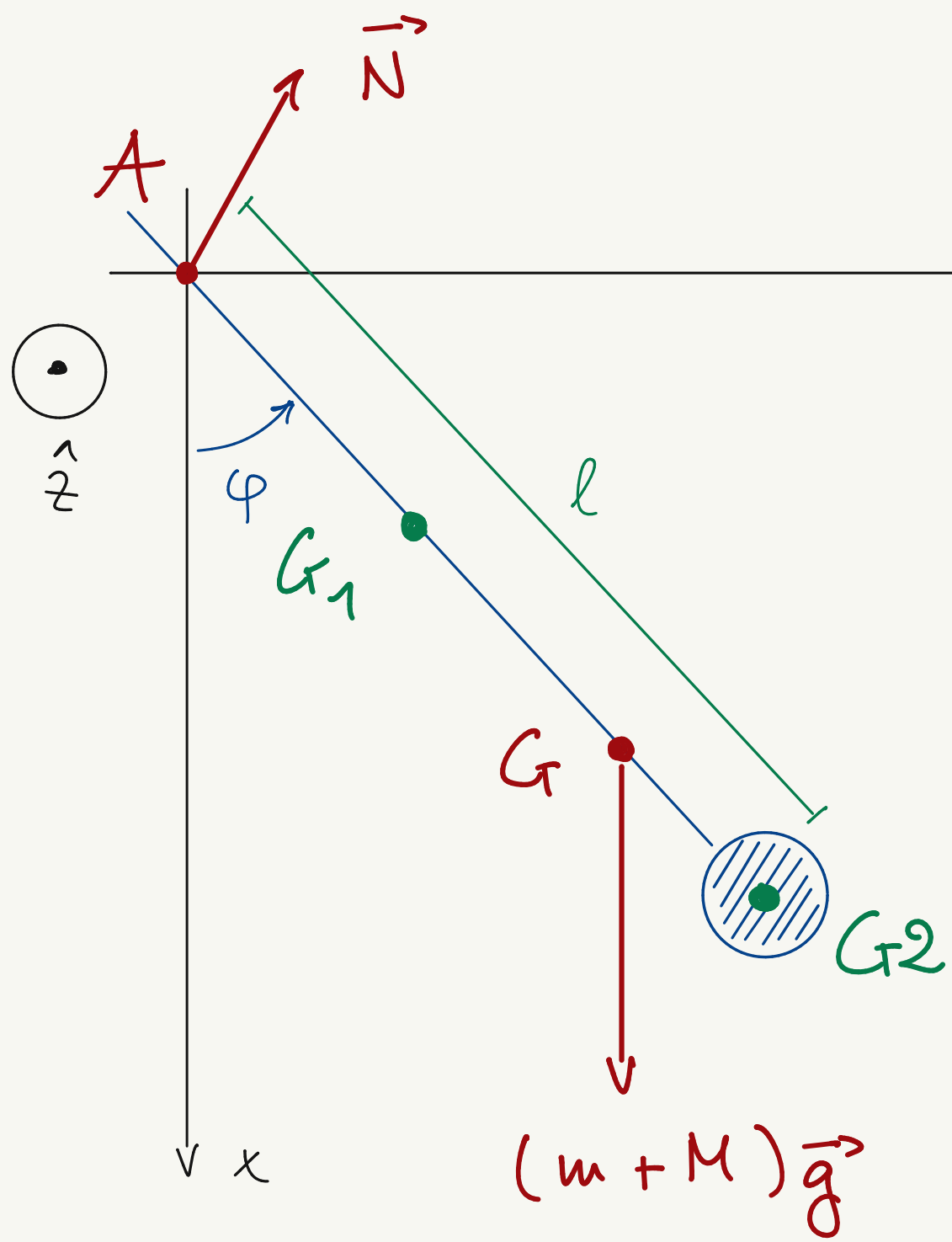




• Bilan des forces :
 $\vec{P} = M_{\text{tot}} \vec{g}$, $\vec{N}$

• On considère ici un solide. On a donc

$$\sum \vec{M}_X = \frac{d\vec{L}_X}{dt}$$

↑ point que l'on choisit en fonction du problème

Calculons les moments de force par rapport au point $X \equiv A$. On a :

