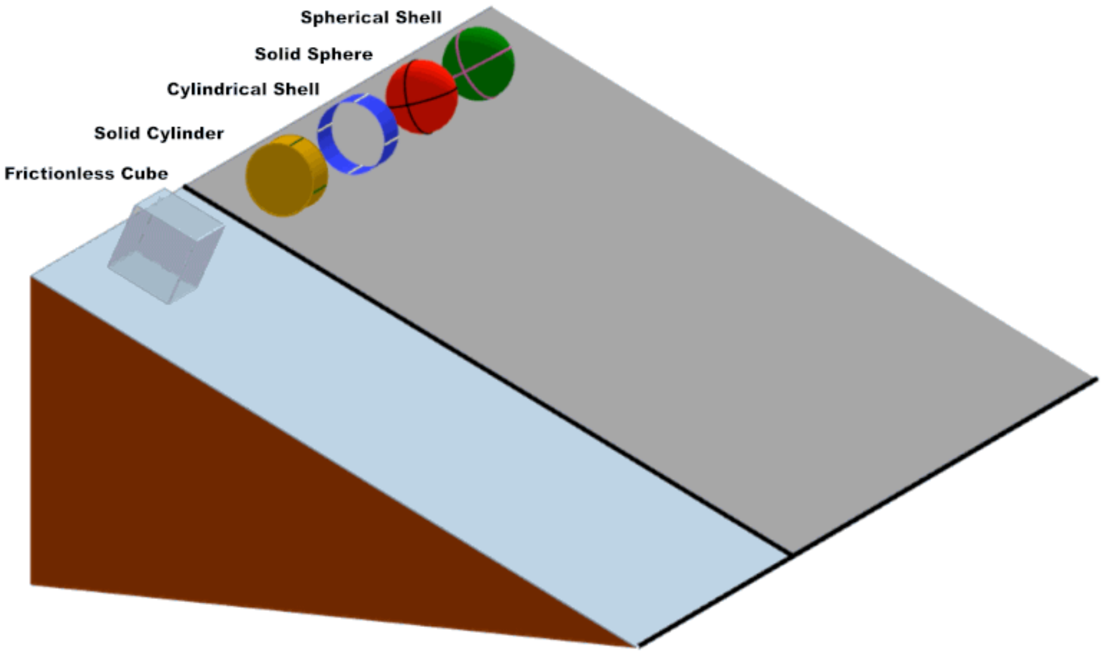
Week 11 - Part 1

11. La dynamique du solide indéformable

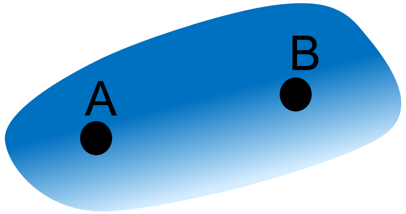
11.1. Le centre de masse



11. La dynamique du solide indéformable

Introduction

Solide indéformable : la distance entre deux points du solide (A et B par exemple) est constante au cours du temps, et ce quelque soit le mouvement de ce dernier.



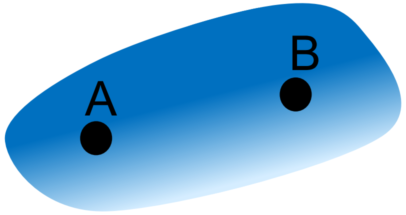
Pour traiter le mouvement du **solide indéformable** nous utilisons le principe de superposition :

- Le **solide comme un ensemble de points massifs** représentés par des éléments de volume dV_i de masse: $dm_i = \rho_i dV_i$ (ρ_i *étant la* masse volumique)

- Chacun de ces points est repéré par le vecteur position $\vec{r}_i$ et **les lois du mouvement du point matériel s'appliquent en chacun de ces points**

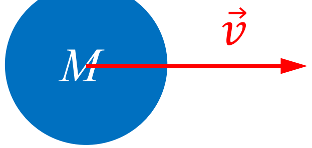
- *le mouvement du solide est le résultat du mouvement de tous les points qui le constituent*

■ Introduction



Solide indéformable : la distance entre deux points du solide (A et B par exemple) est constante au cours du temps, et ce quelque soit le mouvement de ce dernier.

Exemple 1: cas d'une sphère de masse M (de masse volumique homogène ρ) se déplaçant à la vitesse v (sans tourner sur elle-même)

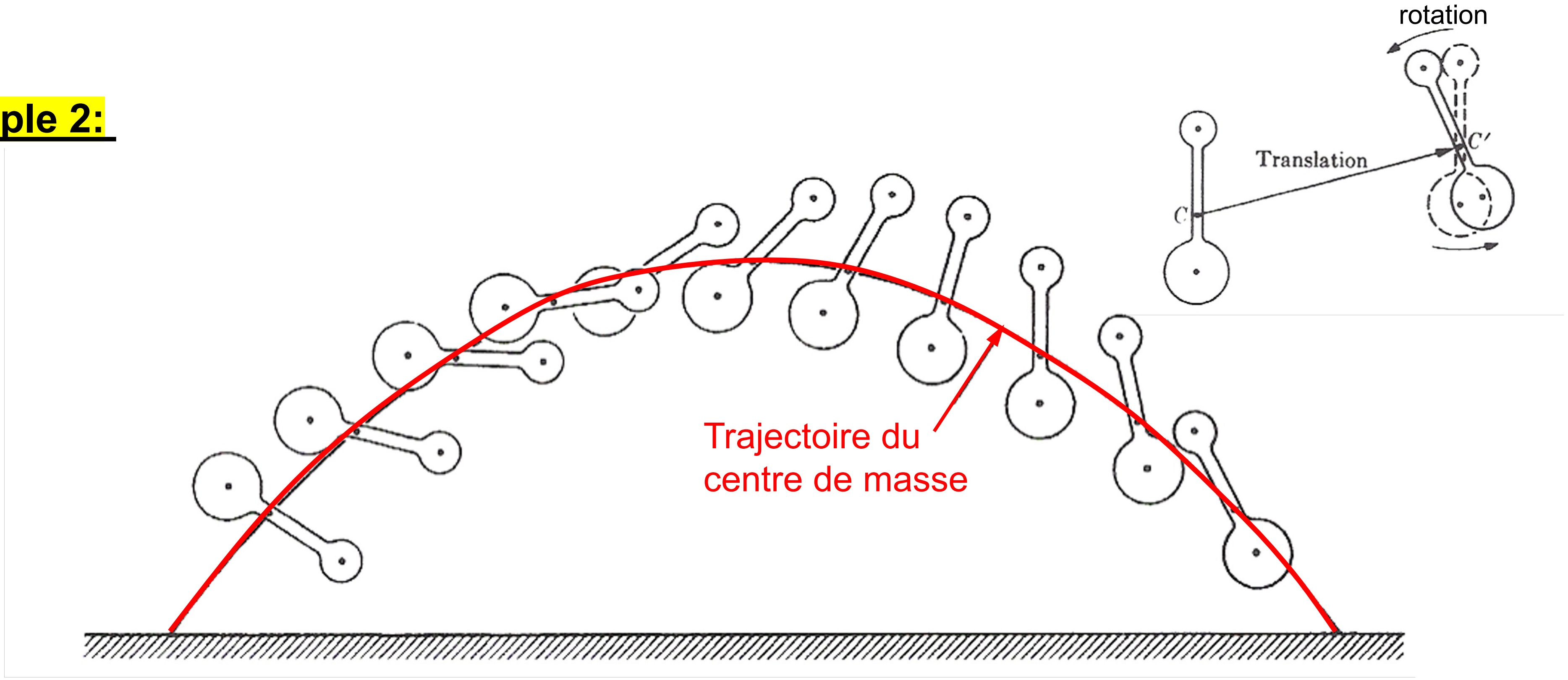


$$E_c = \sum_i \frac{1}{2} dm_i v^2 = \frac{1}{2} v^2 \sum_i dm_i = \frac{1}{2} M v^2$$

11. La dynamique du solide indéformable

■ Introduction

Exemple 2:



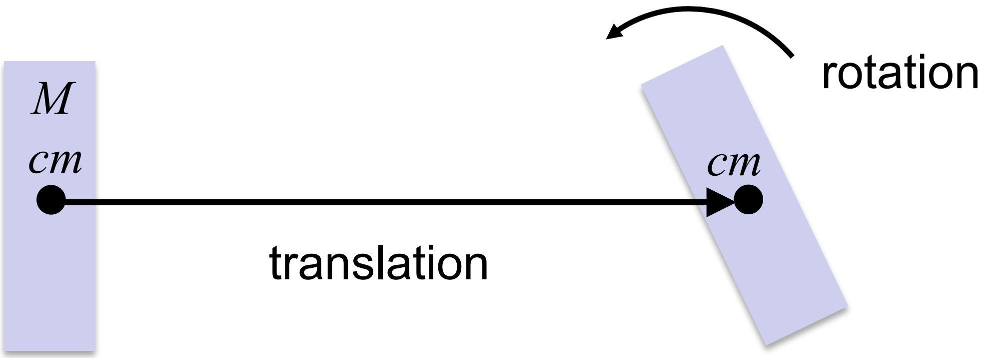
Le mouvement de translation d'un solide est décrit par les lois de Newton appliquées au centre de masse

11. La dynamique du solide indéformable

■ Introduction

Mouvement d'un corps solide:

combinaison d'un mouvement de **translation et d'une rotation autour d'un axe**



*Translation du **centre de masse** et rotation du solide autour d'un **axe** passant par le centre de masse*

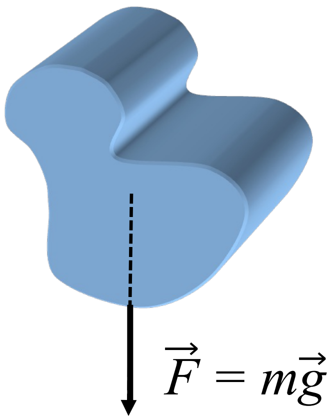
Mouvement du centre de masse (*cm*) est décrit par

$$\boxed{M\frac{dv_{cm}}{dt} = \sum F_{ext}}$$

Le mouvement de translation d'un solide est décrit parfaitement si on assimile ce dernier à un point matériel (le centre de masse) et si on lui applique les lois de la mécanique définies précédemment

