VIII - Oscillateur harmonique

Prof. Cécile Hébert

9 août 2021

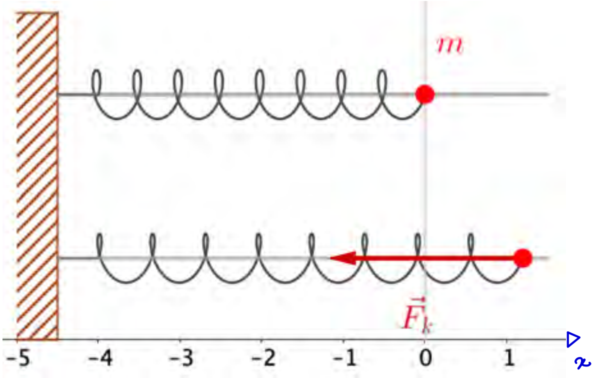
Plan du cours

I - Cinématique
II - Référentiel accélérés
III - Lois de Newton
IV - Balistique – effet d'une force constante et uniforme
V - Forces ; application des lois de Newton
VI - Travail, Energie, principes de conservation
VII - Chocs, systèmes de masse variable
VIII - Oscillateur harmonique
IX - Moment cinétique ; Gravitation
X - Solide indéformable
XI - Application du solide indéformable

Table des matières

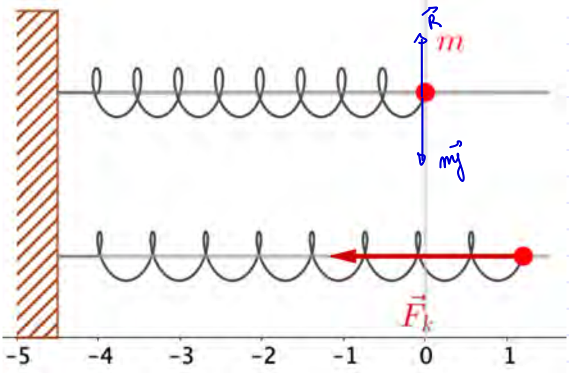
1. Oscillations libres non amorties

Une masse m glisse sans frottements sur un axe horizontal. Elle est retenue par un ressort de raideur k et de longueur au repos l_0 fixé à son autre extrémité.
On tire la masse vers la droite et à $t = 0$ on la lâche sans vitesse initiale.



but : étudier le mouvement de m

$x(t)$ à trouver



$\sum \vec{F} = m\vec{a}$

Forces : $\vec{F}_k$, $m\vec{g}$, $\vec{R}$ $\quad \vec{R} = -m\vec{g}$

$\sum \vec{F} = \vec{F}_k + \underbrace{m\vec{g} + \vec{R}}_{\vec{0}} = \vec{F}_k = -kx\,\vec{e}_x$

$\vec{a} = a_x\,\vec{e}_x = \ddot{x}\,\vec{e}_x$

$m\ddot{x}\,\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x \qquad m\ddot{x} + kx = 0$

$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$

$\ddot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ inconnue $x(t)$

$\boxed{\ddot{x}(t) + \Omega_0^2 x(t) = 0}$ équation différentielle linéaire d'ordre 2

$\boxed{\Omega_0 \text{ pulsation propre du système}}$

Equation différentielles de type $\ddot{x}(t) + \Omega_0^2\, x(t) = 0$

$x(t) = A\cos\Omega_0 t \rightarrow \dot{x}(t) = -A\Omega_0 \sin\Omega_0 t \rightarrow \ddot{x}(t) = -A\Omega_0^2 \cos\Omega_0 t$ $\quad \ddot{x}(t) + \Omega_0^2\, x(t) = 0$:)

$x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$ solution de l'équation différentielle

A et B constantes d'intégration dépendent des conditions initiales

$x(t) = C\cos(\Omega_0 t + \varphi)$ autre écriture de la même solution.

