Chapitre 0

Rappels mathématiques

L'analyse de problèmes physiques nécessite un certain nombre d'outils mathématiques. L'objectif de ce chapitre est de rappeler les bases mathématiques des vecteurs, dérivées, primitives, intégrales et développement limité.

1 Vecteurs

Un vecteur est caractérisé par :

- sa **norme**, c'est à dire sa longueur,
- sa **direction**, qui est la droite qui le porte,
- son **sens**, indiquant dans quel sens il se déplace sur cette droite.

Un vecteur servira donc à représenter une grandeur pour laquelle, en plus de la "valeur", il est important de connaître le sens et la direction. Typiquement, ce sont les déplacements, les vitesses, les accélérations et les forces (un bilan des forces s'effectue à l'aide de vecteurs).

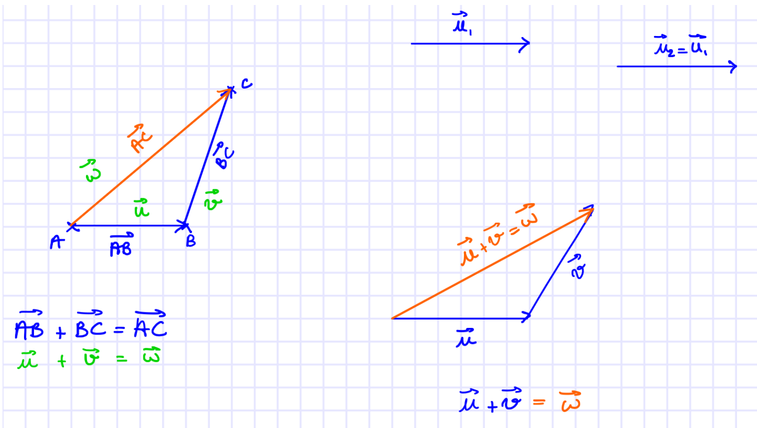

FIGURE 1 – Exemple d'additions vectorielles

Pour rappel, la Figure 1 démontre les notions d'égalité entre vecteurs (même norme, sens, direction) et d'indépendance du point d'attache (notamment pour l'addition vectorielle). Cependant, lorsqu'on travaille avec des forces $\vec{F}$, le point d'application est une caractéristique importante (mécanique du solide) : le poids s'applique par exemple au centre de masse de l'objet.

1.1 Coordonnées cartésiennes

Afin de manipuler les vecteurs dans l'espace (à 3 dimensions), il est commode de les décomposer selon leurs composantes cartésiennes $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$.

On fait partir le vecteur de l'origine du repère, les composantes du vecteur sont alors les coordonnées cartésiennes de son extrémité A : voir Figure 2.

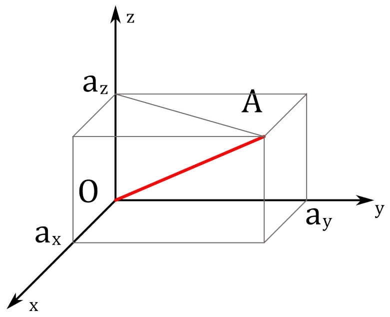

FIGURE 2 – Ici, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ a comme composantes a_x, a_y, a_z

Le vecteur $\vec{a}$ peut s'écrire grâce aux composantes et aux vecteurs de base du repère :

$$\vec{a} = a_x\vec{e}_x + a_y\vec{e}_y + a_z\vec{e}_z \tag{1}$$

Si $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$ sont fixes dans l'espace, on pourra noter verticalement les composantes du vecteur $\vec{a}$:

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. \tag{2}$$

La **somme** de deux vecteurs se calcule par la somme de ses composantes :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_x \\ a_y \\ a_z \end{array} \right. + \vec{b} \left| \begin{array}{l} b_x \\ b_y \\ b_z \end{array} \right. = \vec{a} + \vec{b} \left| \begin{array}{l} a_x + b_x \\ a_y + b_y \\ a_z + b_z \end{array} \right. \tag{3}$$

Les **composantes** du vecteur $\overrightarrow{AB}$ s'obtiennent par la soustraction des coordonnées des points B et A.

