

Exercices

Exercice 1

Le vecteur position d'une particule varie dans le temps suivant l'équation

$$\vec{r} = 3\vec{e}_x + 6t^2\vec{e}_y$$

Où t est en secondes et les distances données en mètres.

- Trouver la vitesse de la particule en fonction du temps
- Déterminer les accélérations vectorielle et scalaire de la particule
- Calculer la position et la vitesse de la particule à $t = 1$ s

Exercice 2

Calculer :

- la vitesse d'un point à l'équateur liée à la vitesse de rotation de la Terre ;
- l'accélération centripète en ce même point ;
- la durée du jour que devrait avoir la Terre pour que l'accélération centripète à l'équateur soit égale à g ;
- la vitesse de la Terre dans sa rotation autour du Soleil.

Indication : la lumière du Soleil met 8 minutes pour atteindre la Terre.

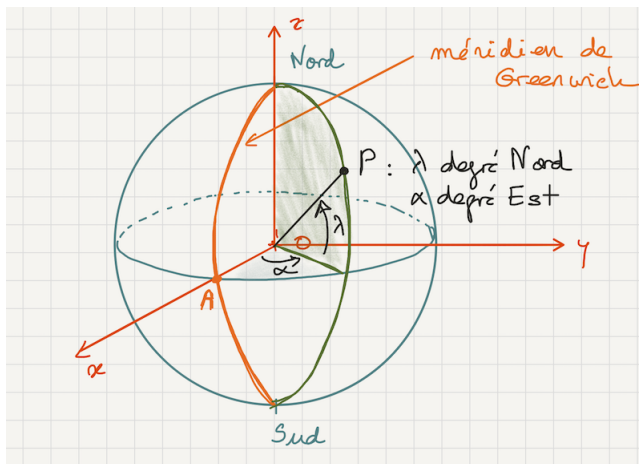
Rayon de la Terre, 6380 km.

Exercice 3

Le TGV roule à une vitesse de 300 km/h. Quel est le rayon minimal de la voie permettant que les passagers ne soient pas soumis à une accélération centripète de plus de $0.05g$? (avec $g = 9.81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$)

Exercice 4

Les coordonnées terrestres utilisent la latitude et la longitude. La latitude est un angle λ entre 0 et 90° mesuré depuis l'équateur soit vers le Nord soit vers le Sud (ce qui est précisé). La longitude est un angle entre 0 et 180° mesuré depuis un méridien origine choisi pour traverser la ville de Greenwich au Royaume Uni, soit vers l'Est, soit vers l'Ouest.



Prenons 3 repères d'origine O , centre de la Terre :

- un repère cartésien tel que l'Equateur est dans le plan (O, x, y) . L'axe (Oz) positif pointe vers le Nord et l'axe (Ox) traverse le méridien de Greenwich (côté x positifs).
- un repère de coordonnées cylindriques (lié au repère cartésien comme dans le cours)
- un repère de coordonnées sphériques (lié au repère cartésien comme dans le cours)

Donner les coordonnées des points suivants dans chacun de ces 3 systèmes (on appelle R_T le rayon de la Terre :

- Le pôle Nord
- Le pôle Sud
- A situé à l'Equateur, sur le méridien de Greenwich
- B situé à l'Equateur à 30° Est
- C situé sur le méridien de Greenwich à 60° Nord
- D situé sur le méridien de Greenwich à 45° S
- Quito situé sur l'équateur à 78° O
- Lausanne (46° N, 6.6° E)
- Montréal (45° N 75° O)

Réponses

Solution 1

$$\text{a) } \vec{v} = 12t\vec{e}_y \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \Leftrightarrow \vec{v} = \begin{pmatrix} 0 \\ 12t \end{pmatrix} \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\text{b) } \vec{a} = 12\vec{e}_y \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\text{c) } \vec{r}(t = 1\text{s}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \end{pmatrix}, \vec{v}(t = 1\text{s}) = \begin{pmatrix} 0 \\ 12 \end{pmatrix}$$

Solution 2

1. La vitesse peut être calculée en sachant que la Terre fait un tour sur elle-même en 24h :

$$v = R\omega = 2\pi Rf = \frac{R \cdot 2\pi}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 6380000}{24 \cdot 60 \cdot 60} = 463.97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

