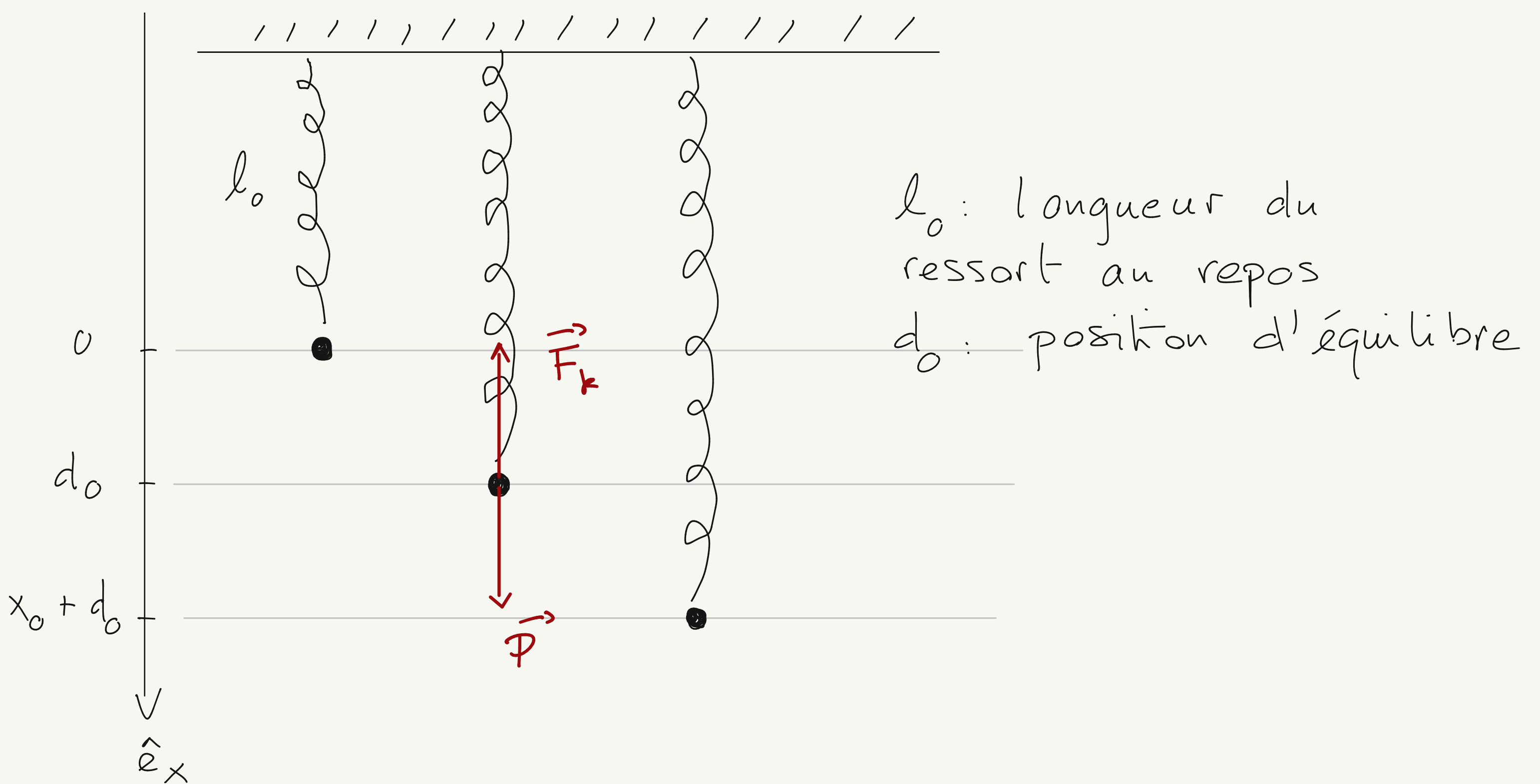


Exercice application 8 "Montage vertical"

1)



1) Calcul de la position d'équilibre d_0 en fonction des données.

Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$

$$\Rightarrow \vec{F}_k + \vec{P} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow k \Delta x + m\vec{g} = \vec{0}$$

↑
déplacement

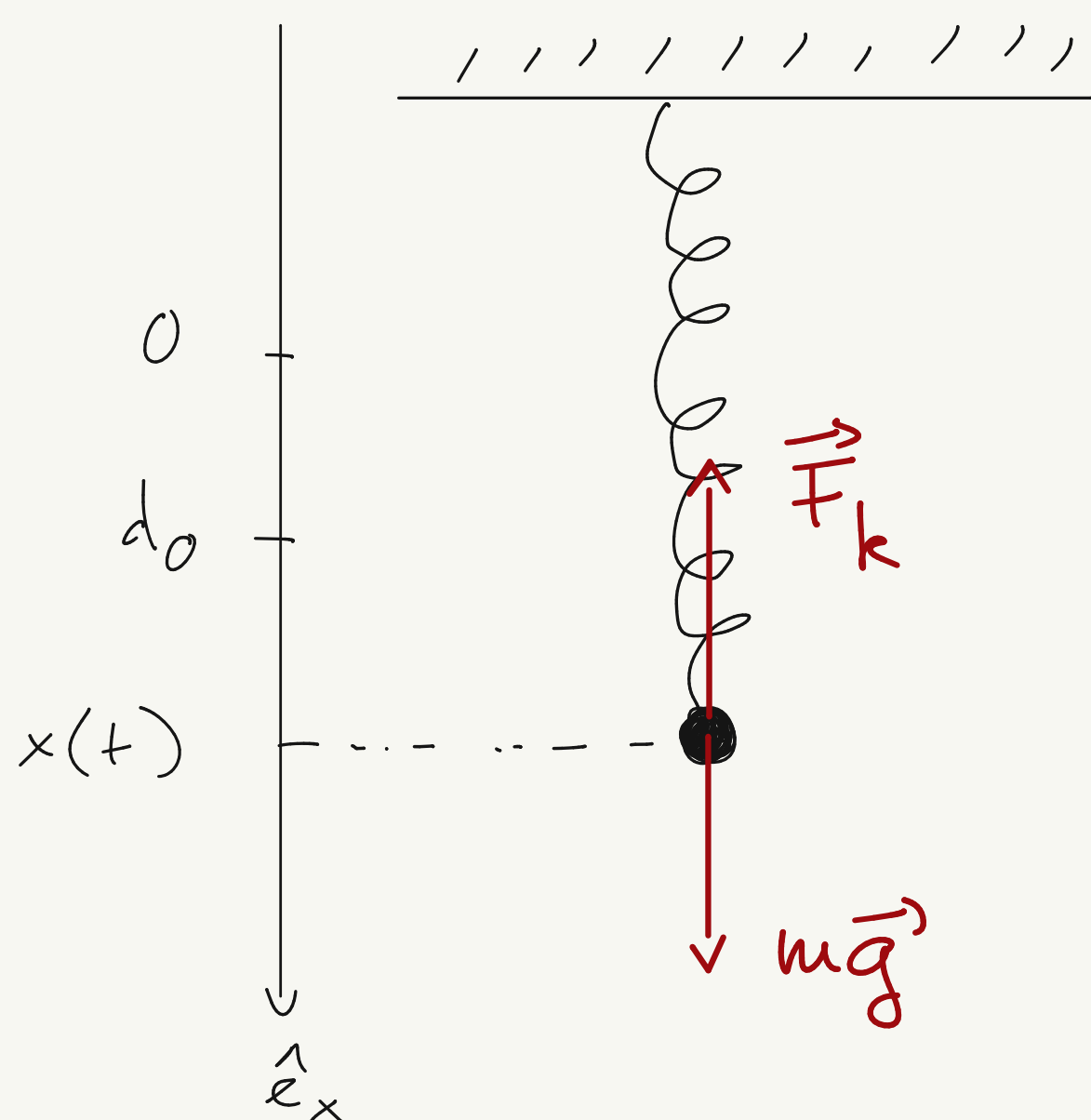
Projection sur Ox :

$$mg - kd_0 = 0 \Rightarrow d_0 = \frac{mg}{k}$$

2)

2)

On établit l'équation du mouvement dans le cas général, dans le sens que l'on considère l'allongement du ressort comme variable du système, qu'on notera $x = x(t)$.