11.1. Le centre de masse

■ Centre de masse d'un objet quelconque



Soit un solide de masse m soumis au champ de pesanteur de telle sorte qu'il subit une force $\vec{F} = m\vec{g}$

Ce solide peut être décomposé en petits volumes élémentaires de masse m_i, eux-mêmes soumis à une force de gravité $\vec{f_i} = m_i\,\vec{g}$

Nous avons alors $\vec{F} = \sum_i \vec{f}_i = \sum_i m_i\,\vec{g} = m\vec{g}$

Point d'application précis pour cette force, que l'on appelle le **centre de gravité**, dont la position est définie par:

$$\overrightarrow{r_{cg}} = \frac{\sum_i \vec{r_i} m_i g_i}{\sum_i m_i g_i}$$

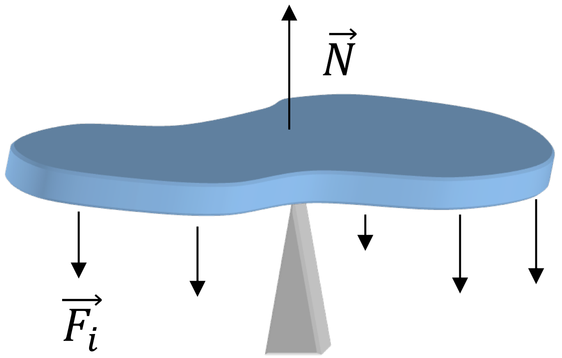
Si $g_i = cte$ alors le **centre de gravité** est aussi **le centre de masse**

Centre de masse

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \vec{r_i}}{m} \quad \text{avec} \quad x_{cm} = \frac{\sum_i m_i x_i}{m}, \quad y_{cm} = \frac{\sum_i m_i y_i}{m}, \quad z_{cm} = \frac{\sum_i m_i z_i}{m}$$

11.1. Le centre de masse

Détermination du centre de masse d'un objet 2D



On recherche la **position d'équilibre** définie par **2 conditions** :

1) $\sum_i F_{ext_i} = 0$ translation

2) $\sum_i M_{cm_i} = 0$ rotation

1) 2ieme loi de Newton $\Sigma \vec{F_i} + \vec{N} = 0 \Rightarrow \Sigma m_i\vec{g} = - \vec{N}$

2a) **Considérons un système avec 2 masses distribuées de part et d'autre d'une tige sans masse.**
Nous avons équilibre si $\overrightarrow{r_{cm_A}} \times m_A\vec{g} + \times \overrightarrow{r_{cm_B}} \times m_B\vec{g} = \vec{0}$. *(Moment des forces nul)*

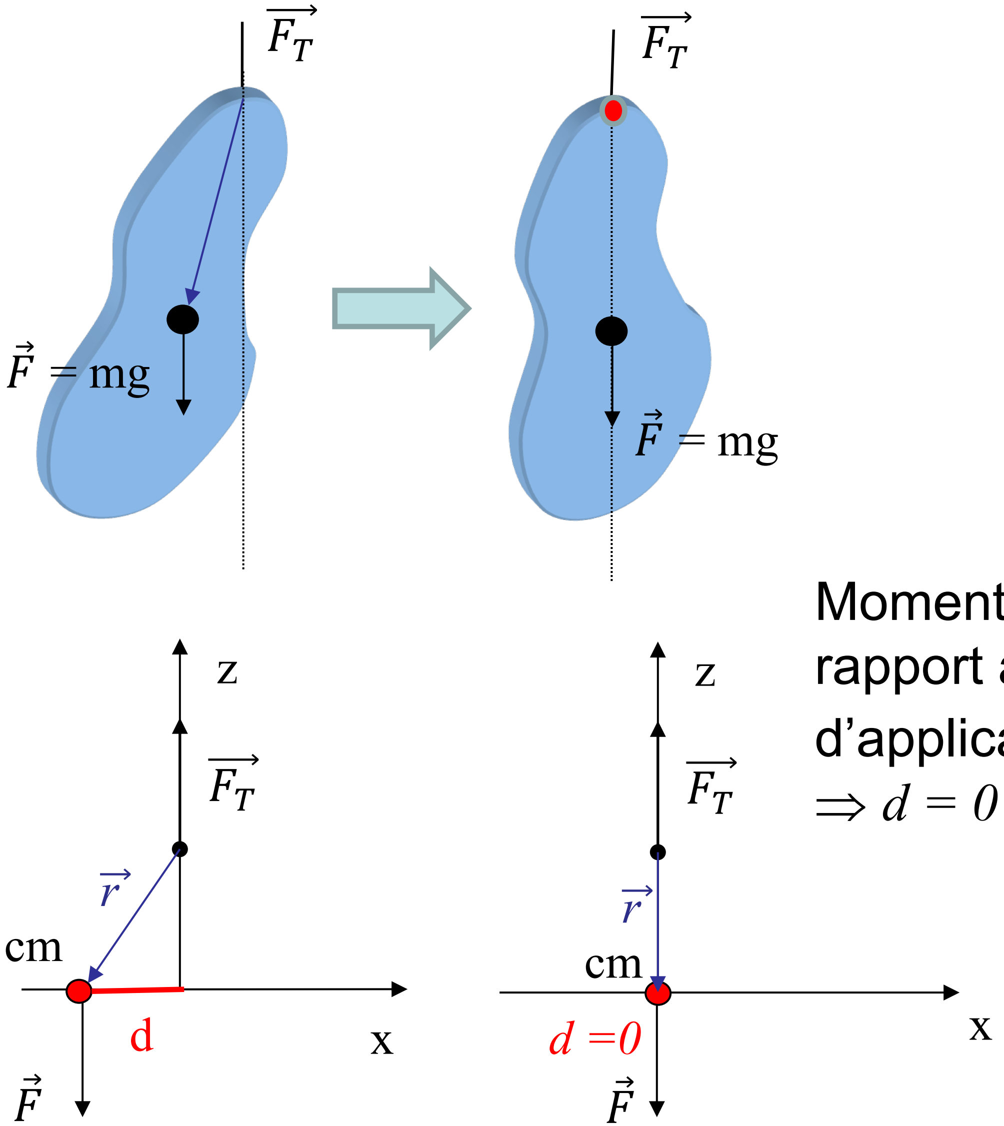
2b) En généralisant $\Sigma(\overrightarrow{r_{cm_i}} \times m_i\vec{g}) = \Sigma((\vec{r_i} - \overrightarrow{r_{cm}}) \times m_i\vec{g}) = \Sigma(\vec{r_i} \times m_i\vec{g}) - \Sigma(\overrightarrow{r_{cm}} \times m_i\vec{g})$

$$= \Sigma(\vec{r_i} \times m_i\vec{g}) - \overrightarrow{r_{cm}} \times m\vec{g} = \vec{0}$$

Finalement on peut en déduire $\boxed{\overrightarrow{r_{cm}} = \Sigma \frac{m_i\vec{r_i}}{m}}$

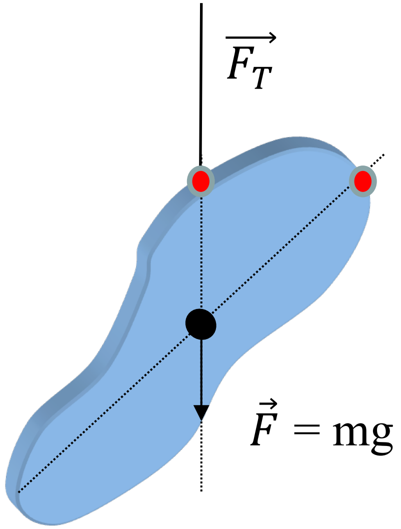
11.1. Le centre de masse

■ Détermination du centre de masse d'un objet 2D (autre approche)



Moment du poids par rapport au point d'application $\vec{r} \times \vec{F} = \vec{0}$
$\Rightarrow d = 0$

Si l'on suspend **un objet tenu à deux endroits différents**, alors les deux axes verticaux passent par le *cm*

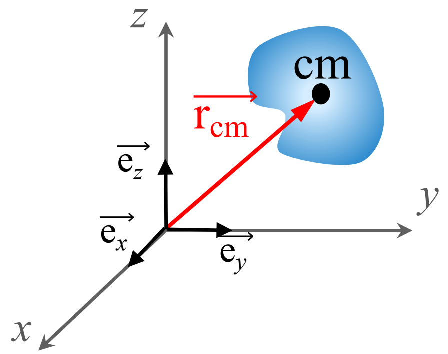


11.1. Le centre de masse

Définition générale :

$$\boxed{\mathbf{r}_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \mathbf{r}\,\rho(\mathbf{r})\,dV}$$

$\overrightarrow{\mathrm{r}_{\mathrm{cm}}}$ est le vecteur position du centre de masse



Notation: $\int_V$ intégrale sur le volume. Equivalent à $\iiint$

Remarque: on calcule l'intégrale de volume en intégrant suivant x, y, z pour les coordonnées cartésiennes, et suivant r, θ, φ pour les coordonnées sphériques

Coordonnées du centre de masse (on projette $\overrightarrow{\mathrm{r}_{\mathrm{cm}}}$ dans le repère $\overrightarrow{\mathrm{e}_x}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_y}\,\overrightarrow{\mathrm{e}_z}$):

$$\overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_x} = x_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_x}\,\rho dV$$

$$\overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_y} = y_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_y}\,\rho dV$$

$$\overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_z} = z_{cm} = \frac{1}{M}\int_V \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_z}\,\rho dV$$

$$\Rightarrow$$

$$\boxed{\begin{aligned} x_{cm} &= \frac{1}{M}\int_V x\rho(x,y,z)dV \\ y_{cm} &= \frac{1}{M}\int_V y\rho(x,y,z)dV \\ z_{cm} &= \frac{1}{M}\int_V z\rho(x,y,z)dV \end{aligned}}$$

Expression générale, valable pour un solide non-homogène, c'est-à-dire quand la masse volumique varie à l'intérieur du solide

11.1. Le centre de masse

■ Calcul du centre de masse d'un solide homogène. $\rho = cte$

Vecteur position du centre de masse :

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\,dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$$

solide homogène, équivalent à $\rho = cte = \frac{M}{V}$

Comment calculer $\overrightarrow{r_{cm}}$?