2. Nous connaissons l'accélération centripète, donnée par :

$$a_c = \frac{v^2}{R} = \frac{R^2\omega^2}{R} = R\omega^2 = R\frac{4\pi^2}{T^2}$$

Or dans notre cas :

$$R = 6380000 \text{ m}$$

Et :

$$v = 463.97 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Donc :

$$a_c = 6380000 \frac{4\pi^2}{(24 \cdot 60 \cdot 60)^2} = 0.034 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$$

3. On cherche à avoir $a_n = g$:

$$a_n = \frac{v^2}{R} = \frac{(R\omega)^2}{R} = R\omega^2 = g \Rightarrow \omega = \sqrt{\frac{g}{R}}$$

$$\text{quelques identités :} \quad T = \frac{1}{f} \quad \omega = 2\pi f \quad f = \frac{\omega}{2\pi}$$

et donc :

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{R}{g}} = 2\pi\sqrt{\frac{6380 \cdot 10^3}{9.81}} = 2\pi\sqrt{\frac{6.38}{9.81}} \cdot 10^3$$

Donc, $T \approx 5 \cdot 10^3$ s, soit 84 minutes.

4. Pour la vitesse de la Terre autour du Soleil, on procède de la manière similaire qu'au point 2, sachant que la vitesse de la lumière est $c = 300000 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$:

$$8 \text{ minutes-lumières} = 8 \cdot 60 \cdot 3 \cdot 10^8 = 1.44 \cdot 10^{11} \text{ m}$$

Donc :

$$v = \frac{2\pi R}{T} = \frac{2 \cdot \pi \cdot 1.44 \cdot 10^{11}}{365 \cdot 24 \cdot 60 \cdot 60} = 28690 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

Solution 3

Nous connaissons l'accélération centripète (également appelée accélération normale), donnée par :

$$a_c = \frac{v^2}{R} \leq 0.05g \Rightarrow \frac{v^2}{0.05g} \leq R$$

Puisque $v = 300 \text{ km/h} = 83.33 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, nous obtenons $R \geq 14200 \text{ m}$.

Le rayon minimal de la voie du TGV doit être plus de 14km pour que ses passagers ne soient pas soumis à une accélération centripète supérieure à 0.05g !

Solution 4

	Cartésien	Cylindrique	Sphériques
pôle Nord	$x=0; y=0; z=R_T$	$\rho=0 \quad z=R_T$	$r=R_T; \theta=0$
pôle Sud	$x=0; y=0; z=-R_T$	$\rho=0 \quad z=-R_T$	$r=R_T; \theta=180^\circ$
A	$x=R_T; y=0; z=0$	$\rho=R_T; \varphi=0; z=0$	$r=R_T; \theta=90^\circ; \varphi=0$
B	$x=R_T \frac{\sqrt{3}}{2}; y=\frac{R_T}{2}; z=0$	$\rho=R_T; \varphi=30^\circ; z=0$	$r=R_T; \theta=90^\circ; \varphi=30^\circ$
C	$x=\frac{R_T}{2}; y=0; z=R_T \frac{\sqrt{3}}{2}$	$\rho=\frac{R_T}{2}; \varphi=0; z=R_T \frac{\sqrt{3}}{2}$	$r=R_T; \theta=30^\circ; \varphi=0$
D	$x=\frac{\sqrt{2}R_T}{2}; y=0; z=-\frac{\sqrt{2}R_T}{2}$	$\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T; \varphi=0; z=-\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$r=R_T; \theta=135^\circ; \varphi=0$
Quito	$x=0.2R_T; y=-0.18R_T; z=0$	$\rho=R_T; \varphi=282^\circ; z=0$	$r=R_T; \theta=90^\circ; \varphi=282^\circ$
Lausanne	$x=0.7R_T; y=0.08R_T; z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T; \varphi=6.6^\circ; z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$r=R_T; \theta=44^\circ; \varphi=6.6^\circ$
Montréal	$x=0.18R_T; y=-0.68R_T; z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$\rho=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T; \varphi=285^\circ; z=\frac{\sqrt{2}}{2}R_T$	$r=R_T; \theta=45^\circ; \varphi=285^\circ$