$$A \left| \begin{array}{l} x_A \\ y_A \\ z_A \end{array} \right. \; ; \; B \left| \begin{array}{l} x_B \\ y_B \\ z_B \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \overrightarrow{AB} \left| \begin{array}{l} x_B - x_A \\ y_B - y_A \\ z_B - z_A \end{array} \right. \tag{4}$$

1.2 Dérivées de vecteurs par rapport au temps

En physique, il arrive que les vecteurs soient des fonctions du temps t :

$$\vec{a}(t) = a_x(t)\,\vec{e}_x + a_y(t)\,\vec{e}_y + a_z(t)\,\vec{e}_z \tag{5}$$

Nous aurons ainsi besoin de calculer leurs dérivées par rapport au temps, définies par :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \frac{da_x}{dt}\,\vec{e}_x + \frac{da_y}{dt}\,\vec{e}_y + \frac{da_z}{dt}\,\vec{e}_z \tag{6}$$

$$\text{ou en notation verticale : } \frac{d\vec{a}}{dt} \left| \begin{array}{l} da_x/dt \\ da_y/dt \\ da_z/dt \end{array} \right. \tag{7}$$

Dans certains cas, les vecteurs de base seront aussi dépendants du temps : $\big(\vec{e}_{x'}(t), \vec{e}_{y'}(t), \vec{e}_{z'}(t)\big)$. Il faut donc appliquer la règle de la dérivée d'un produit :

$$\frac{d\vec{a}}{dt} = \underbrace{\frac{da_{x'}}{dt}\,\vec{e}_{x'} + a_{x'}\frac{d\vec{e}_{x'}}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(a_{x'}\vec{e}_{x'}\right)} + \underbrace{\frac{da_{y'}}{dt}\,\vec{e}_{y'} + a_{y'}\frac{d\vec{e}_{y'}}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(a_{y'}\vec{e}_{y'}\right)} + \underbrace{\frac{da_{z'}}{dt}\,\vec{e}_{z'} + a_{z'}\frac{d\vec{e}_{z'}}{dt}}_{\frac{d}{dt}\left(a_{z'}\vec{e}_{z'}\right)} \tag{8}$$

1.3 Norme

La **norme** d'un vecteur est par définition la longueur du segment sous-tendu. Pour un vecteur $\overrightarrow{AB}$ donné, sa norme est la longueur du segment $[AB]$.
La norme de $\vec{a}$ s'obtient en calculant la racine carrée de la somme des composantes au carré (en coordonnées cartésiennes) :

$$\|\vec{a}\| := \sqrt{a_x^2 + a_y^2 + a_z^2}. \tag{9}$$

On pourra noter $a = \|\vec{a}\|$ et ainsi désigner la norme du vecteur vitesse $\vec{v}$ par v.

1.4 Produit scalaire

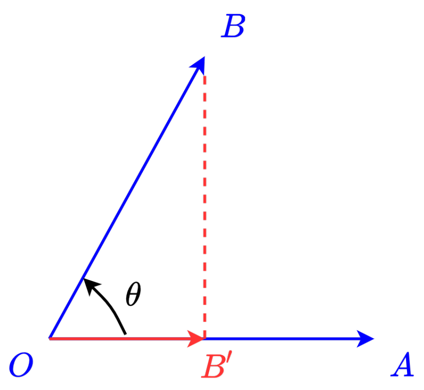

FIGURE 3 – Produit scalaire entre $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$, avec projection $\overrightarrow{OB'}$.

La Figure 3 permet de visualiser l'opération produit scalaire entre les vecteur $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$:

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} &= \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \cos(\widehat{\overrightarrow{OA}, \overrightarrow{OB}}) \\ &= \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{OB}\right\| \cos\theta \\ &= \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{OB'}\right\|\end{aligned}$$

où $\overrightarrow{OB'}$ est la projection du vecteur $\overrightarrow{OB}$ sur $\overrightarrow{OA}$. Le produit scalaire permet donc de **calculer la norme de la projection d'un vecteur**.