$C\left[\cos\Omega_0 t\cos\varphi - \sin\Omega_0 t\sin\varphi\right] = C\cos\varphi\cos\Omega_0 t + \left[-C\sin\varphi\right]\sin\Omega_0 t$

$x(t) = D\sin(\Omega_0 t + \varphi)$

ici prenons $x(t) = A\cos\Omega_0 t + B\sin\Omega_0 t$

Avec les conditions initiales

$$x(t=0) = x_0 \qquad \dot{x}(t=0) = 0$$

$x(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$ $\quad$ $\dot{x}(t) = -A\Omega_0 \sin \Omega_0 t + B\Omega_0 \cos \Omega_0 t$

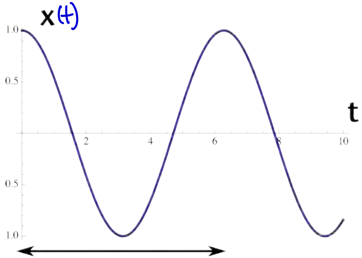
$\dot{x}(0) = \cancel{-A\Omega_0 \cdot 0} + B\Omega_0 = B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$x(t) = A \cos \Omega_0 t$ $\quad$ $x(0) = x_0 = A$

$\boxed{x(t) = x_0 \cos \Omega_0 t}$ $\quad$ $\Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ pulsation propre

Ω_0 grand $\Rightarrow$ oscillations rapides
Ω_0 faible $\Rightarrow$ oscillations lentes.

Position en fonction du temps



T_0 période propre

T_0 période des oscillations

$$T = \frac{2\pi}{\Omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$$

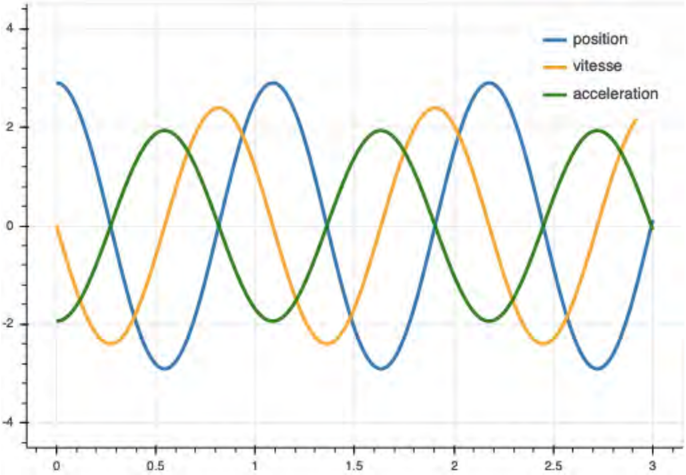
$$x(t) = x_0 \cos \Omega_0 t$$

$$\dot{x}(t) = -x_0 \Omega_0 \sin \Omega_0 t$$

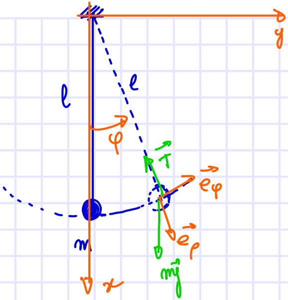
$$\ddot{x}(t) = -x_0 \Omega_0^2 \cos \Omega_0 t$$

T_0 indépendant de x_0. Oscillateur harmonique.

Allure des courbes $x(t)$, $v(t)$, et $a(t)$.



Autre exemple d'oscillateur : le pendule simple



système : masse m référentiel labo

coordonnées polaires (ρ, φ) vecteurs $(\vec{e}_\rho, \vec{e}_\varphi)$

Forces : poids $m\vec{g}$ $\vec{T}$ tension

$$\vec{T} = -T\,\vec{e}_\rho \qquad m\vec{g} = mg\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - mg\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

$$\vec{a} = (\cancel{\ddot{\rho}} - \rho\dot{\varphi}^2)\,\vec{e}_\rho + (\rho\ddot{\varphi} + \cancel{2\dot{\rho}\dot{\varphi}})\,\vec{e}_\varphi \qquad \dot{\rho} = \ddot{\rho} = 0$$

$$m\vec{a} = -m\rho\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho + m\rho\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi$$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = -m l\dot{\varphi}^2\,\vec{e}_\rho + m l\ddot{\varphi}\,\vec{e}_\varphi = -T\,\vec{e}_\rho + mg\cos\varphi\,\vec{e}_\rho - mg\sin\varphi\,\vec{e}_\varphi$$

sur $\vec{e}_\varphi$: $\cancel{m} l\ddot{\varphi} = -\cancel{m} g\sin\varphi$ $\ddot{\varphi} + \frac{g}{l}\sin\varphi = 0$

$\ddot{\varphi} + \frac{g}{l} \sin \varphi = 0$ équation différentielle $\varphi(t)$, $\ddot{\varphi}(t)$