$$\vec{M}_A^{\vec{P}} = \vec{AG} \wedge (M+m)\vec{g}'$$

$$\vec{M}_A^{\vec{N}} = \vec{AA} \wedge \vec{N} = \vec{0}$$

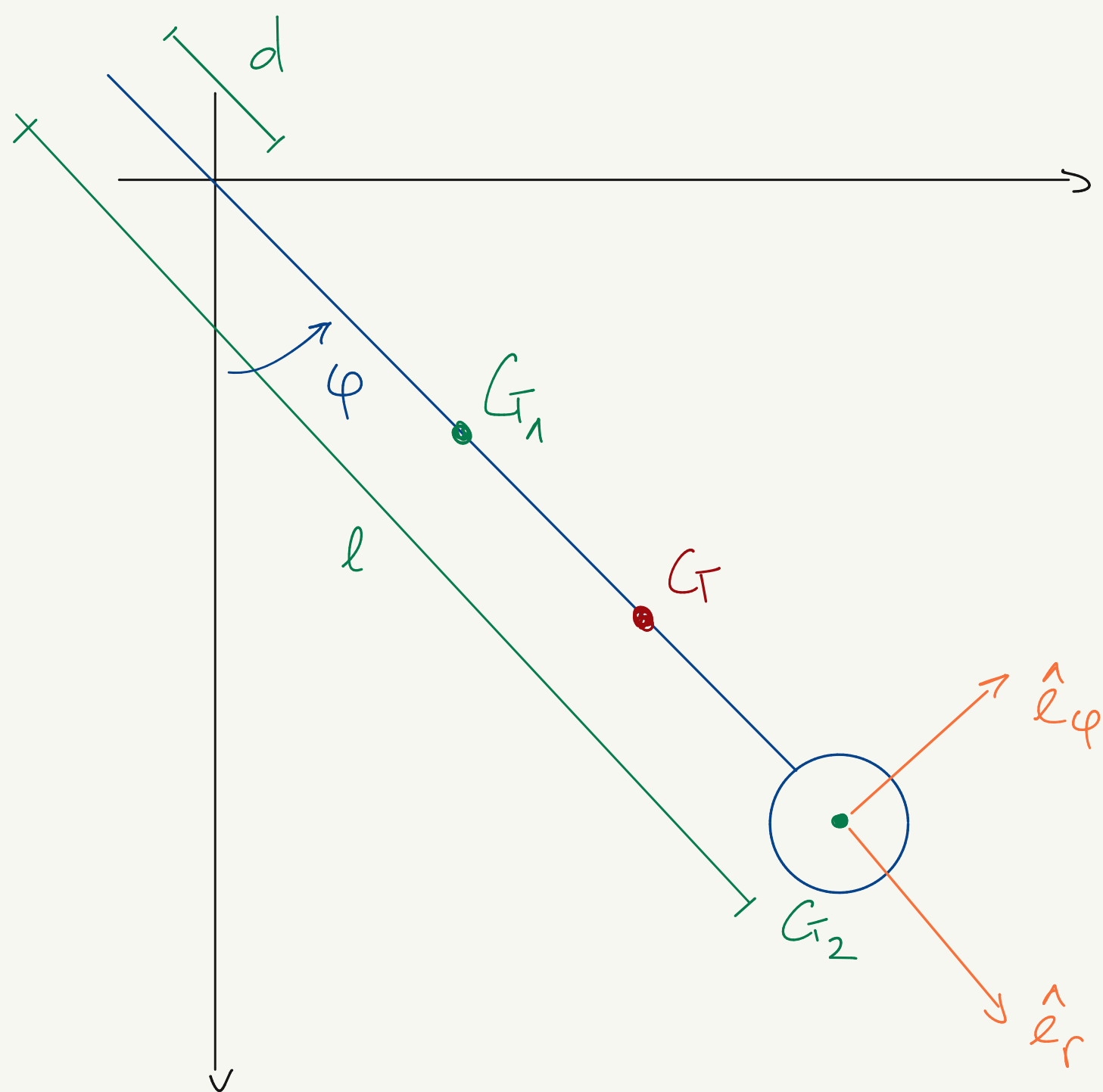
On a alors

$$M_A^{\vec{P}} = \frac{d\vec{L}_A}{dt} \Leftrightarrow \vec{AG} \wedge (M+m)\vec{g}', \quad \vec{L}_A = I_{A,z} \vec{\omega}$$

Il nous reste à déterminer G et $I_{A,z}$

i) Calcul de $\vec{AG}$

2)



On passe ici en coordonnées polaires

G_1 est au centre de la tige (centre de masse de la tige).