Quelques remarques concernant le produit scalaire :

- Pour $\theta = \pi/2$, c'est à dire $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{OB}$ (orthogonalité) on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = 0$
- Lorsque $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de même sens, on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{OB}\right\|$
- Lorsque $\overrightarrow{OA}$ et $\overrightarrow{OB}$ sont colinéaires et de sens opposé, on a $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = -\left\|\overrightarrow{OA}\right\| \left\|\overrightarrow{OB}\right\|$

En reprenant la Figure 2 et l'Eq.1, on peut extraire les composantes d'un vecteur en prenant son produit scalaire avec les vecteurs de base $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$a_i = \vec{a} \cdot \vec{e_i}, \quad i = x, y, z. \tag{10}$$

1.5 Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ non colinéaires se définit comme l'unique vecteur $\vec{w} = \vec{u} \wedge \vec{v}$ tel que :
- le vecteur $\vec{w}$ est **orthogonal** aux deux vecteurs donnés $\Longrightarrow$ direction de $\vec{w}$;
- la base $(\vec{u}, \vec{v}, \vec{w})$ est de **sens direct** $\Longrightarrow$ sens de $\vec{w}$;
- $||\vec{w}|| = ||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}|| \cdot |\sin(\widehat{\vec{u}, \vec{v}})| \Longrightarrow$ norme de $\vec{w}$.

Si $\vec{u}$ est colinéaire à $\vec{v}$ alors $\vec{u} \wedge \vec{v} = 0$ (en particulier $\vec{u} \wedge \vec{u} = 0$).

Le produit vectoriel de deux vecteurs se calcule par le produit croisé des composantes deux par deux selon la méthode suivante :

$$\vec{a} \left| \begin{array}{l} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{array} \right. \quad ; \quad \vec{b} \left| \begin{array}{l} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{array} \right. \quad \Longrightarrow \quad \vec{a} \wedge \vec{b} \left| \begin{array}{c} a_2 b_3 - a_3 b_2 \\ -a_1 b_3 + a_3 b_1 \\ a_1 b_2 - a_2 b_1 \end{array} \right. \tag{11}$$

La formule obtenue en Eq.11 implique que $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$. Il est utile de connaître les identités du produit vectoriel entre les vecteurs de base du repère cartésien orthonormé direct $(\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$:

$$\vec{e}_x \wedge \vec{e}_y = \vec{e}_z \tag{12}$$

$$\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \vec{e}_x \tag{13}$$

$$\vec{e}_z \wedge \vec{e}_x = \vec{e}_y \tag{14}$$

2 Trigonométrie

En physique, nous utiliserons souvent les angles en **radians**. Le cercle complet fait 2π radians. Cette définition permet de relier directement la longueur de l'arc de cercle à l'angle et au rayon par $l = R\theta$ avec θ en radians.

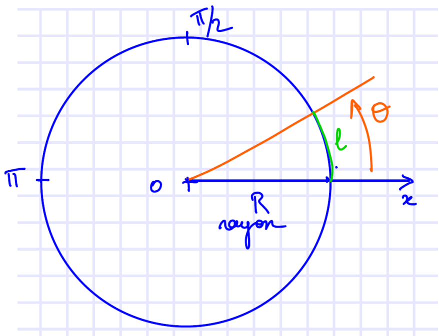

FIGURE 4 – Cercle trigonométrique et longueur d'arc. θ est défini par rapport à l'axe (Ox).

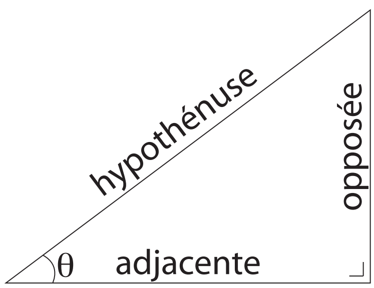

FIGURE 5 – Trigonométrie dans le triangle rectangle

Les quantités trigonométriques sin, cos, tan sont reliées aux longueurs des côtés du triangle rectangle de la manière suivante :

$$\sin\theta = \frac{\text{opposé}}{\text{hypothénuse}} \tag{15}$$

$$\cos\theta = \frac{\text{adjacent}}{\text{hypothénuse}} \tag{16}$$

$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{\text{opposé}}{\text{adjacent}} \tag{17}$$

Les identités trigonométriques peuvent s'avérer utiles pour la résolution de problèmes, en particulier :