Pas linéaire

$\Rightarrow$ ce n'est pas un oscillateur harmonique

$\varphi \ll 1 \Rightarrow \sin \varphi \simeq \varphi$

$$\ddot{\varphi}(t) + \frac{g}{l} \varphi(t) = 0 \qquad \Omega_0^2 = \frac{g}{l} \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

$$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0$$

$\ddot{\varphi} + \Omega_0^2 \varphi = 0$ $\Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$ à $t = 0$ $\varphi_0 = \varphi(0)$ $\dot{\varphi}(0) = 0$

$\varphi(t) = A \cos \Omega_0 t + B \sin \Omega_0 t$ $\dot{\varphi}(t) = -A \Omega_0 \sin \Omega_0 t + B \Omega_0 \cos \Omega_0 t$

$\dot{\varphi}(0) = 0 + B\Omega_0 = 0 \Rightarrow B = 0$

$\varphi(t) = A \cos \Omega_0 t$ $\varphi(0) = \varphi_0 = A \Rightarrow$ $\boxed{\varphi(t) = \varphi_0 \cos \Omega_0 t \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}}$

oscillateur harmonique

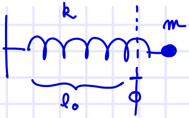
$\varphi \ll 1 \Rightarrow$ oscillateur harmonique

OK si $\sin \varphi \simeq \varphi$ $\varphi = 20°$ $= 0{,}35$ rad $\sin(0{,}35) = 0{,}343$

$\varphi = 30°$ $= 0{,}52$ rad $\sin(0{,}52) = 0{,}5$

2. Oscillateurs non amortis et énergie

Cas de l'oscillateur harmonique avec un ressort



$$E_m = E_p^k + E_c = \frac{1}{2} k x^2 + \frac{1}{2} m v^2$$

lachons la masse de x_0 à $t=0$

$$x(t) = x_0 \cos \Omega_0 t \qquad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

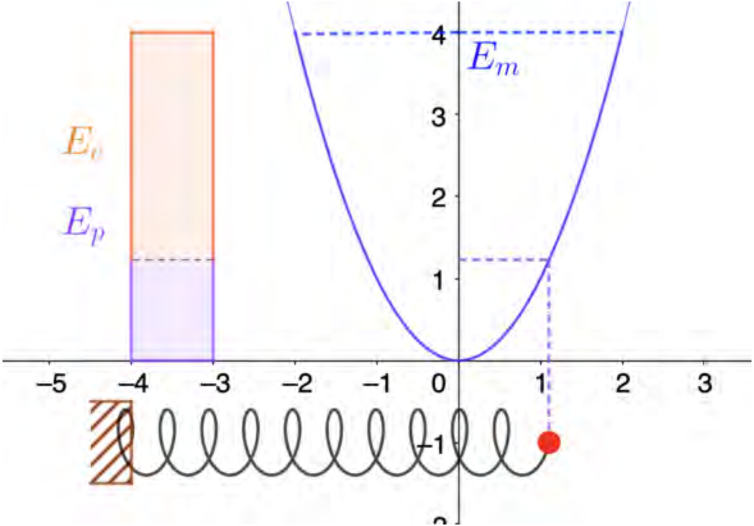
$$v(t) = \dot{x}(t) = -\Omega_0 x_0 \sin \Omega_0 t$$

$$E_m = \frac{1}{2} k x_0^2 \cos^2 \Omega_0 t + \frac{1}{2} m \Omega_0^2 x_0^2 \sin^2 \Omega_0 t$$

$$= \frac{1}{2} x_0^2 \left[k \cos^2 \Omega_0 t + \cancel{m} \frac{k}{\cancel{m}} \sin^2 \Omega_0 t \right] = \frac{1}{2} k x_0^2 \left[\underbrace{\cos^2 \Omega_0 t + \sin^2 \Omega_0 t}_{1} \right] = \frac{1}{2} k x_0^2$$

$$\boxed{E_m = \frac{1}{2} k x_0^2}$$ $\Rightarrow$ indépendante du temps = constante

elle est conservée :)



E_m
E_c
E_p
4
3
2
1
−5
−4
−3
−2
−1
0
1
2
3
−1

Oscillateur quelconque

Cas à 1 dimension, pour une force qui dérive d'un potentiel :

$$F = -\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x}$$

$\vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\,\vec{e_x}$

$F = m\ddot{x}$

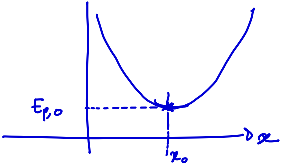
$$m\ddot{x} = -\frac{dE_p}{dx}$$

$E_p(x)$

C'est un autre moyen d'obtenir l'équation différentielle.