1. On détermine d'abord le volume avec $V = \int_V dV$
2. On calcule ensuite le centre de masse avec $\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\,dV$

puis on projette $\vec{r}$ sur les axes Ox, Oy, Oz

$$\begin{cases} \overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_x} = x_{cm} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_x}\,dV = \frac{1}{V}\int_V x.dV \\ \overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_y} = y_{cm} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_y}\,dV = \frac{1}{V}\int_V y.dV \\ \overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_z} = z_{cm} = \frac{1}{V}\int_V \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_z}\,dV = \frac{1}{V}\int_V z.dV \end{cases}$$

11.1. Le centre de masse

Calcul du centre de masse

- Position centre de masse pour un objet volumique (3D):

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\rho}{M}\int_V \vec{r}\, dV = \frac{1}{V}\int_V \vec{r}\, dV$$

(masse volumique $\rho = cte$, $M = \rho V$)

- Position centre de masse pour un objet surfacique (2D) :

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\rho}{M}\int_S \vec{r}\, dS = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\, dS$$

(masse surfacique $\rho = cte$, $M = \rho S$)

- Position centre de masse pour un objet linéique (1D) :

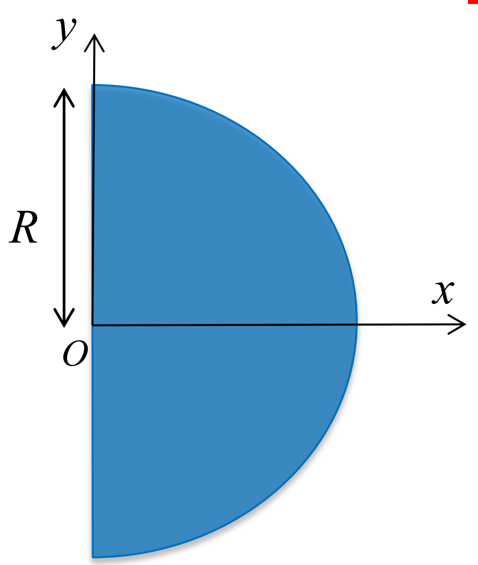
$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\rho}{M}\int_L \vec{r}\, dL = \frac{1}{L}\int_L \vec{r}\, dL$$

(masse linéique $\rho = cte$, $M = \rho L$)

11.1. Le centre de masse

■ Exemple : calcul du centre de masse

Centre de masse d'un demi-disque sans épaisseur (objet 2D) et de masse surfacique constante



■ On regarde d'abord les éléments de symétrie

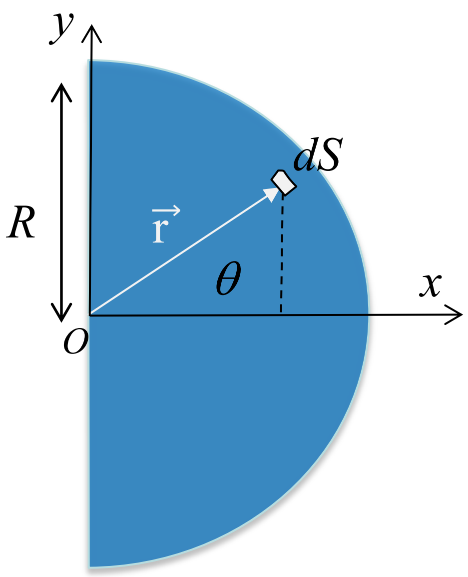
Le cm se trouve sur l'axe Ox ⇨ $r_{cm} = (x_{cm}, 0)$

$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\rho}{M}\int_S \vec{r}\, dS = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\, dS$$

- On commence par calculer la surface d'un demi-disque

11.1. Le centre de masse

■ Exemple : calcul du centre de masse



$$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{1}{S}\int_S \vec{r}\,dS$$

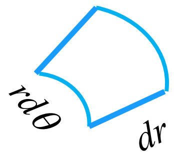
L'axe de symétrie est Ox. Le cm se trouve sur cet axe ⇨ $r_{cm} = (x_{cm}, 0)$

On projette sur Ox :

$$\overrightarrow{r_{cm}} \cdot \overrightarrow{e_x} = \frac{1}{S}\int_S \vec{r} \cdot \overrightarrow{e_x}\,dS \Rightarrow x_{cm} = \frac{1}{S}\int_S r\cos\theta\,dS$$

- Élément de surface élémentaire

$dS = r\,d\theta\,dr$



$$\begin{cases} S = \dfrac{1}{2}\pi R^2 \\ dS = r d\theta dr \end{cases}$$

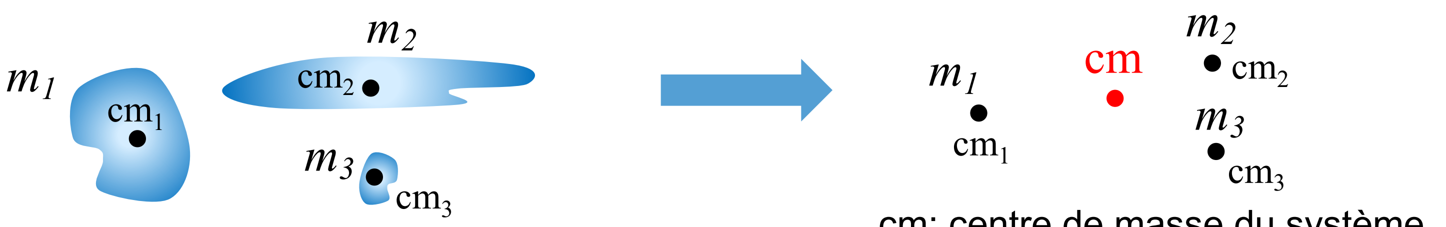
$$x_{cm} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \int_{-\pi/2}^{\pi/2} r^2 \cos\theta\,d\theta dr$$

$$x_{cm} = \frac{2}{\pi R^2}\left[\frac{r^3}{3}\right]_0^R [\sin\theta]_{-\pi/2}^{\pi/2} = \frac{2}{\pi R^2}\frac{R^3}{3}2 = \frac{4}{3\pi}R$$

11.1. Le centre de masse (cm)

■ Composition des centres de masses

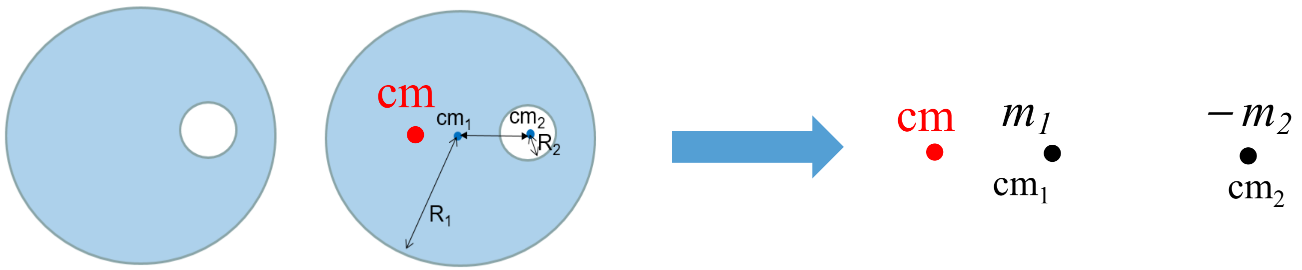
Le centre de masse d'un système composé de plusieurs objets se détermine en considérant chaque objet comme un point matériel, dont la masse est celle de l'objet et ses coordonnées celles de son centre de masse. On calcule alors le centre de masse du système composé par l'ensemble des points matériels associés à chaque objet.



cm: centre de masse du système

Exemple d'une roue trouée

Une roue trouée peut être vue comme la composition d'une roue pleine de rayon R_1 et d'une roue "vide" de rayon R_2. Pour calculer le centre de masse de cette roue trouée, on applique le principe de composition des centres de masses en prenant une masse "négative" pour la roue "vide".

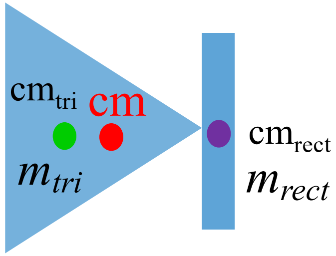


11.1. Le centre de masse (cm)

Composition des centres de masses - démonstration

Définition du centre de masse: $$\overrightarrow{r_{cm}} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{r_i}}{\sum_i m_i} = \frac{\sum_i m_i \overrightarrow{r_i}}{m}$$

Exemple 1 : système (triangle+rectangle)

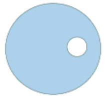


$$\overrightarrow{r_{cm,sys}} = \frac{\sum_{i,sys} m_{i,sys} \overrightarrow{r_{i,sys}}}{M} = \frac{1}{M}\left[\sum_{i,tri} m_{i,tri}\overrightarrow{r_{i,tri}} + \sum_{i,rect} m_{i,rect}\overrightarrow{r_{i,rect}}\right] = \frac{1}{M}\left[m_{tri}\overrightarrow{r_{cm,tri}} + m_{rect}\overrightarrow{r_{cm,rect}}\right]$$

