axe de rotation du gyroscope présente un mouvement de précession avec une vitesse angulaire ω_p

Pour qu'un gyroscope soit utile, il faut que le mouvement de précession soit très lent, c'est à dire que ω_p soit très petit.

La vitesse angulaire de la précession est donnée par

$$\omega_p = \frac{r_{cm} m g}{I \omega_s}$$

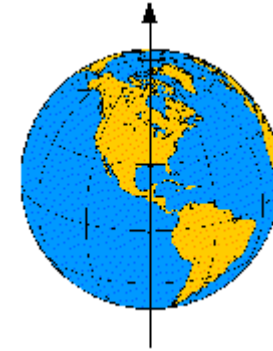
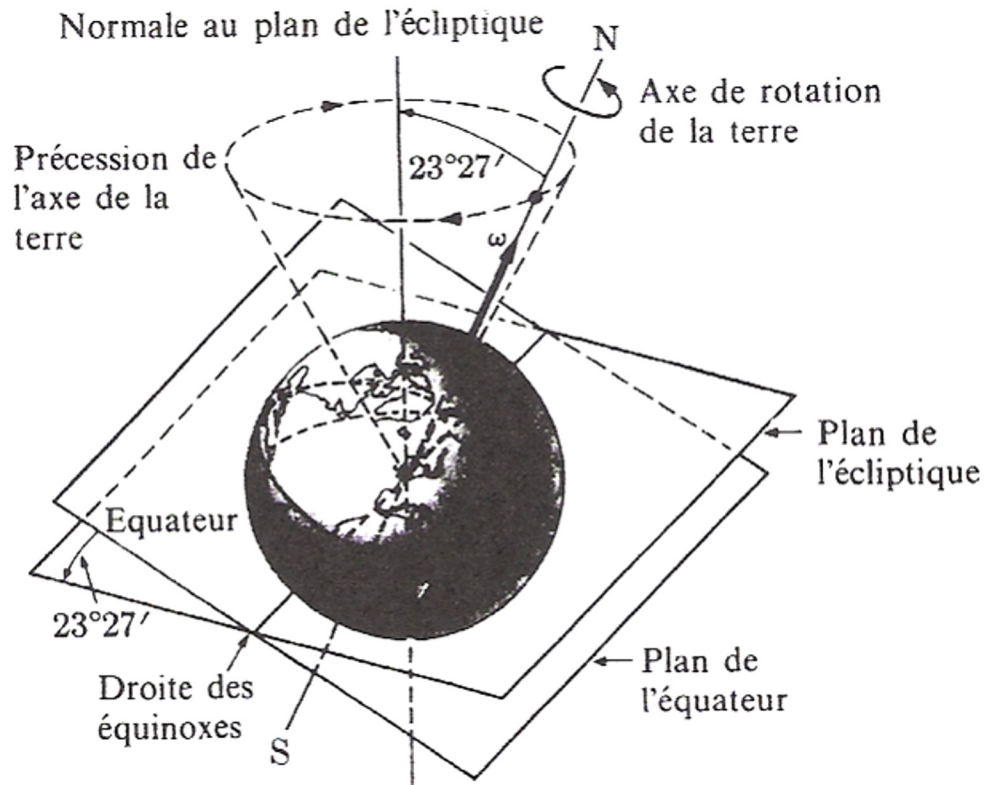
Pour avoir ω_p très petit, il faut

r_{cm}	<i>petit</i>
I	<i>grand</i>
ω_s	<i>très élevée</i>

*Compas gyroscopique dans les bateaux et avions:
 $\omega_s = 6.000$ à 24.000 tours/min et $\omega_p < 0.02^\circ/\text{jour}$*