Pour avoir des oscillations, il faut être autour d'un *minimum* de E_p

Oscillateurs harmoniques



Pour que l'oscillateur soit harmonique, il faut et il suffit que

$$E_p = A(x - x_0)^2 + E_{p,0}$$

avec A constante positive.

Démonstration $\quad m\ddot{x} = -\frac{dE_p}{dx} = -A\,2(x-x_0) = -2A(x-x_0)$

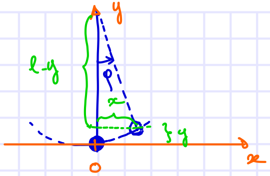
$$m\ddot{x} = -2A(x-x_0) \Rightarrow m\ddot{x} + 2A(x-x_0) = 0$$

Changement de repère $\quad X = x - x_0 \qquad \dot{X} = \dot{x} \qquad \ddot{X} = \ddot{x}$

$$m\ddot{X} + 2A(X) = 0 \qquad \ddot{X} + \frac{2A}{m}X = 0 \qquad \omega_0^2 = \frac{2A}{m} \qquad \ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$$

Oscillateur harmonique $\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{2A}{m}}$ car $A > 0$ ☺

Exemple : pendule simple



Force dérivant d'un potentiel = poids $\quad E_p = mgy$

Tension : ne travaille pas

$$\ell^2 = (\ell - y)^2 + x^2 \qquad (\ell - y)^2 = \ell^2 - x^2$$

$$\ell - y = \pm\sqrt{\ell^2 - x^2} \qquad \ell - y = \sqrt{\ell^2 - x^2} \qquad y = \ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}$$

$$E_p = mg\left[\ell - \sqrt{\ell^2 - x^2}\right] = E_p(x)$$

ce n'est pas une parabole ! oscillateur anharmonique ¡

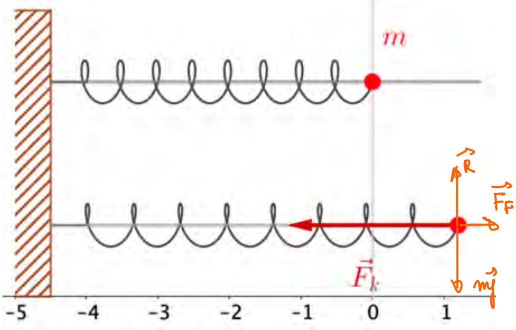
Petites oscillations : $x \ll \ell \qquad \frac{x}{\ell} \ll 1$

$$E_p = mg\ell\left[1 - \sqrt{1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2}\right] = mg\ell\left[1 - \left[1 - \left(\frac{x}{\ell}\right)^2\right]^{1/2}\right] = mg\ell\left[1 - \left[1 - \varepsilon\right]^{1/2}\right] \qquad \varepsilon = \left(\frac{x}{\ell}\right)^2 \ll 1$$

$$= mg\ell\left[\cancel{1} - \cancel{1} + \frac{1}{2}\varepsilon\right] = \frac{mg\cancel{\ell}}{2}\frac{x^2}{\ell^{\cancel{2}}} = \frac{mg}{2\ell}x^2 \qquad E_p = \frac{mg}{2\ell}x^2$$

3. Oscillations amorties

On considère l'oscillateur du VIII - 1 mais cette fois il subit un frottement visqueux en régime laminaire.



Force de frottement visqueux

$$\vec{F}_f = -b_l\vec{v} = -K\eta\,\dot{x}\,\vec{e_x}$$

avec $\vec{v}$ vitesse.

On cherche $x(t)$

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = \underbrace{\cancel{\vec{P} + \vec{R}}}_{\vec{0}} + \vec{F}_f + \vec{F}_k = -b_\ell \dot{x}\vec{e_x} - kx\vec{e_x} = m\ddot{x}\vec{e_x}$$

$$m\ddot{x} = -b_\ell \dot{x} - kx$$

$$\ddot{x} + \frac{b_l}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

$$\boxed{\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0} \quad \text{avec} \quad \Omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \qquad 2\gamma = \frac{b_l}{m} = \frac{K\eta}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Equation homogène

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$

inconnue λ

Méthode générale de résolution d'une telle équation :

$\Delta' = \gamma^2 - \Omega_0^2$

Cas 1) $\Delta' = 0$ $\gamma = \Omega_0$ L'équation de degré deux a une racine double $\lambda = \gamma \; (= \Omega_0)$

