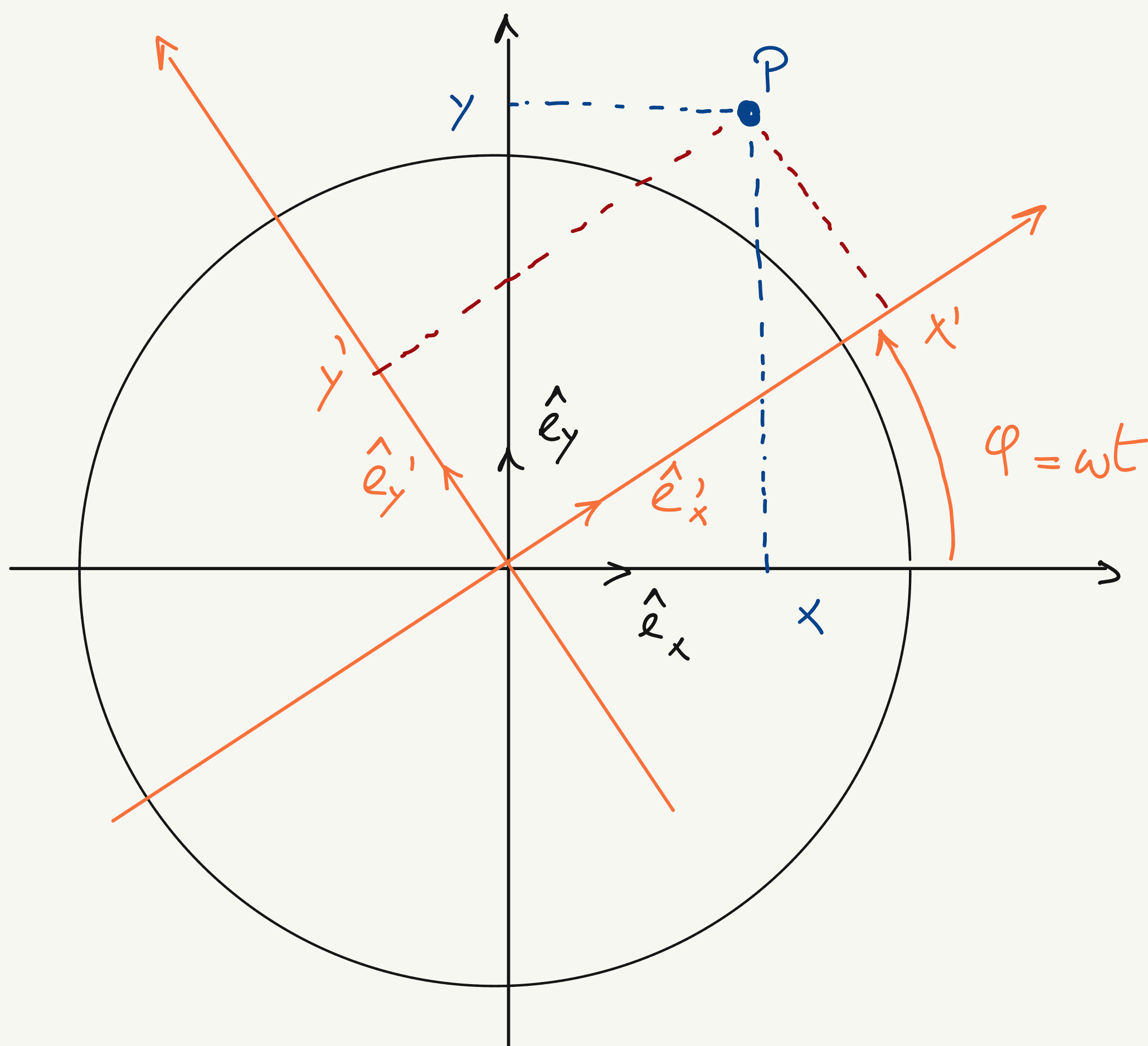


1)

Exercice 1 : "On jongle avec les référentiels"

Schéma du problème



- 1) On commence par exprimer P dans le système de coordonnées (x', y') dans le repère R'

$$\vec{OP} = x' \hat{e}_x + y' \hat{e}_y \quad (*)$$

On cherche maintenant à exprimer $\hat{e}'_x$ et $\hat{e}'_y$ avec les vecteurs $\hat{e}_x$ et $\hat{e}_y$

Par des considérations trigonométriques, on a :