12.5. Stabilité gyroscopique

■ Un «gyroscope» géant : la Terre



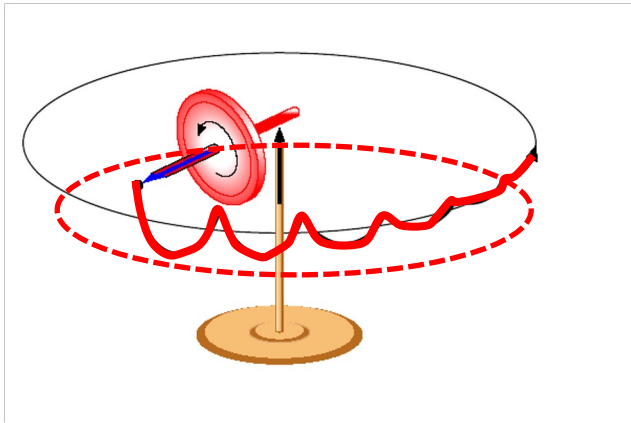
Période ($2\pi/\omega_p$): 25 770 années

La précession de la Terre (ou "précession des équinoxes") est semblable au phénomène observé pour le gyroscope. C'est un effet induit par les forces de gravitation du soleil et de la lune qui s'exercent sur la Terre.

12.5. Stabilité gyroscopique

■ Phénomène de nutation

Nous avons vu que lorsqu'on lâche un gyroscope dont l'axe de rotation repose sur un support, il se met à effectuer un mouvement de précession. Nous pouvons aussi observer de petites oscillations de l'extrémité de l'axe de rotation pendant le mouvement de précession. C'est le phénomène de nutation



à $t=0$ l'axe de rotation est maintenu à l'horizontale
 $\Rightarrow$ la projection de $\vec{L}$ sur Oz est nulle ($L_z = 0$)

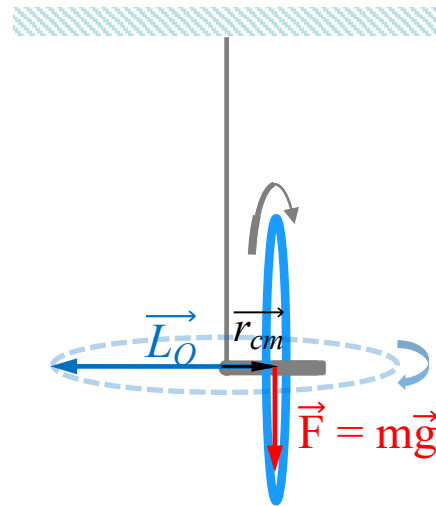
Quand on lâche la roue, l'axe s'incline vers le bas
sous l'effet du poids $\Rightarrow L_z < 0$

La conservation du moment cinétique impose une
composante verticale $L_p > 0$ telle que $L_z + L_p = 0$

$\Rightarrow$ Oscillation de l'axe autour de l'inclinaison initiale : c'est la nutation

12.5. Stabilité gyroscopique

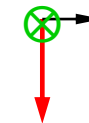
■ Exemple 1 : roue de vélo attachée à un fil



Le poids crée un moment de force sur l'axe de rotation. On définit r_{cm} entre le point d'attache et le centre de masse de la roue (qui est sur l'axe de rotation).

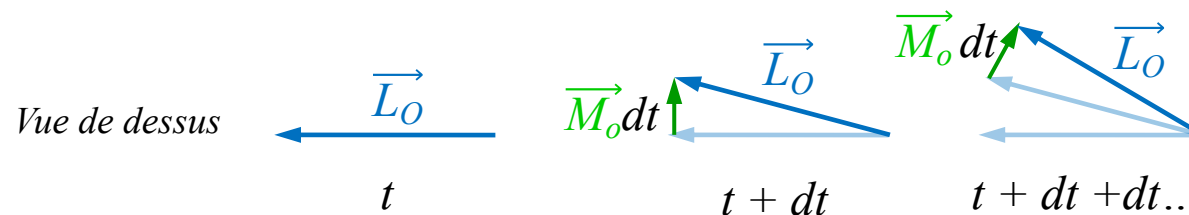
On peut appliquer le théorème du moment cinétique (on doit faire attention au sens de rotation de la roue pour bien orienter $\vec{L}_O$) :

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{r}_{cm} \times \vec{F} = \vec{M}_O$$



Le moment cinétique varie comme le moment de force.