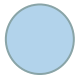
cm

$M = m_{tri} + m_{rect}$

m_{tri} cm$_{tri}$ m_{rect} cm$_{rect}$

Exemple 2 :  roue trouée

$$\overrightarrow{r_{cm,roue}} = \frac{\sum_{i,roue} m_{i,roue}\overrightarrow{r_{i,roue}}}{M} = \frac{1}{M}\left[\sum_{i,roue\ trouée} m_{i,roue\ trouée}\overrightarrow{r_{i,roue\ trouée}} + \sum_{i,disque} m_{i,disque}\overrightarrow{r_{i,disque}}\right] = \frac{1}{M}\left[m_{roue\ trouée}\overrightarrow{r_{cm,roue\ trouée}} + m_{disque}\overrightarrow{r_{cm,disque}}\right]$$

On en déduit le centre de masse de la roue trouée: $m_{roue\ trouée}\ \overrightarrow{r_{cm,roue\ trouée}} = M\ \overrightarrow{r_{cm,roue}} - m_{disque}\ \overrightarrow{r_{cm,disque}}$

Week 11 – Part 2

11. La dynamique du solide indéformable

11.2. Mouvement du solide indéformable

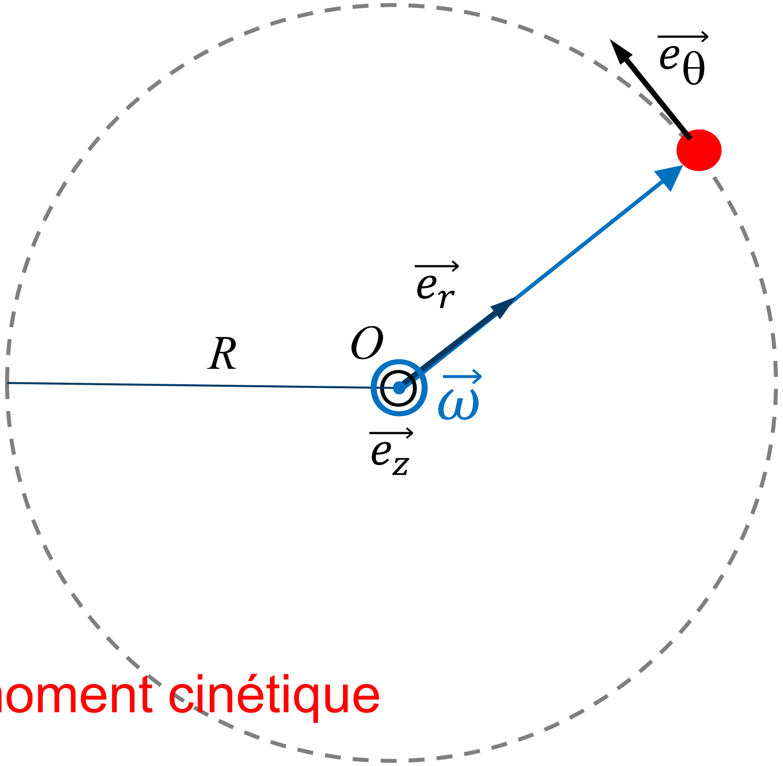
11.3. Moment cinétique et moment d’inertie

11.4. Calcul de moment d’inertie composé

11.5. Théorème de Steiner

11.2. Mouvement du solide indéformable

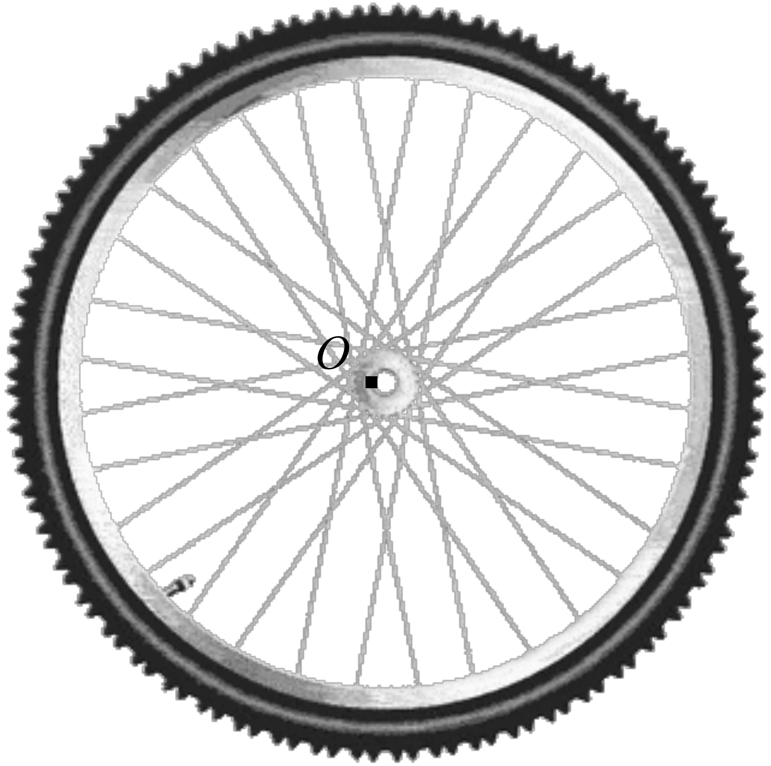
Moment cinétique point matériel



$\vec{L}_O$: moment cinétique

$$\vec{L}_O = \vec{r} \times \vec{p} = R\overrightarrow{e_r} \times m\vec{v}$$
$$= R\overrightarrow{e_r} \times m\, R\omega\, \vec{e}_\theta = \underbrace{m\, R^2}_{I\text{ : moment d'inertie}}\vec{\omega} = I\, \vec{\omega}$$

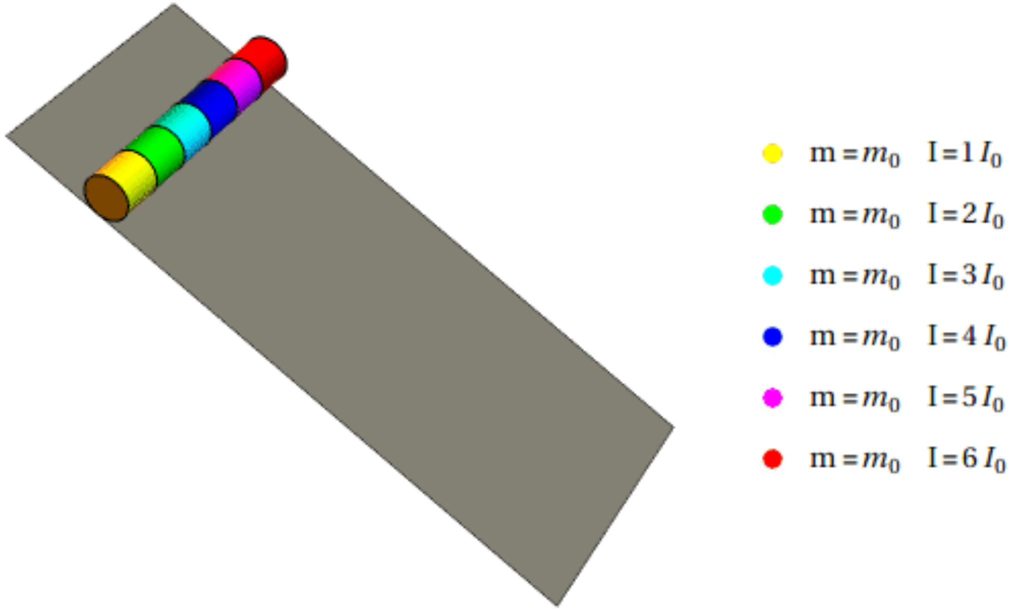
Moment cinétique pour un solide



$$\overrightarrow{L_O} = I\, \vec{\omega}$$

11.2. Mouvement du solide indéformable

Mouvement de rotation et moment d'inertie



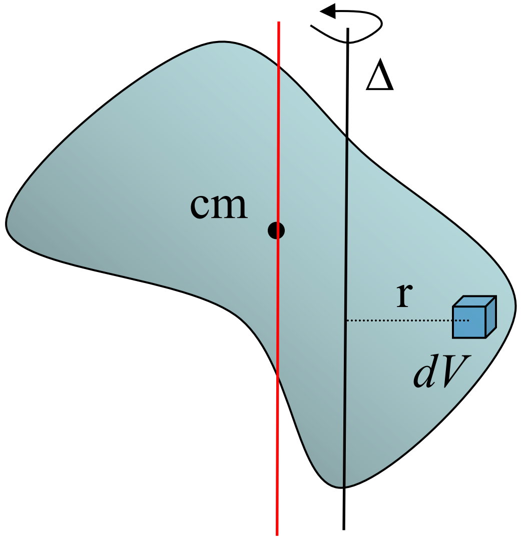
$$\overrightarrow{L_O} = I\,\vec{\omega}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = I\,\frac{d\vec{\omega}}{dt} \quad \text{avec} \quad \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\,(F_{ext,i}) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{d\vec{\omega}}{dt} = \frac{\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_O}\,(F_{ext,i})}{I}}$$

Théorème du moment cinétique

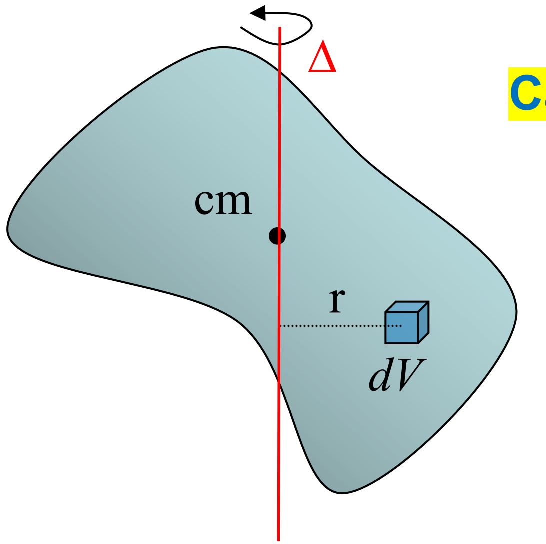
11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Mouvement de rotation autour d'un axe quelconque



Solide indéformable : chaque élément de volume élémentaire est en rotation autour de l'axe Δ à une distance constante r

Cas général : la rotation a lieu autour d'un axe Δ qui ne passe pas par le centre de masse