2)

$$\hat{e}_x' = \cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y$$

$$\hat{e}_y' = -\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y$$

On insère ces deux expressions dans (*)

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= x' [\cos \varphi \hat{e}_x + \sin \varphi \hat{e}_y] \\ &+ y' [-\sin \varphi \hat{e}_x + \cos \varphi \hat{e}_y] \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{\equiv x}{=} \underbrace{[x' \cos \varphi - y' \sin \varphi]}_{\equiv x} \hat{e}_x \\ &+ \underbrace{[x' \sin \varphi + y' \cos \varphi]}_{\equiv y} \hat{e}_y \end{aligned}$$

Donc

$$x = x' \cos \varphi - y' \sin \varphi$$

avec

et

$$y = x' \sin \varphi + y' \cos \varphi$$

$$\varphi(t) = \omega t$$

2) la vitesse et l'accélération d'un point P exprimées dans deux référentiels en mouvement l'un par rapport à l'autre sont données par

$$\vec{U}_R(P) = \cancel{\vec{U}_R(A)} + \vec{U}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{AP} \quad (\text{ici } A = O)$$

pas de translation
de R' p.r. à R

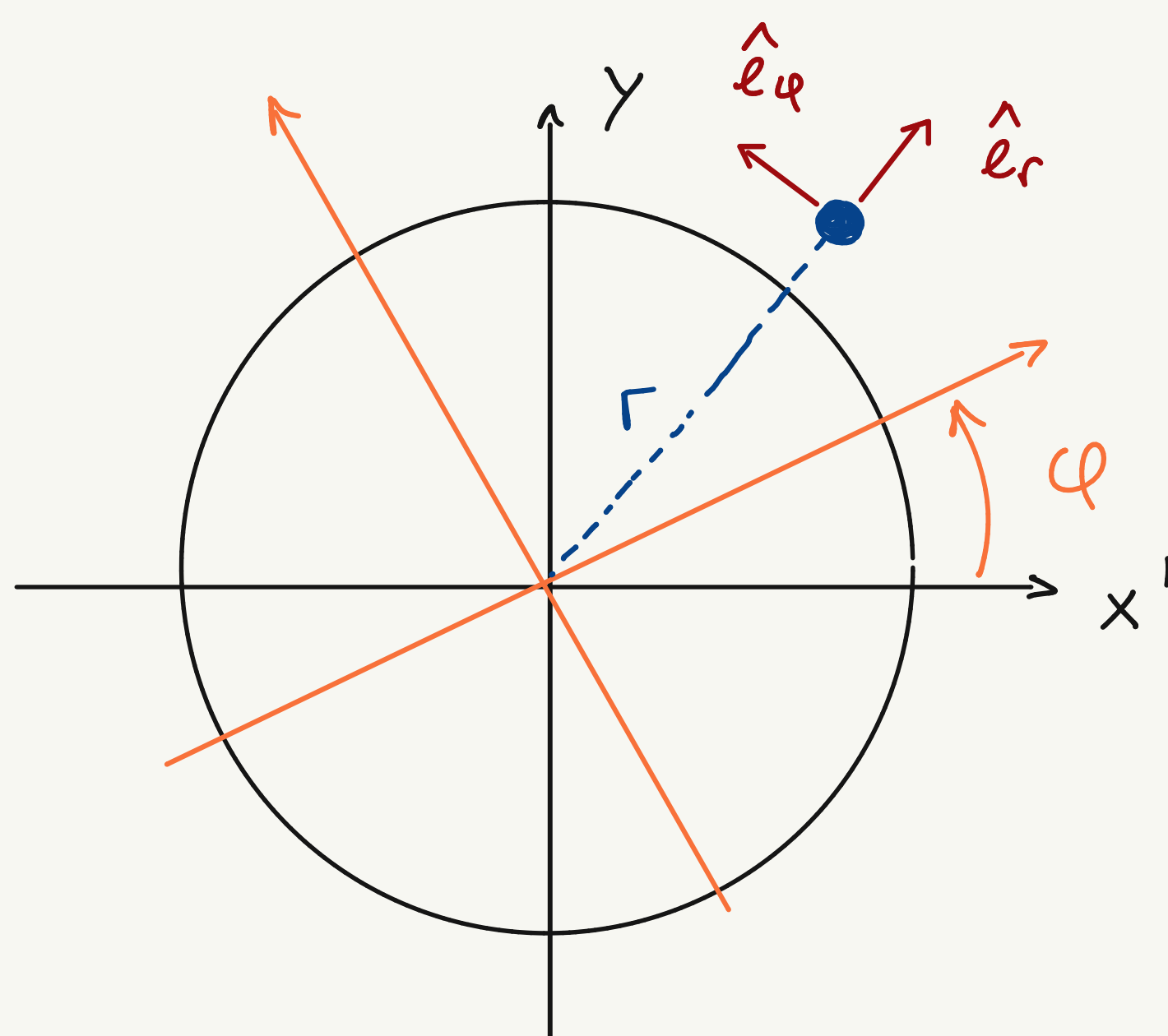
$$\Rightarrow \vec{U}_R(P) = \vec{U}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