A l'instant t , nous avons le moment cinétique $\vec{L}_O$. A l'instant $t + dt$, nous avons $\vec{L}_O + d\vec{L}_O$ avec $d\vec{L}_O = \vec{M}_O dt$. Le moment cinétique change donc de direction:



Le moment cinétique tourne. Comme $\vec{L}$ est selon l'axe de rotation de la roue, la roue tourne également.

12.5. Stabilité gyroscopique

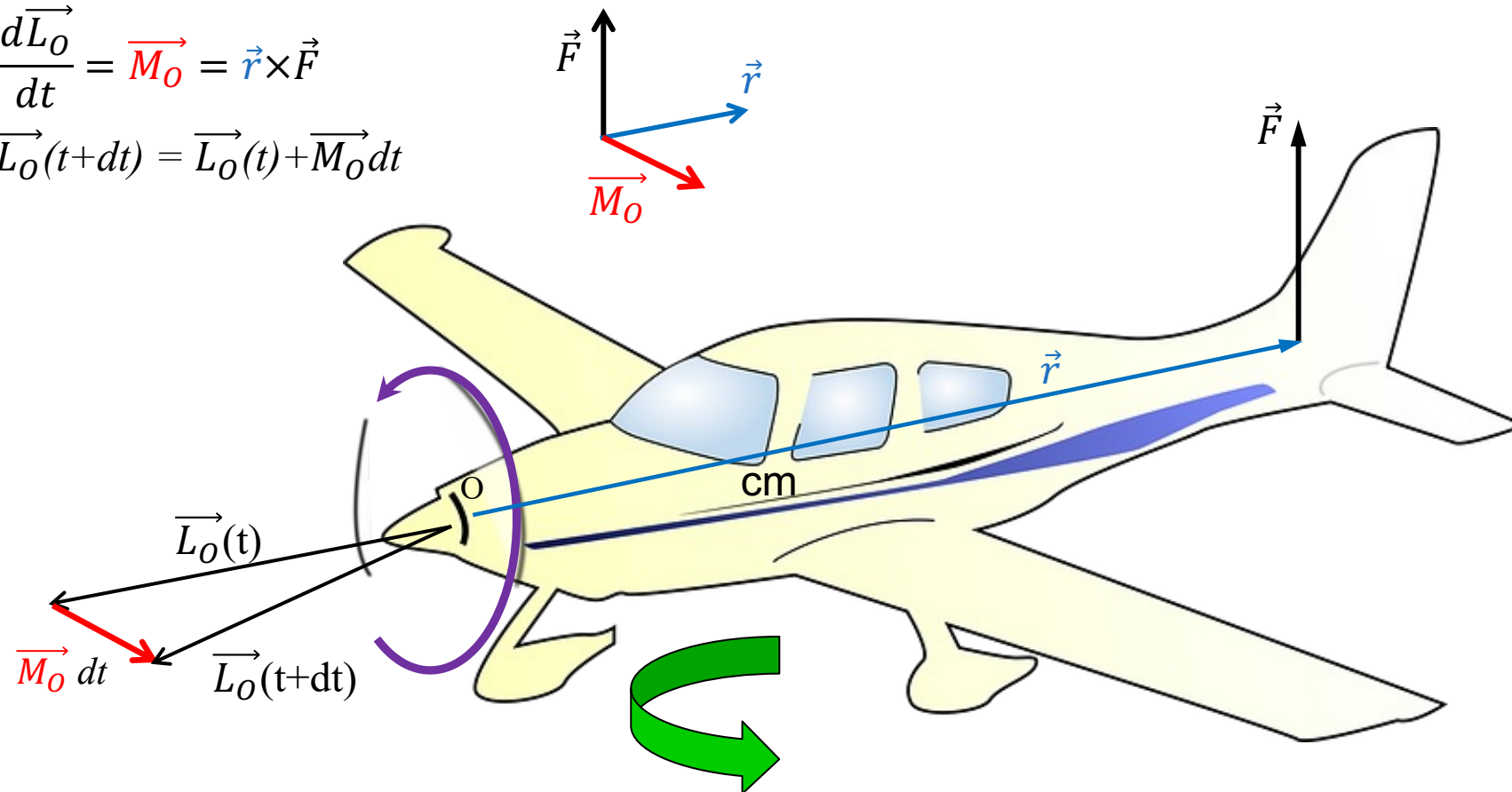
■ Exemple 2 : l'avion à hélice

Un avion à hélice que le pilote fait descendre. Vue du pilote, l'hélice tourne dans le sens des aiguilles d'une montre (sens direct)