$x(t) = (A + Bt)\, e^{-\gamma t}$

solution si $\gamma = \Omega_0$

Si $\gamma \neq \Omega_0$ L'équation homogène admet deux racines λ_1 et λ_2

Solution de l'équadiff $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

Cas 2) $\Delta' > 0$ $\gamma^2 > \Omega_0^2$ amortissement fort λ_1 et λ_2 réels

$\lambda_{1,2} = \dfrac{-\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}}{1} \Rightarrow \lambda_1 = -\gamma + \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$, $\lambda_2 = -\gamma - \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$ $x(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

$\boxed{\text{Cas } 3}$ $\quad \gamma < \Omega_0 \qquad \Delta' < 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta' = -(\Omega_0^2 - \gamma^2) \qquad \Delta'^{1/2} = \pm i \underbrace{\sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}}_{\omega} = \pm i\,\omega$

$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 \qquad \lambda_{1,2} = -\gamma \pm i\omega$

$$x(t) = A e^{(-\gamma + i\omega)t} + B e^{(\gamma - i\omega)t} = A e^{-\gamma t} e^{i\omega t} + B e^{-\gamma t} e^{-i\omega t}$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[A e^{i\omega t} + B e^{-i\omega t}\right]$$

$A = a_1 + i a_2$

$B = b_1 + i b_2$

$e^{i\omega t} = \cos\omega t + i\sin\omega t$

$e^{-i\omega t} = \cos\omega t - i\sin\omega t$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[(a_1 + i a_2)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (b_1 + i b_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\right]$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[(a_1 + i a_2)(\cos\omega t + i\sin\omega t) + (b_1 + i b_2)(\cos\omega t - i\sin\omega t)\right]$$

$$x(t) = e^{-\gamma t}\left[a_1\cos\omega t + i a_1 \sin\omega t + i a_2\cos\omega t - a_2\sin\omega t + b_1\cos\omega t - i b_1\sin\omega t + i b_2\cos\omega t + b_2\sin\omega t\right]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[a_1\cos\omega t - a_2\sin\omega t + b_1\cos\omega t + b_2\sin\omega t\right]$$

$$= e^{-\gamma t}\left[\underbrace{(a_1 + b_1)}_{A'}\cos\omega t + \underbrace{(-a_2 + b_2)}_{B'}\sin\omega t\right] = e^{-\gamma t}\left[A'\cos\omega t + B'\sin\omega t\right]$$

$$\boxed{x(t) = A\, e^{-\gamma t}\left(\cos(\omega t + \varphi)\right) \qquad \omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2} \qquad \Omega_0 > \gamma}$$

A et φ constantes d'intégrations

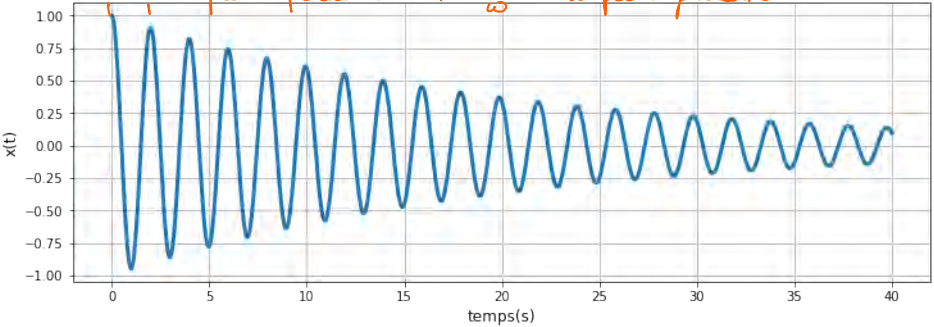
$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$$

Si $\gamma < \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$$

Avec A et φ les constantes d'intégration et $\omega^2 = \Omega_0^2 - \gamma^2$

T pseudo période $T = \frac{2\pi}{\omega}$ ω pseudopulsation



Régime sous-critique

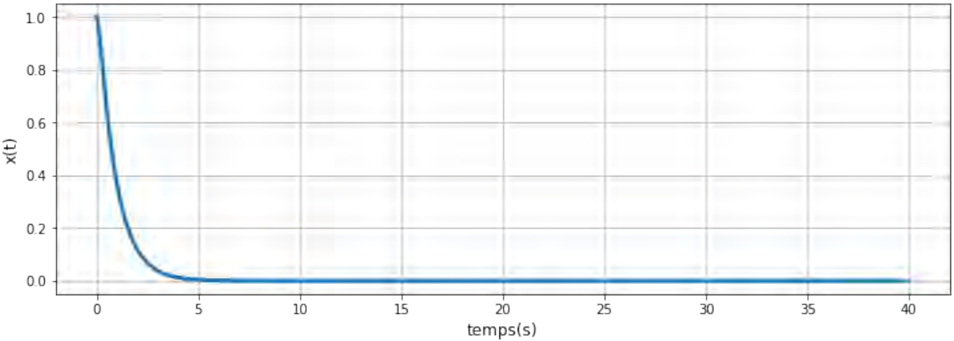
Si $\gamma > \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}$$