3)

$$\begin{aligned}
\vec{a}_R(P) &= \cancel{\vec{a}'_R(A)} + \vec{a}'_{R'}(P) \\
&+ \cancel{\dot{\vec{\omega}}'} \wedge \vec{AP} && \text{acc. tangentielle} \\
&+ \vec{\omega}' \wedge (\vec{\omega}' \wedge \vec{AP}) && \text{acc. centripète} \\
&+ 2\vec{\omega}' \times \vec{v}_{R'}(P) && \text{acc. de Coriolis}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_R(P) = \vec{a}'_{R'}(P) + \vec{\omega}' \wedge (\vec{\omega}' \wedge \vec{OP}) + 2\vec{\omega}' \wedge \vec{v}'_{R'}(P)}$$

3)



On sait que P a un mouvement circulaire uniforme dans le plan (O, x', y') à vitesse angulaire ω'

On peut alors écrire $\vec{\omega}' = \omega' \hat{e}_z$
(car $\hat{e}_z = \hat{e}'_z$)

On a alors :

$$\vec{v}_{R'}(P) = r\omega' \hat{e}_\phi$$

$$\vec{a}_{R'}(P) = -r\omega'^2 \hat{e}_r$$

4) La vitesse dans R s'écrit alors :

4)

$$\begin{aligned}\vec{U}_R(P) &= \vec{U}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge \vec{OP} \\ &= r\omega' \hat{e}_\varphi + \omega \hat{e}_z \wedge r \hat{e}_r \\ &= r\omega' \hat{e}_\varphi + r\omega \hat{e}_\varphi\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{U}_R(P) = r(\omega + \omega') \hat{e}_\varphi \equiv r\Omega \hat{e}_\varphi}$$

De la même façon, l'accélération est donnée par

$$\begin{aligned}a_R(P) &= \vec{a}_{R'}(P) + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}) \\ &\quad + 2\vec{\omega} \wedge \vec{U}_{R'}(P) \\ &= -r\omega'^2 \hat{e}_r + \omega \vec{e}_z \wedge r\omega' \hat{e}_\varphi + 2\omega \hat{e}_z \wedge r\omega' \hat{e}_\varphi \\ &= -r\omega'^2 \hat{e}_r - r\omega^2 \hat{e}_r - 2r\omega'\omega \hat{e}_r \\ &\quad \uparrow \text{car } \hat{e}_z \wedge \hat{e}_\varphi = -\hat{e}_r \\ &= -r\{\omega^2 + 2\omega\omega' + \omega'^2\} \hat{e}_r = -r(\omega + \omega')^2 \hat{e}_r\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{\vec{a}_R(P) = -r\Omega^2 \hat{e}_r, \quad \Omega \equiv \omega + \omega'}$$