Pour ce schéma particulier, la force du ressort est de la forme :

$$\vec{F}_k = -k (\text{allongement}) \hat{e}_x$$

Newton : $\sum \vec{F}_{\text{ext}} = m\vec{a}$

$$m\vec{g} + k\Delta\vec{x} = m\vec{a}$$

Projection sur Ox :

$$mg - kx = m\ddot{x}$$

⇓

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \quad (*)$$

⚠ Ici on nous demande d'établir l'équation du mouvement, et pas (encore) de la résoudre.

3)

Changement de variable : ici, on considère la variable $X \equiv x - x_A$, avec x_A un point de l'axe Ox . On a alors

3)

$$\begin{cases} x = X + x_A \\ \dot{x} = \dot{X} \\ \ddot{x} = \ddot{X} \end{cases}$$

L'équation (*) écrite avec X devient alors :

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g \Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m}(X + x_A) = g$$

$$\Rightarrow \ddot{X} + \frac{k}{m}X = g - \frac{kx_A}{m}$$

Afin d'avoir une équation de la forme

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0, \text{ on veut que}$$

$$x_A = \frac{gm}{k} = d_0$$

Ainsi, notre nouvelle variable

$$X \equiv x - d_0$$

et l'équation (*) s'écrit alors

$$\ddot{X} + \frac{k}{m}X = 0$$

ce qui donne comme

solution

$$X(t) = A \cos(\Omega_0 t) + B \sin(\Omega_0 t)$$

$$\text{avec } \Omega_0 \equiv \sqrt{k/m}$$

Conditions initiales : $\dot{X}(0) = 0$
 $X(0) = x_0$

4)

On en détermine A et B :

$$\dot{X}(t) = -A\Omega_0 \sin(\Omega_0 t) + B\Omega_0 \cos(\Omega_0 t)$$

$$\dot{X}(0) = 0 \Rightarrow B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$$

Ainsi $X(t) = A \cos(\Omega_0 t)$ et $X(0) = x_0$
 $\Rightarrow X(t) = x_0 \cos(\Omega_0 t)$

En effectuant à nouveau le changement de variable, on obtient la solution finale :

$$x(t) = x_0 \cos(\Omega_0 t) + d_0, \quad \Omega_0 = \sqrt{k/m}$$

4)

On pose l'origine de l'énergie potentielle en 0 (longueur du ressort au repos).