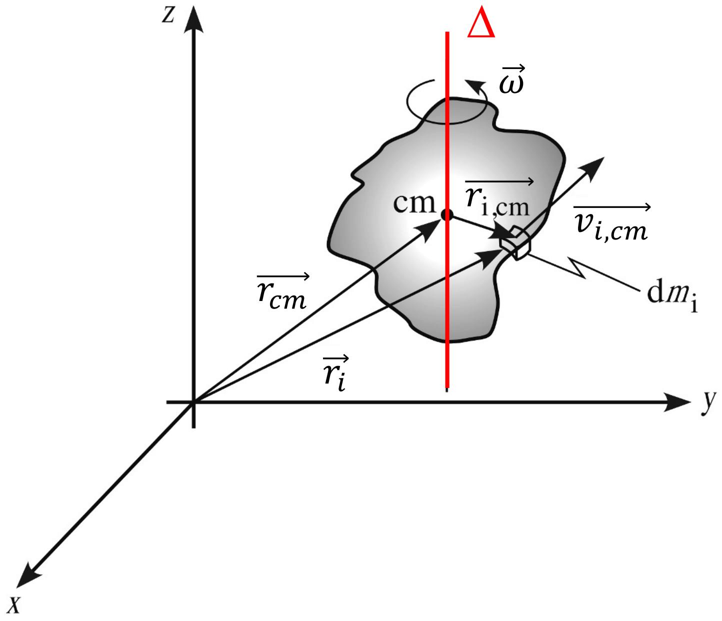


Cas particulier : rotation du solide autour d'un axe passant par le centre de masse

⇨ c'est le cas que nous allons étudier

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

Soit un solide indéformable quelconque avec un mouvement de translation et de rotation autour d'un axe passant par son centre de masse



La vitesse d'un point i par rapport au cm est

$$\overrightarrow{v_{i,cm}} = \vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{i,cm}}$$

et par rapport à l'origine du système de coordonnées:

Type equation here.

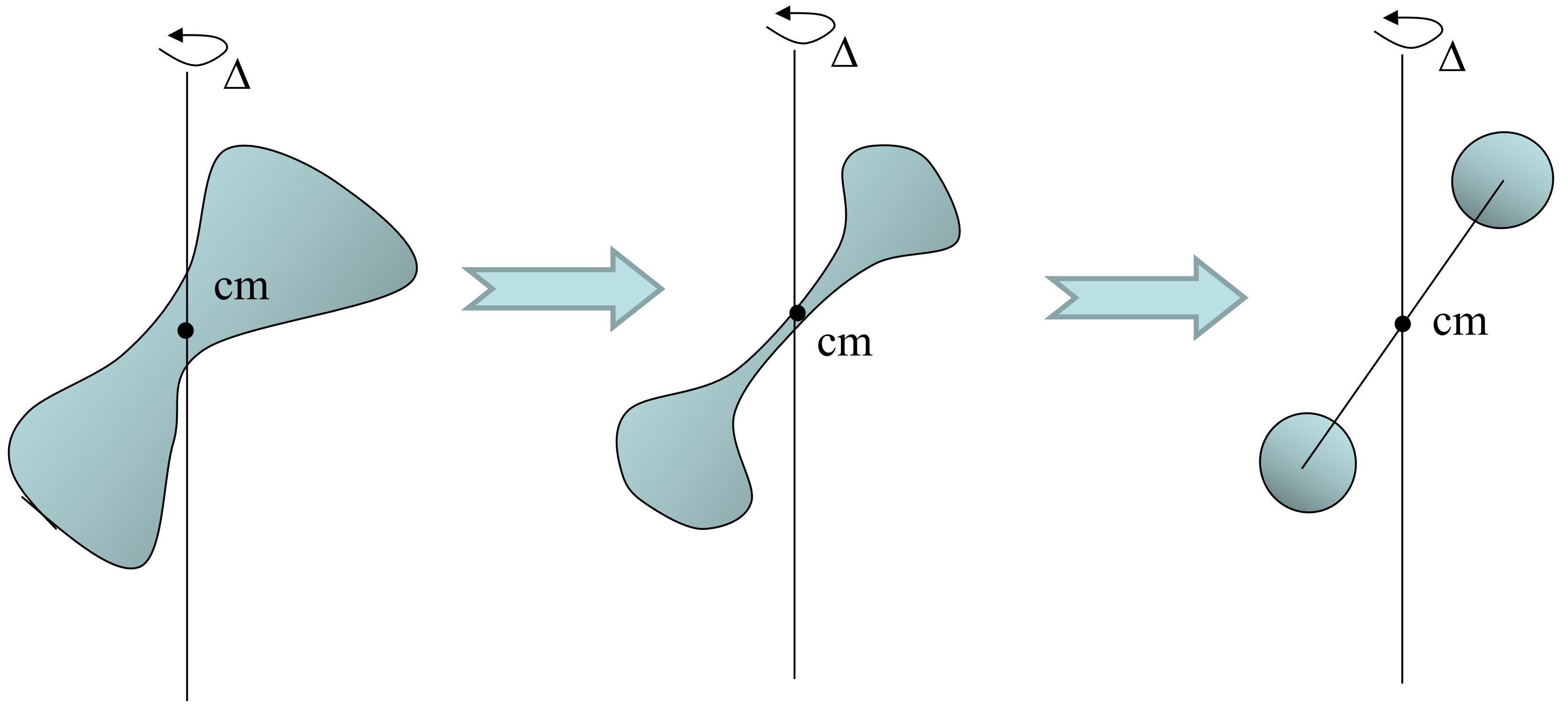
$$\vec{v_i} = \underbrace{\overrightarrow{v_{cm}}}_{\text{Translation}} + \underbrace{(\vec{\omega} \times \overrightarrow{r_{i,cm}})}_{\text{Rotation}}$$

Nous nous focaliserons dans la suite uniquement sur la partie « rotation » du mouvement (la vitesse du centre de masse est nulle)

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Mouvement de rotation autour d'un axe passant par le cm

Modélisation : pour simplifier le problème nous pouvons schématiquement considérer l'objet comme étant composé de deux points matériels de même masse (haltère incliné) distribués de part et d'autre de l'axe de rotation.

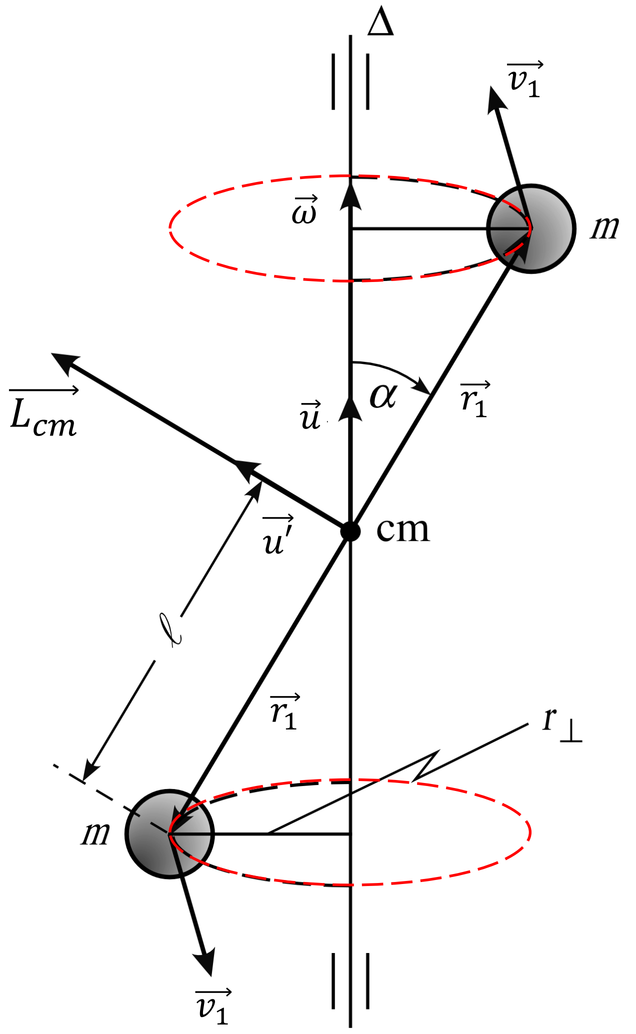


Solide réel

modèle : haltère incliné

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ <u>Cas particulier</u> : moment cinétique pour un haltère en position oblique



Nous considérons la rotation d'un haltère incliné d'un angle α par rapport à l'axe de rotation Δ qui passe par le cm.

Le moment cinétique total est

$$\overrightarrow{L_{cm}} = \vec{r_1} \times m\vec{v_1} + \vec{r_2} \times m\vec{v_2}$$

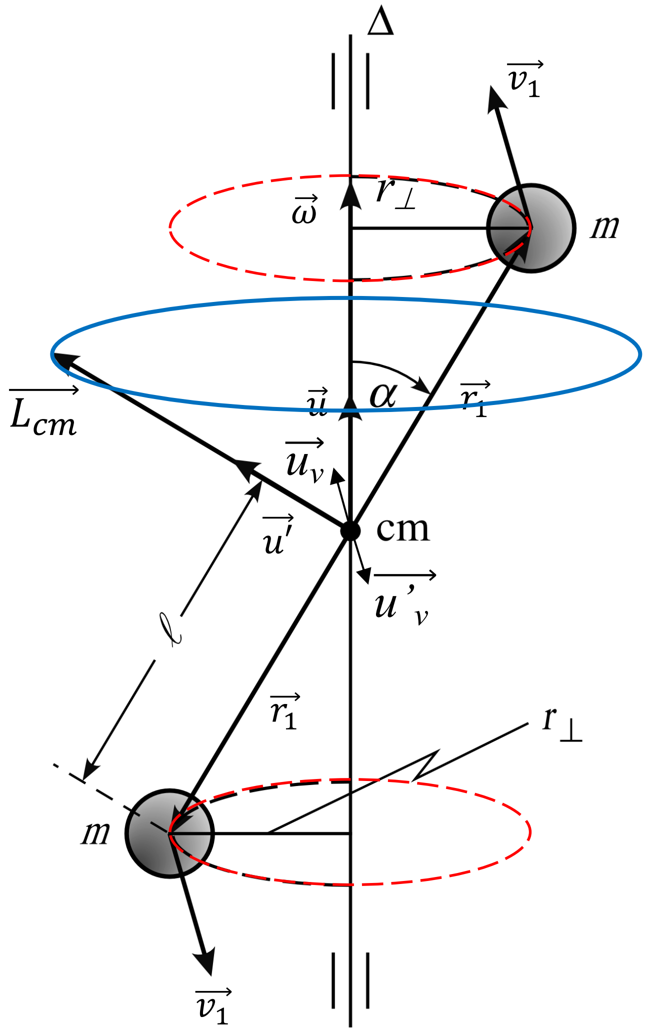
On remarque que dans ce cas le **moment cinétique** $\overrightarrow{\mathrm{L}_{\mathrm{cm}}}$ n'est pas colinéaire à $\vec{\omega}$.