Exercice application 2

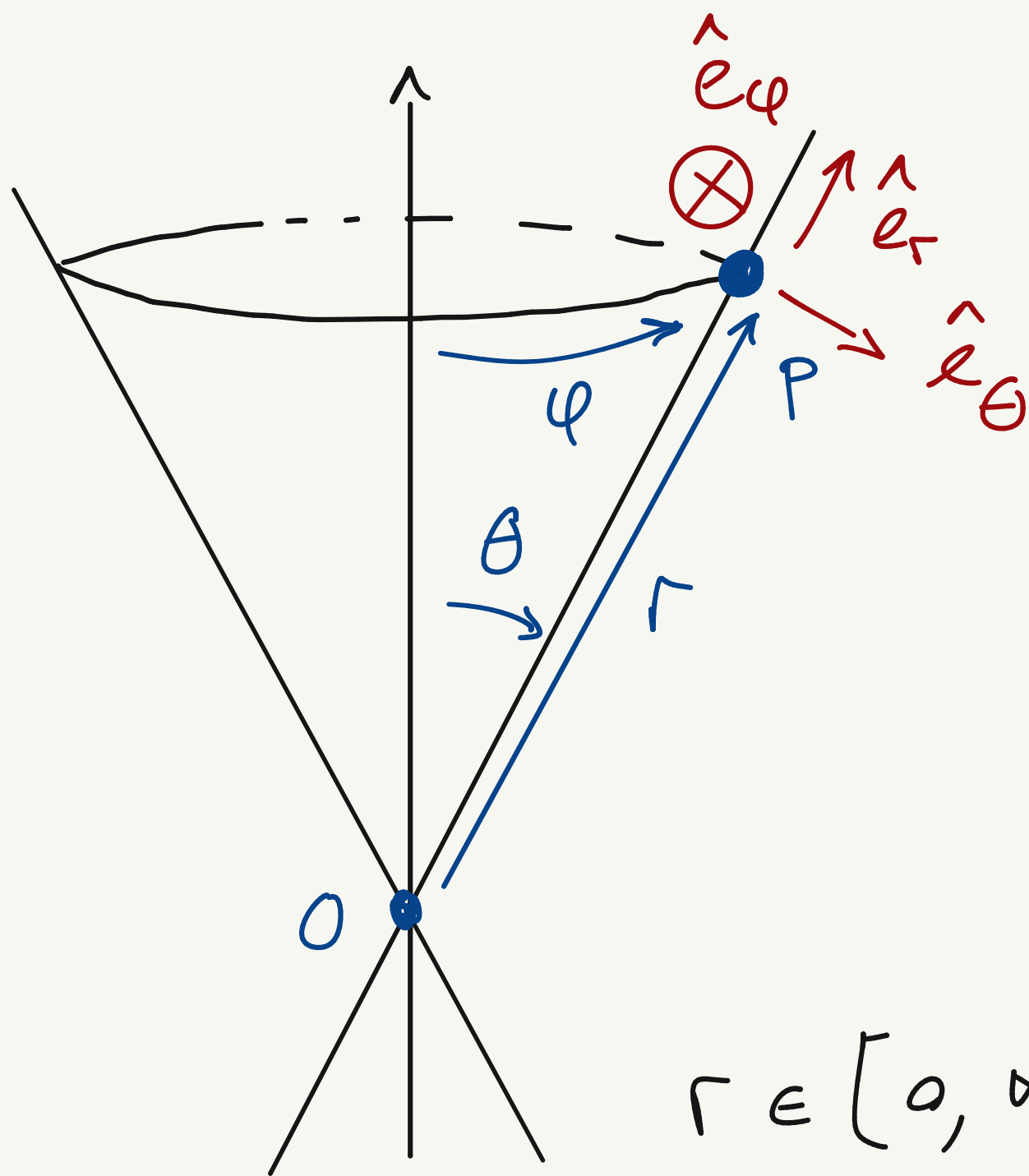
5)

1)

Nous pouvons considérer les systèmes de coordonnées suivants :

- Cartésien : x, y, z variables
- Cylindrique : r, φ, z variables
- Sphérique : r, θ, φ → constant !
↑ ↑
variables

Ainsi, avec une variable constante, les coordonnées sphériques sont les plus adaptées



Rappel :

$$\begin{cases} x = r \sin \theta \cos \varphi \\ y = r \sin \theta \sin \varphi \\ z = r \cos \theta \end{cases}$$

$$r \in [0, \infty), \theta \in [0, \pi], \varphi \in [0, 2\pi]$$

2)

6)

Accélération en coord. sphériques :

$$\vec{a} = a_r \hat{e}_r + a_\theta \hat{e}_\theta + a_\varphi \hat{e}_\varphi, \text{ avec}$$

$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\varphi}^2 \sin \theta \cos \theta \\ a_\varphi = r\ddot{\varphi} \sin \theta + 2r\dot{\varphi}\dot{\theta} \cos \theta + 2\dot{r}\dot{\varphi} \sin \theta \end{cases}$$

car $\theta = \text{const} \Rightarrow \dot{\theta} = 0, \ddot{\theta} = 0$

De la même manière, la vitesse est donnée par

$$\vec{v}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\theta} \hat{e}_\theta + r\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi$$

$$\Rightarrow \vec{v}(t) = \dot{r} \hat{e}_r + r\dot{\varphi} \sin \theta \hat{e}_\varphi$$