- $\sin(\pi - \theta) = \sin(\theta)$, $\cos(\pi - \theta) = -\cos(\theta)$
- $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta)$, $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin(\theta)$
- $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$, pour tout angle θ.
- $\tan^2\theta = \dfrac{1}{\cos^2\theta} - 1$
- $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$
- $\sin(a + b) = \sin a \cos b + \sin b \cos a$

Il est courant d'utiliser **vecteurs et trigonométrie** en même temps, par exemple lorsque vous aurez à trouver les composantes d'un vecteur dont vous connaissez la norme, et l'angle qu'il fait par rapport à un axe de référence. En d'autre termes, la projection d'un vecteur donné sur des axes (pas forcément verticaux ou horizontaux).
Sur la Figure 6, on décompose le poids $\vec{P}$ en deux composantes selon les axes x et y. L'angle d'inclinaison α peut être reporté à plusieurs endroits sur la figure afin d'en déduire $\vec{P} = P \sin\alpha\, \vec{e}_x - P \cos\alpha\, \vec{e}_y$.

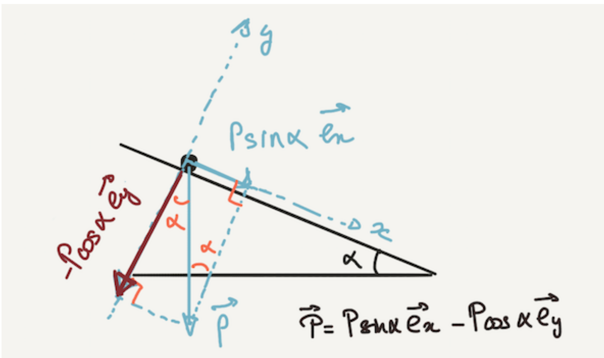

FIGURE 6 – Projection du poids $\vec{P}$ sur les axes inclinés x et y

3 Dérivées, primitives, intégrales

En physique, nous aurons souvent besoin d'analyser des fonctions dépendant de variables. Pour cela, les outils dérivée, primitive et intégrale seront utiles.

3.1 Dérivée

Soit une fonction $y = f(x)$ représentée par une courbe $y = f(x)$ dans le plan. La corde prise entre deux points a une pente caractérisée par l'angle θ (voir Figure 7).

$$\tan\theta = \frac{\Delta y}{\Delta x}$$

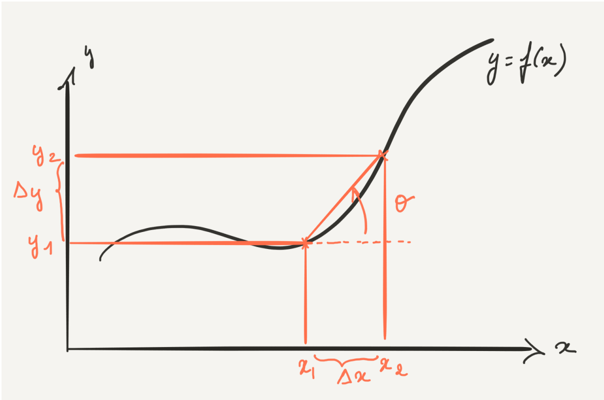

FIGURE 7 – Ici, le point 1 dénote le point de coordonnées (x_1, y_1) et le point 2 celui de coordonnées (x_2, y_2). On a $\Delta y = y_2 - y_1$ et $\Delta x = x_2 - x_1$.

La **dérivée de la fonction** f (notée f') au point 1 est la limite de $\tan\theta = \Delta y/\Delta x$ quand le point 2 tend vers le point 1. C'est donc la **pente de la tangente à la courbe**.

$$f'(x_1) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{dx \to 0} \frac{f(x_1 + dx) - f(x_1)}{dx} = \frac{df}{dx} \tag{18}$$

En physique on utilisera souvent la **variation infinitésimale de la fonction** f donnée par :

$$df = f(x + dx) - f(x) \tag{19}$$

pour une variation dx de x.
Le tableau suivant rappelle les dérivées de certaines fonctions usuelles :

Fonction	Dérivée
$\cos x$	$-\sin x$
$\sin x$	$\cos x$
$\tan x$	$1/\cos^2 x$
$\ln x$	$1/x$
e^x	e^x
x^n	nx^{n-1}

TABLE 1 – Dérivées de fonctions usuelles

Pour deux fonctions f et g, on a les règles suivantes :
- Produit : $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$
- Composition : $(f(g(x))' = g'(x)f'(g(x))$

Ces deux règles permettent d'en déduire beaucoup d'autres : par exemple f/g qui est le produit de f et de la composition de $1/x$ avec g.