$$\vec{v_1} = ?$$

$$\vec{v_1} = \vec{\omega} \times \vec{r_1}$$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Cas particulier : moment cinétique pour un haltère en position oblique



Moment cinétique par rapport au cm :

$$\overrightarrow{L_{cm}} = \vec{r_1} \times m\vec{v_1} + \vec{r_2} \times m\vec{v_2}$$
$$= \vec{r_1} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r_1}) +$$
$$+ \vec{r_2} \times m(\vec{\omega} \times \vec{r_2})$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r_1} = \omega\, l \sin\alpha\, \vec{u_v} \quad avec \;\; \sin\alpha = r_\perp / l \quad d'où\; \vec{\omega} \times \vec{r_1} = \omega\, r_\perp\, \vec{u_v}$$

$$\vec{r_1} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_1}) = \vec{r_1} \times \omega\, r_\perp\, \vec{u_v} = l\omega\, r_\perp\, \vec{u'}$$

$$\vec{\omega} \times \vec{r_2} = \omega\, l \sin(\pi\text{-}\alpha)\, \vec{u'_v} = \text{-}\omega\, l \sin(\pi\text{-}\alpha)\, \vec{u_v} = \text{-}\; \omega\, r_\perp\, \vec{u_v}$$
$$\vec{r_2} \times (\vec{\omega} \times \vec{r_2}) = \text{-}\; \vec{r_2} \times \omega\, r_\perp\, \vec{u_v} = l\omega\, r_\perp\, \vec{u'}$$

Finalement : $\boxed{\overrightarrow{L_{cm}} = 2\, m\, l\, \omega\, r_\perp\, \vec{u'}}$

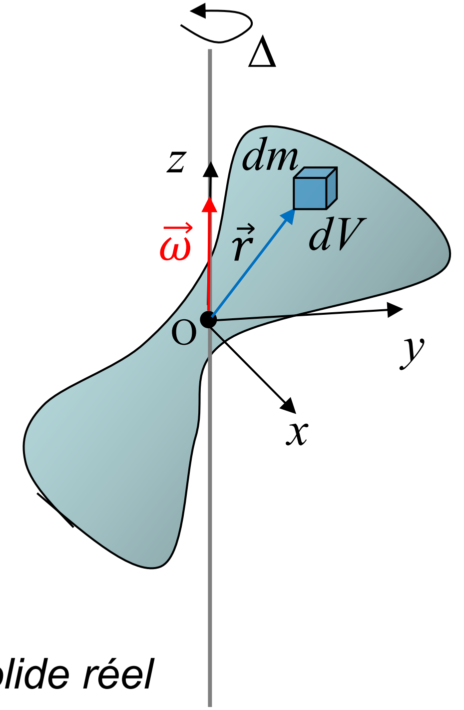
Le vecteur unitaire $\vec{u'}$ est perpendiculaire aux vecteurs $\vec{r_{1,2}}$ et $\vec{v_{1,2}}$, c'est-à-dire perpendiculaire à l'haltère et dans le plan formé par Δ et l'haltère.

$\overrightarrow{L_{cm}}$ a un mouvement de précession avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$

Le moment cinétique d'un solide n'est pas forcément colinéaire à $\vec{\omega}$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Cas général : **moment cinétique d'un solide**



Solide réel

Quantité de mouvement du volume élémentaire dV :

$$d\vec{p} = \vec{v}\mathrm{dm} = \vec{v}\rho dV$$

Moment cinétique élémentaire pour l'élément de masse dm:

$$d\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{r_0} \times d\vec{p} = \overrightarrow{r_0} \times \vec{v}\rho dV$$

Moment cinétique total du solide:

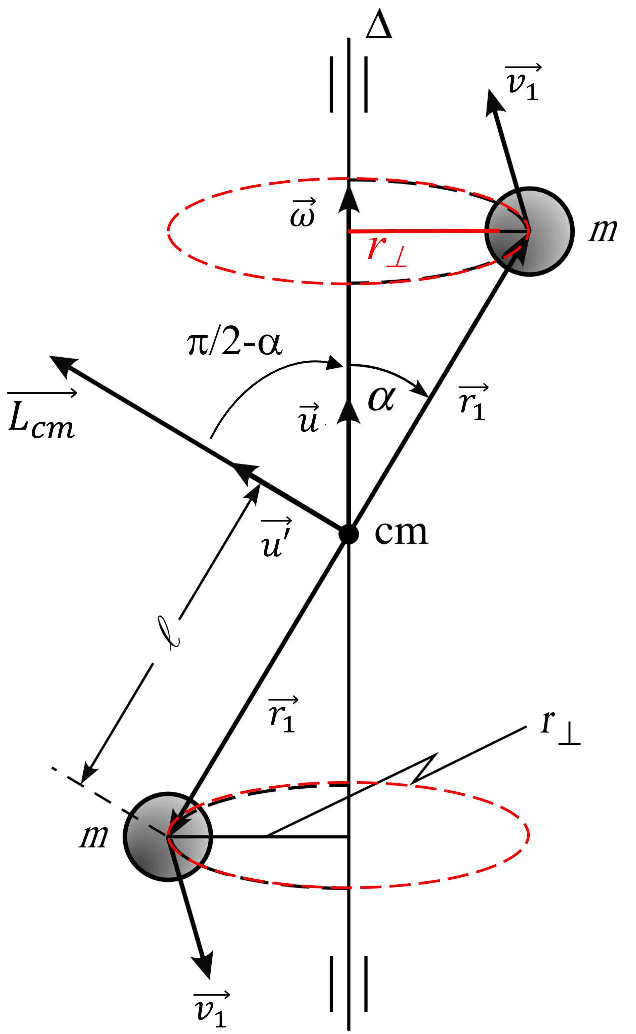
$$\boxed{\vec{L}_O = \int_V d\overrightarrow{L_O} = \int_V \overrightarrow{r_0} \times \vec{v}\rho dV}$$

remarque: $\vec{v}, \rho, et\ dV\ dépendent\ de\ \overrightarrow{r_0}$

Le moment cinétique d'un solide en rotation est un vecteur qui "tourne" avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ mais qui n'est pas forcément colinéaire à $\vec{\omega}$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Cas particulier : **moment cinétique projeté sur l'axe de rotation**



Le moment cinétique dépend de la distribution des masses du solide par rapport à l'axe de rotation. Pour un élément de masse élémentaire, c'est la distance $r_\perp$

$$\overrightarrow{L_{cm}} = 2\, m\, l\, \omega\, r_\perp \overrightarrow{u'}$$

On peut remarquer aussi que si $\overrightarrow{u'}$ est ⊥ à $\vec{\omega}$ alors la projection de $\overrightarrow{L_{cm}}$ est nulle

Projection de $\overrightarrow{L_{cm}}$ sur l'axe Δ de vecteur unitaire $\vec{u}$:

$$L_{cm,\Delta} = \overrightarrow{L_{cm}} \cdot \vec{u}$$

$$= 2m\omega r_\perp \underbrace{\ell \, \underbrace{\overrightarrow{u'} \cdot \vec{u}}_{\sin\alpha}}_{r_\perp}$$

cos (π/2-α) = sinα

sinα = r⊥ /l

$$= 2m\, r_\perp{}^2 \omega$$

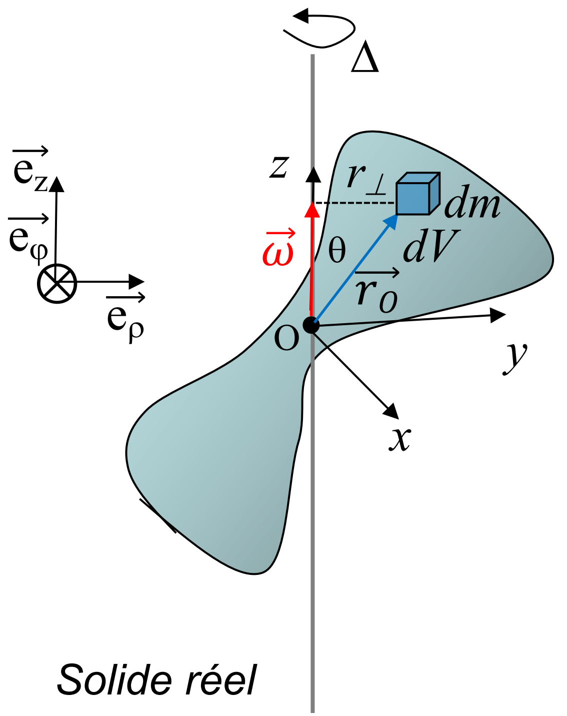
Masse totale de l'haltère

Distance des masses par rapport à l'axe Δ

Vitesse angulaire pour la rotation autour de l'axe Δ

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Cas général : moment cinétique projeté sur l'axe de rotation