Observation : l'avion vire à gauche lorsque l'on veut descendre

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}$$

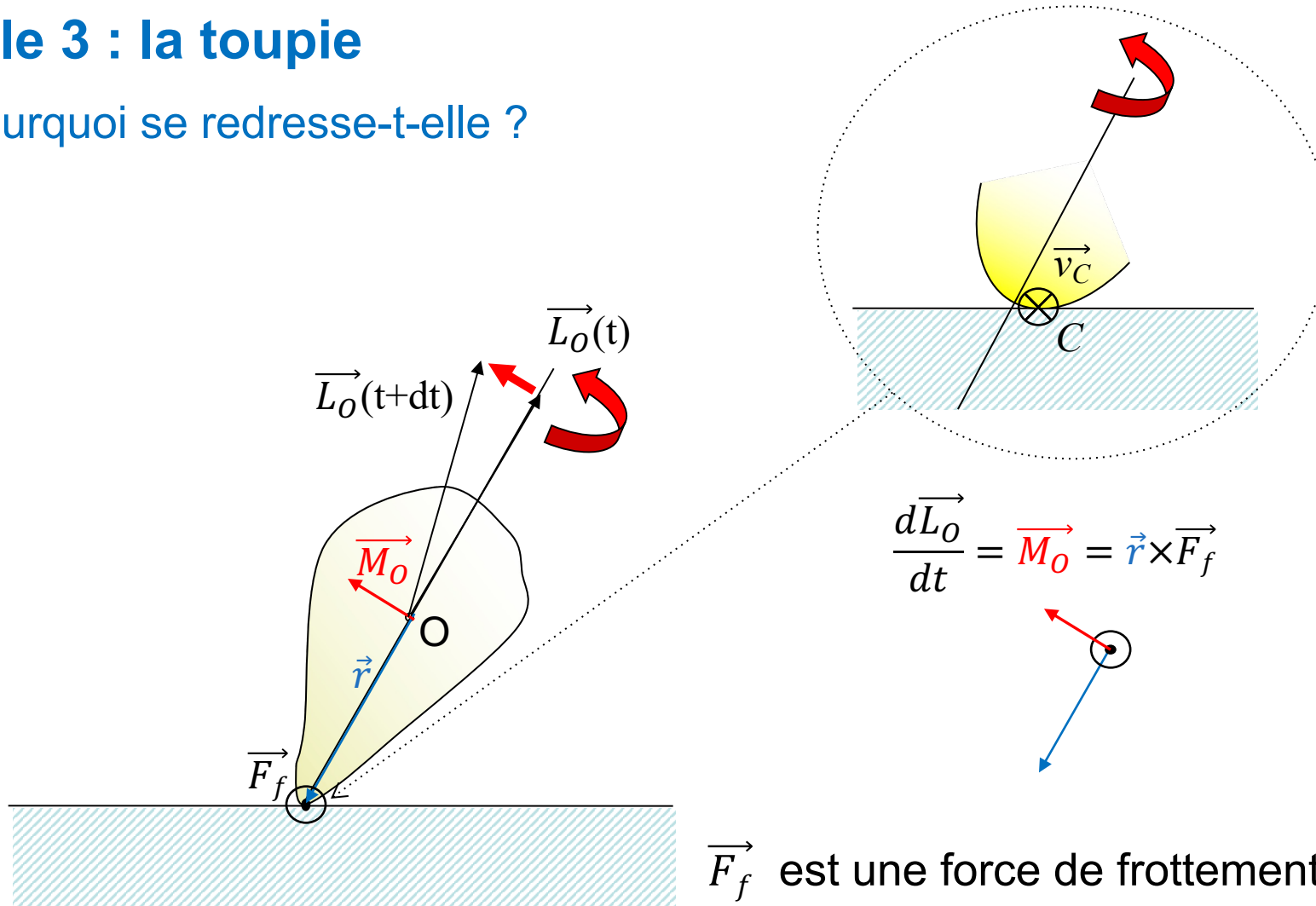
$$\vec{L}_O(t+dt) = \vec{L}_O(t) + \vec{M}_O dt$$



12.5. Stabilité gyroscopique

■ Exemple 3 : la toupie

Pourquoi se redresse-t-elle ?