On a alors :

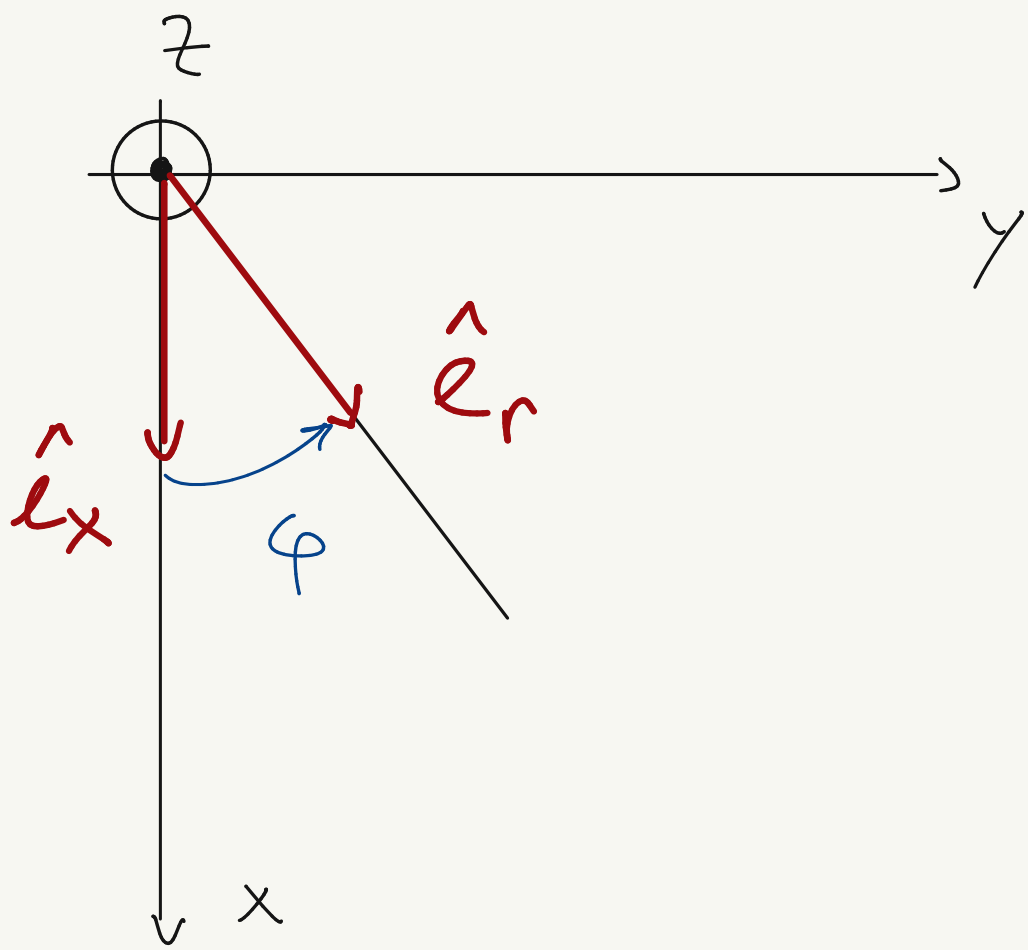
$$\vec{AG_1} = \left(\frac{l}{2} - d \right) \hat{e}_r$$

$$\vec{AG_2} = (l - d + R) \hat{e}_r$$

Ainsi, par définition du centre de masse :

$$\begin{aligned} \vec{AG} &= \frac{m \vec{AG_1} + M \vec{AG_2}}{m + M} \\ &= \frac{m \left(\frac{l}{2} - d \right) + M (l - d + R)}{m + M} \hat{e}_r \\ &\quad \underbrace{\hspace{10em}}_{\equiv d_G} \end{aligned}$$

Le moment de force est alors donné par : 3)