Solide réel

On peut généraliser

$$\overrightarrow{dL_O} = \vec{r_0}\times d\vec{p} = \vec{r_0}\times\vec{v}\rho dV$$

$$\vec{v} = \vec{\omega}\times\vec{r_0} = rsin\theta\omega\vec{e_\varphi} = \omega r_\perp\vec{e_\varphi}$$ (coordonnées cylindriques $\vec{e_\rho},\vec{e_\varphi},\vec{e_z}$)

$$\overrightarrow{dL_O} = \vec{r_0}\times(\omega r_\perp\vec{e_\varphi})\rho dV = (rsin\theta\vec{e_\varphi} + rcos\theta\vec{e_z})\times\vec{e_\varphi}\omega r_\perp\rho dV$$

$$\overrightarrow{dL_O} = (r_\perp\vec{e_\rho} + rcos\theta\vec{e_z})\times\vec{e_\varphi}\omega r_\perp\rho dV = (r_\perp\vec{e_z} - rcos\theta\vec{e_\rho})\omega r_\perp\rho dV$$

On projette sur l'axe Oz

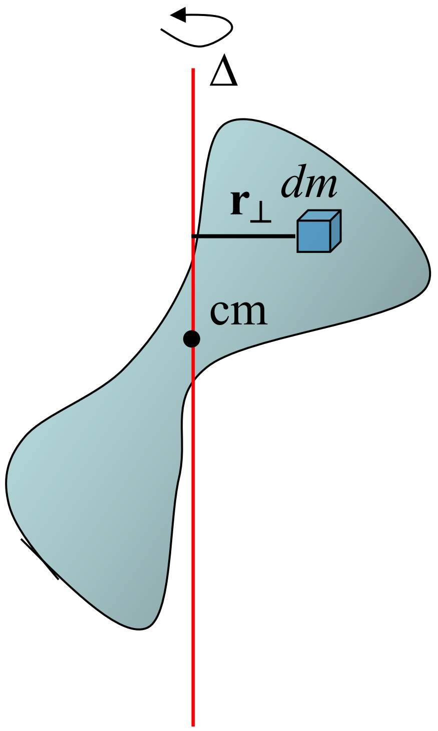
$$\overrightarrow{dL_O}\cdot\vec{e_z} = dL_O^z = (r_\perp\vec{e_z} - rcos\theta\vec{e_\rho})\cdot\vec{e_z}\omega r_\perp\rho dV = r_\perp^2\omega\rho dV$$

On intègre sur le volume

$$\boxed{L_O^z = \int_V dL_O^z = \int_V r_\perp^2\omega\rho dV = \int_V r_\perp^2 dm\ \omega}$$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Définition du moment d'inertie



Généralisation : pour un solide, la projection du moment cinétique $\overrightarrow{L_{cm}}$ sur un axe de rotation Δ passant par son centre de masse s'écrit

$$\boxed{L_{cm,\Delta} = \omega \int_V r_\perp^2 \, dm}$$

Moment cinétique

$r_\perp$ est la distance entre l'élément de volume (de masse dm) considéré et l'axe de rotation (on pourra remplacer $r_\perp$ par r pour simplifier l'écriture, mais attention à la définition: c'est la distance la plus courte entre l'élément de volume et l'axe de rotation)

remarque importante : $r_\perp$ *est constant au cours de la rotation (solide indéformable)*

On peut alors poser

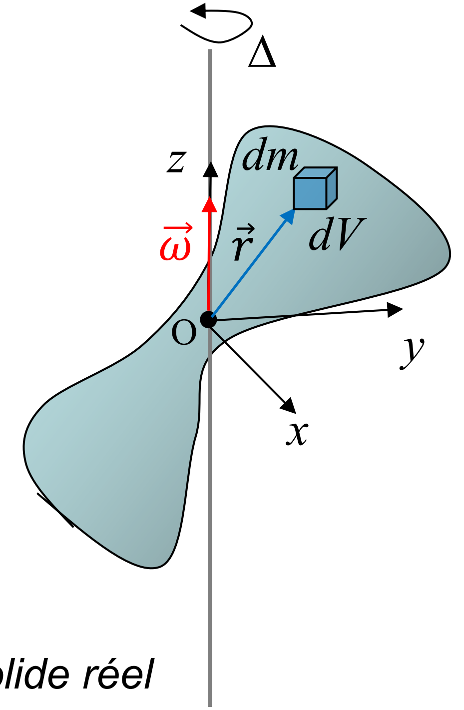
$$\boxed{I_{cm,\Delta} = \int_V r_\perp^2 \, dm}$$

Moment d'inertie

$I_{cm,\Delta}$ est appelé **moment d'inertie** du solide par rapport à l'axe Δ

11.3. Moment cinétique et moment d’inertie

■ Cas général : **moment cinétique d’un solide**



Solide réel

Quantité de mouvement du volume élémentaire dV :

$$d\vec{p} = \vec{v}\mathrm{dm} = \vec{v}\rho dV$$

Moment cinétique élémentaire pour l’élément de masse dm:

$$d\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{r_0} \times d\vec{p} = \overrightarrow{r_0} \times \vec{v}\rho dV$$

Moment cinétique total du solide:

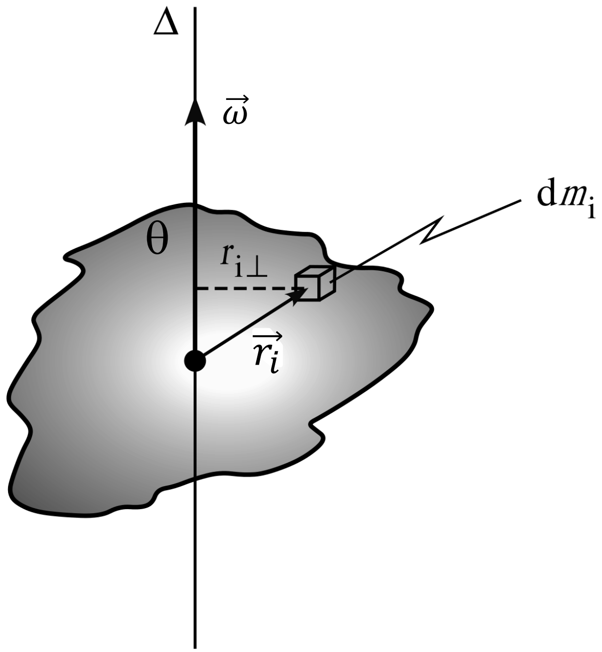
$$\boxed{\vec{L}_O = \int_V d\overrightarrow{L_O} = \int_V \overrightarrow{r_0} \times \vec{v}\rho dV}$$

<u>remarque</u>: $\vec{v}, \rho, et\ dV\ dépendent\ de\ \overrightarrow{r_0}$

Le moment cinétique d’un solide en rotation est un vecteur qui “tourne” avec une vitesse angulaire $\vec{\omega}$ mais qui n’est pas forcément colinéaire à $\vec{\omega}$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

■ Energie cinétique de rotation et moment d'inertie



Elément dm_i

$$dE_{cin} = \frac{1}{2} dm v_i^2$$
$$= \frac{1}{2} dm \, |\vec{\omega} \times \vec{r_i}|^2$$
$$= \frac{1}{2} dm r_{i\perp}^2 \omega^2$$

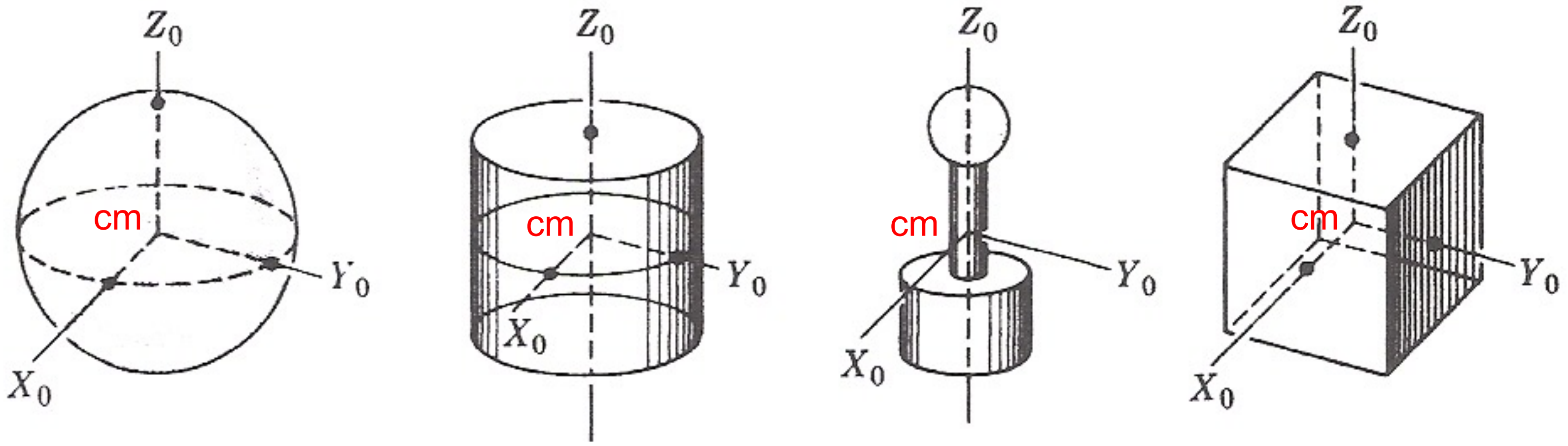
Solide entier

$$E_{cin} = \frac{1}{2} \omega^2 \int_V r_\perp^2 \, dm$$

Energie cinétique de rotation $\boxed{E_{cin} = \frac{1}{2} I_{cm,\Delta} \omega^2}$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

- De façon générale, le moment cinétique $\boldsymbol{L}$ n'est pas parallèle à l'axe de rotation, c'est-à-dire à ω.
- Cependant, pour chaque solide, et ce quelle que soit sa forme, il y a (au moins) trois directions orthogonales passant par le centre de masse pour lesquelles le moment cinétique est parallèle à l'axe de rotation.
- **Ce sont les axes principaux d'inertie.**