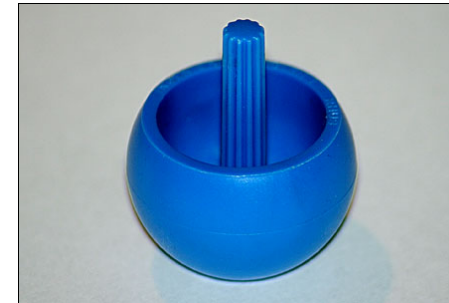
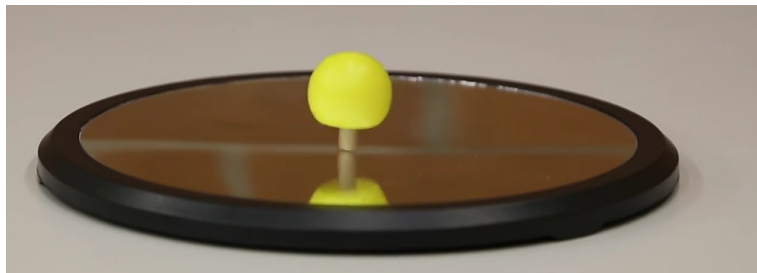
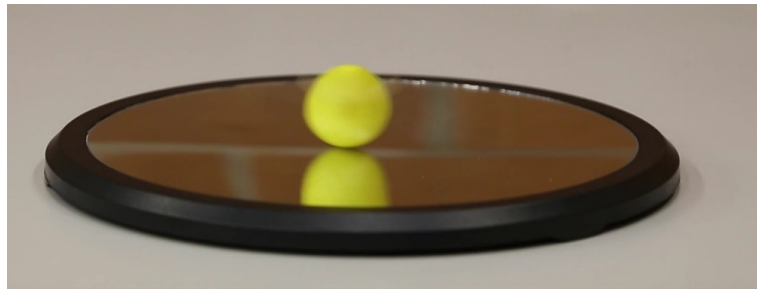
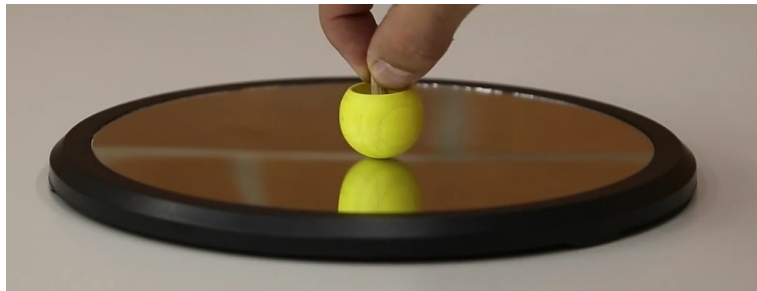
$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O = \vec{r} \times \vec{F}_f$$

$\vec{F}_f$ est une force de frottement au point de contact C qui s'oppose à la rotation et qui crée un moment responsable du redressement de la toupie

12.5. Exemples

■ Exemple 4 : La toupie « inversée »

La répartition des masses, la rotation, et les forces de frottements peuvent entraîner des phénomènes étonnants



Les Prix Nobel Wolfgang Pauli and Niels Bohr jouant avec une de ces toupies lors de l'ouverture du nouvel Institut de Physique de Lund en Suède le 31 mai 1951

Credit: Erik Gustafson, courtoisie de AIP Emilio Segre Visual Archives, Margrethe Bohr Collection <http://photos.aip.org>