3.2 Primitive

Le calcul de la primitive de $f(x)$, est "la manoeuvre inverse" du calcul de la dérivée. En effet, on cherche la fonction $F(x)$ telle que $F'(x) = f(x)$. Étant donné que la dérivée d'une constante est nulle, on peut ajouter n'importe quelle constante à F ça ne change rien, donc la primitive F de f est définie à une constante près : pour $\tilde{F} = F + c$ on a toujours $\tilde{F}'(x) = f(x)$.

Par exemple, pour $f(x) = \cos x$, une primitive de f est $F(x) = \sin x + A$, avec A une constante d'intégration. De plus, si la valeur de F en un point particulier est connue : $F(x_0) = F_0$ alors on peut déterminer $A = F_0 - \sin x_0$.

3.3 Intégrale

Lorsque l'on cherche à calculer l'aire $\mathcal{A}$ sous la courbe de $f(x)$ entre un point $x = a$ et un point $x = z$, on utilisera l'outil intégrale.

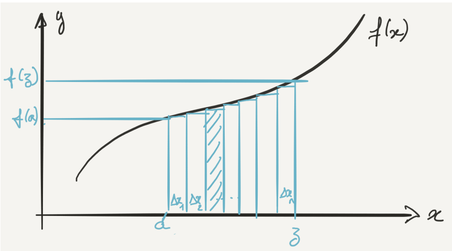

FIGURE 8 – Visualisation de l'intégrale d'une fonction et des petits rectangles de largeur Δx.

Cette aire peut être approximée par la somme des petits rectangles de hauteur $f(x_i)$ et de largeur Δx_i :

$$\mathcal{A} \simeq \sum_i f(x_i)\Delta x_i$$

Et en faisant tendre Δx vers 0 on obtient la formule de l'intégrale, où F est la primitive de f :

$$\mathcal{A} = \int_a^z f(x)dx = F(z) - F(a) \tag{20}$$

4 Développement limité

Enfin, le dernier outil introduit est le développement limité (ou développement en série de Taylor). Ceci nous permettra de remplacer une fonction compliquée par un polynôme plus simple à manipuler. Le développement limité de f autour d'un point x_0 est donné par :

$$f(x_0 + \varepsilon) \simeq f(x_0) + \frac{d}{dx}f(x_0)\varepsilon + \cdots + \frac{\varepsilon^n}{n!}\frac{d^n}{dx^n}f(x_0) \tag{21}$$

Il s'agit d'un polynôme de degré n en ε, étant donné que les dérivées de f en x_0 sont des valeurs.

Pour donner un exemple, on calcule le développement limité de $f(x) = (1+x)^n$ pour x petit, c'est à dire autour de $x_0 = 0$. Les deux premières dérivées de f sont $f'(x) = n(1+x)^{n-1}$ et $f''(x) = n(n-1)(1+x)^{n-2}$. On a alors :

$$f(x_0 + \varepsilon) = f(0) + \varepsilon f'(0) + \frac{\varepsilon^2}{2}f''(0) + \ldots$$

d'où on déduit : $$f(\varepsilon) = 1 + n\varepsilon + n(n-1)\frac{\varepsilon^2}{2} + \ldots$$

en remplaçant ε par x : $$f(x) = 1 + nx + n(n-1)\frac{x^2}{2} + \ldots$$

pour x proche de 0, $x^2 \simeq 0$: $$f(x) \simeq 1 + nx.$$

Le tableau suivant rappelle certains développement limités utiles autour de $x_0 = 0$:

Fonction	Développement limité
$\cos x$	$1 - x^2/2$
$\sin x$	x
$\tan x$	x
$\ln(1+x)$	x
e^x	$1+x$
$(1+x)^n$	$1+nx$
$1/(1+x)^n$	$1-nx$

TABLE 2 – Développement limité en 0 de fonctions usuelles