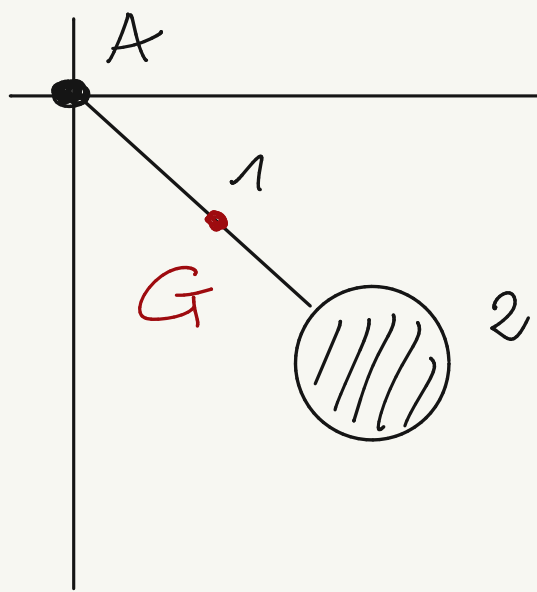


$$\begin{aligned} \mathcal{M}_A^{\vec{P}} &= \vec{AG} \wedge (m+M)\vec{g} \\ &= d_G \hat{e}_\varphi \wedge (m+M)g \hat{e}_x \\ &= d_G (m+M)g \underbrace{\hat{e}_\varphi \wedge \hat{e}_x}_{= -\sin \varphi \hat{e}_z} \\ &= -\sin \varphi \hat{e}_z \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathcal{M}_A^{\vec{P}} = -(m+M)gd_G \sin \varphi \hat{e}_z$$

ii) Calcul de $I_{A,z}$ On a : $\vec{L}_A = I_{A,z} \vec{\omega}$

$$\text{avec } I_{A,z} = I_{A,z}^1 + I_{A,z}^2$$



On exprime alors les différents moments d'inertie avec ceux calculés par rapport aux centres de masse :

$$I_{A,z}^1 = I_{G_1,z}^1 + m d_{AG_1}^2 = \frac{1}{12} m l^2 + m \left(\frac{l}{2} - d \right)^2$$

$$I_{A,z}^2 = I_{G_2,z}^2 + M d_{AG_2}^2 = \frac{1}{2} M R^2 + M (l - d + R)^2$$

Ainsi,

$$I_{A,z} = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{2} M R^2 + m \left(\frac{l}{2} - d \right)^2 + M (l - d + R)^2$$

4)

iii) Équation du mouvement

Il est clair que $\omega = \dot{\varphi}$ et $\vec{\omega} = \dot{\varphi} \hat{e}_z$. Ainsi :

$$\vec{M}_A^{\vec{P}} = \frac{d\vec{L}_A}{dt}$$

$$-(m+M)g d_G \sin \varphi \hat{e}_z = I_{A,z} \ddot{\varphi} \hat{e}_z$$

$$\Rightarrow \ddot{\varphi} + \frac{(m+M)g d_G}{I_A} \sin \varphi = 0 \quad (*)$$

iv) Cas des petites oscillations

Dans ce cas, on a $\varphi \ll 1$ et donc $\sin \varphi \sim \varphi$. (*) devient alors :

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0 \quad \text{avec} \quad \Omega_0^2 = \frac{(m+M)g d_G}{I_A}$$

Les conditions initiales sont données par

$$\varphi(0) = \alpha \quad \text{et} \quad \dot{\varphi}(0) = 0$$

$$\text{Solution générale : } \varphi(t) = A \cos(\Omega_0 t) + B \sin(\Omega_0 t)$$

$$\varphi(0) = \alpha \Rightarrow A = \alpha$$

$$\dot{\varphi}(0) = B \Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0.$$

Ainsi :

$$\varphi(t) = \alpha \cos(\Omega_0 t)$$

v) Cas particuliers

On considère $d = 0$, $m = 0$, $R = 0$

On a alors $\tilde{I}_A = M l^2$ et $d_G = l$,
et pour $\varphi \ll 1$, on a :

$$\ddot{\varphi} + \frac{(\cancel{m} + M) d_G g}{I_A} \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{\cancel{M} \cancel{l} g}{\cancel{M} \cancel{l}^2} \varphi = 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \varphi = 0$$

On retrouve alors l'équation d'un
pendule pour une masse ponctuelle
avec

$$\Omega_0^2 = g/l.$$