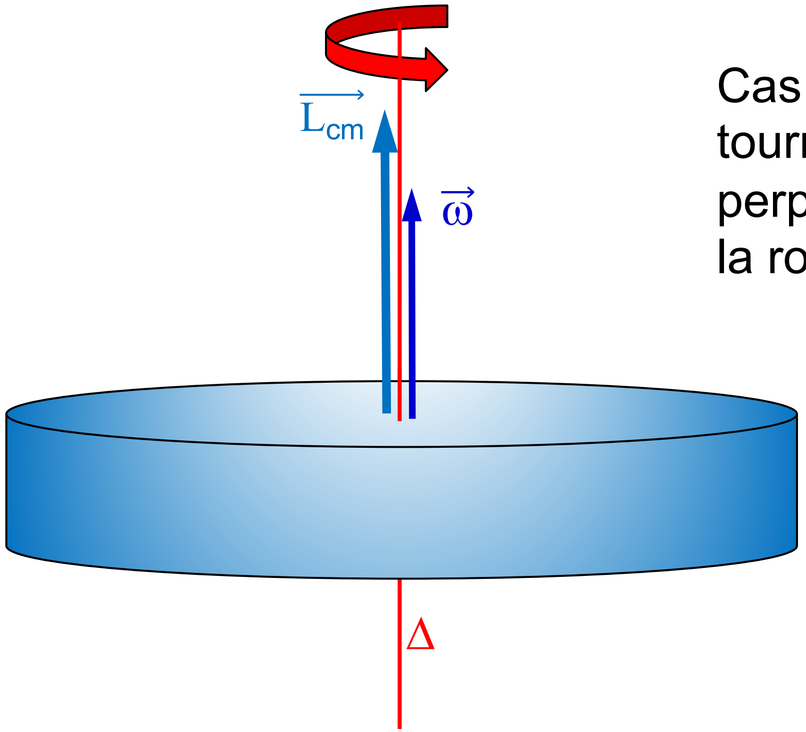
Axes principaux d'inerties

Dans le cas d'une rotation autour d'un axe principal d'inertie: $\vec{L} = I\,\vec{\omega}$

11.3. Moment cinétique et moment d'inertie

Le moment cinétique $\overrightarrow{L_{cm}}$ est orienté selon l'axe de rotation. Dans ce cas, l'axe de rotation est appelé axe principal d'inertie.

$$\boxed{\overrightarrow{L_{cm}} = I\,\vec{\omega} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{L_{cm}} \text{ et } \vec{\omega} \text{ sont colinéaires}}$$

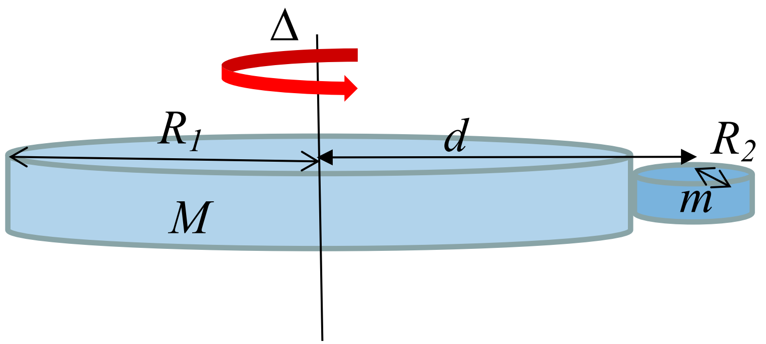


Cas d'une roue homogène tournant autour d'un axe Δ perpendiculaire au plan de la rotation

11.4. Calcul d'un moment d'inertie composé

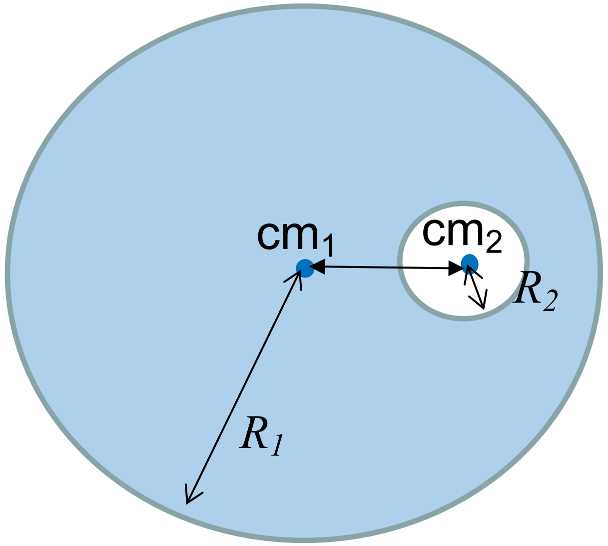
■ Moment d'inertie composé : exemples

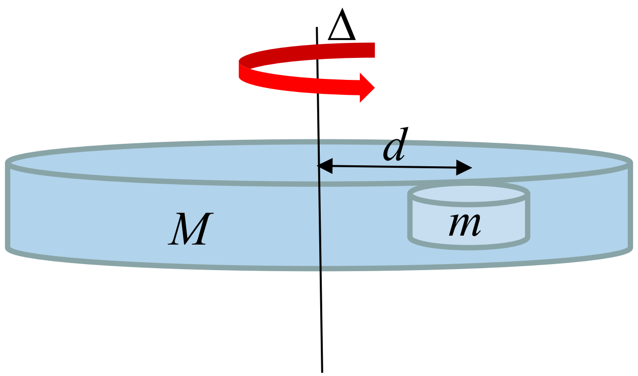
A) Le moment d'inertie d'un objet formé de deux roues



$$I_{total} = I_{grande\ roue} + I_{petite\ roue}$$

B) Le moment d'inertie d'une roue trouée





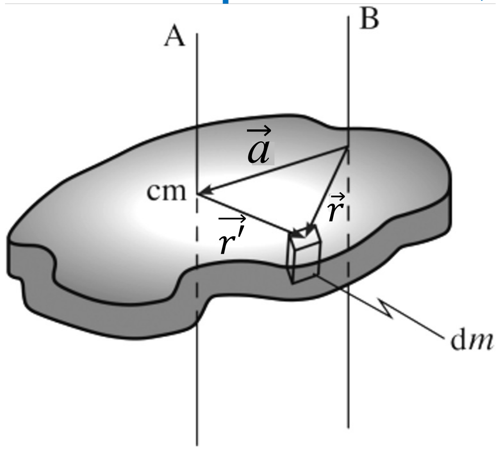
Cette roue peut être vue comme la somme de la roue trouée et du petit disque de masse m et de rayon R_2

$$I_{roue\ pleine} = I_{roue\ trouée} + I_{petite\ roue}$$

$$\Rightarrow \quad I_{roue\ trouée} = I_{roue\ pleine} - I_{petite\ roue}$$

11.5. Théorème de Steiner

Le moment d'inertie I d'un solide de masse M pour une rotation autour d'un axe B, qui est parallèle et à la distance a de l'axe A passant par le cm, est donné par la relation suivante :



$$\boxed{I = I_{cm} + Ma^2}$$

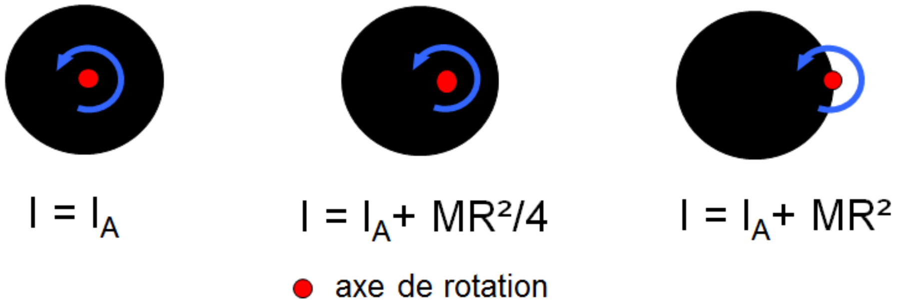
avec I_{cm} moment d'inertie du solide pour une rotation autour de l'axe A passant par le centre de masse

Théorème de Steiner
(ou Théorème de Huygens-Steiner)

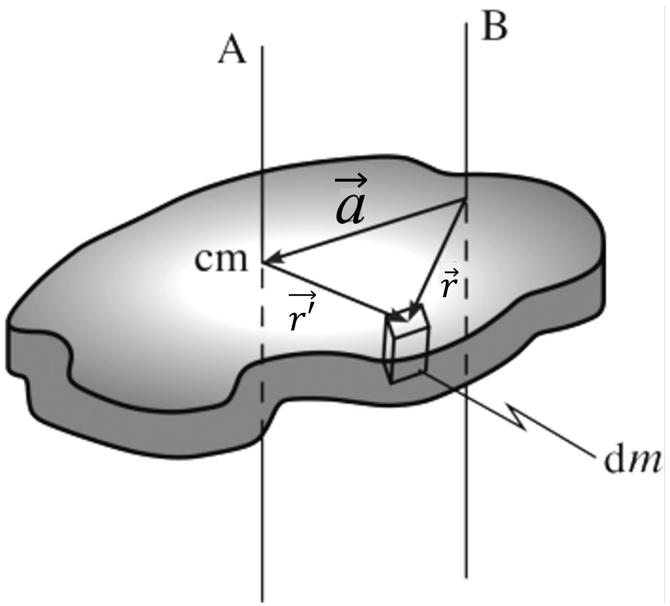
Huygens
1629 - 1695

Steiner
1796 - 1863

Exemples:



11.5. Théorème de Steiner



Démonstration :

- On suppose que l'on connaît I_{cm}, le moment d'inertie pour une rotation autour de l'axe A passant par le cm et parallèle à l'axe B

- L'axe B est à la distance a de l'axe A

$$I_B = \int_V r^2\, dm = \int_V (\vec{a} + \vec{r'})^2\, dm = a^2 \int_V dm + 2\vec{a} \underbrace{\int_V \vec{r'}\, dm}_{\substack{\text{(définition}\\ \text{du cm)} = 0}} + \underbrace{\int_V r'^2\, dm}_{I_{cm}}$$