On a $E_{\text{pot}} = E_{\text{pot}}^{\vec{P}} + E_{\text{pot}}^{\text{ress}}$

$$\Rightarrow E_{\text{pot}}(x) = -mgx + \frac{1}{2}kx^2$$

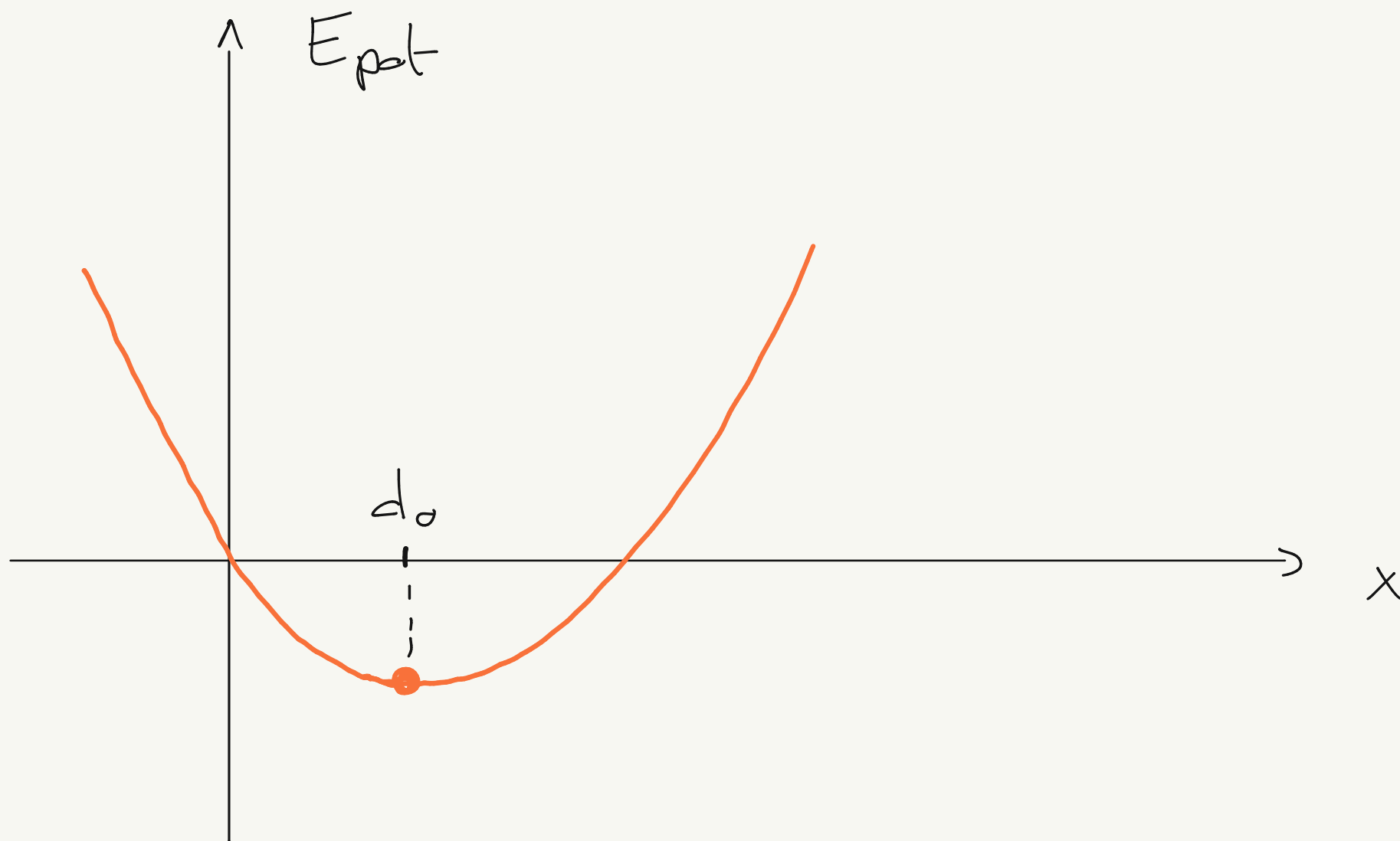
Le minimum de l'énergie potentielle est :

$$\frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = -mg + kx = 0 \Rightarrow x_{\text{min}} = \frac{mg}{k} = 0$$

De plus $E_{\text{pot}}(x_{\text{min}}) = -\frac{1}{2}kd_0^2 < 0$

5)

Graphique de E_{pot} :



5)

On cherche à retrouver l'équation du mouvement (*) à partir de E_{pot} :

$$\sum \vec{F}^{\text{cons}} = - \sum \frac{dE_{\text{pot}}}{dx} = m\ddot{x}$$

$$= - \left(\frac{dE_{\text{pot}}^{\vec{p}}}{dx} + \frac{dE_{\text{pot}}^{\text{ress}}}{dx} \right) = m\ddot{x}$$

$$= -(-mg + kx) = mg - kx$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}x = g} \quad \cup''$$