avec λ_1 et λ_2 racines de l'équation du second degré en λ

$$\lambda_{1,2} = -\gamma \pm \sqrt{\gamma^2 - \Omega_0^2}$$

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \Omega_0^2 = 0$$



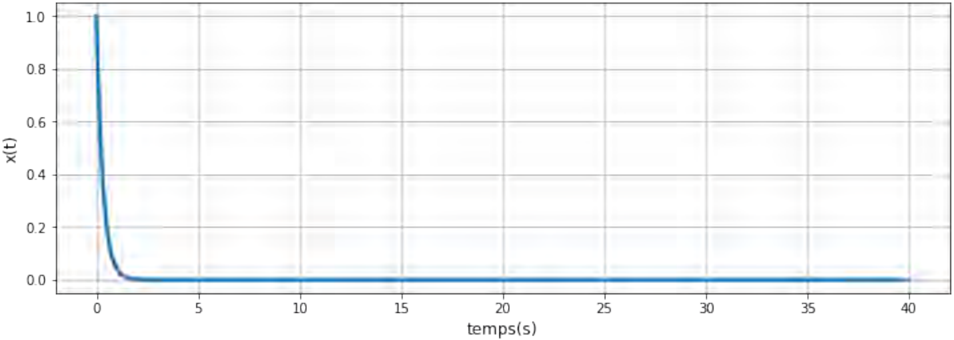
régime sur-critique

Si $\gamma = \Omega_0$ les solutions sont du type

$$x(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$$

On remarque que $-\gamma$ est racine double de l'équation du second degré en λ

$$\lambda^2 + 2\gamma\lambda + \gamma^2 = 0$$



régime critique

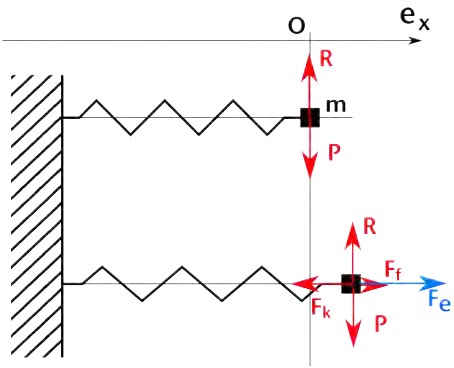
4. Oscillations forcées

On applique au système une force qui a une forme sinusoïdale :

$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$\vec{F_e} = F_0 \cos(\omega_e t)\, \vec{e_x}$

ω_e : pulsation d'excitation



$\vec{R}$ $\vec{P}$

$\vec{F_k} = -k x \vec{e_x}$

$\vec{F_f} = -b_e \vec{v} = -b_e \dot{x} \vec{e_x}$

Nous cherchons $x(t)$ $\qquad \sum \vec{F} = m\vec{a} = m\ddot{x}\,\vec{e}_x$

$$m\ddot{x}\,\vec{e}_x = -kx\,\vec{e}_x - b_e\dot{x}\,\vec{e}_x + F_0\cos(\omega_e t)\,\vec{e}_x + \underbrace{\vec{P} + \vec{R}}_{\vec{0}}$$

$$\ddot{x} + \frac{b_e}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t) \qquad \Omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad 2\gamma = \frac{b_e}{m}$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega_e t)$$

C'est une équation différentielle linéaire d'ordre 2 **avec second membre**. Ce second membre est une fonction du temps.

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f(t)$$

La méthode est de chercher :

1 – La solution **générale** de l'équation sans 2d membre (donc avec les constantes d'intégration. $x_2(t)$

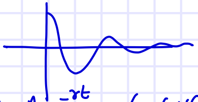
2 – **Une** solution particulière de l'équation avec 2d membre (donc une fonction qui "marche"). $x_1(t)$

La solution **générale** de l'équation **avec** second membre est :

$$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$$

x_2 solution générale de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ → cf VIII-3 !

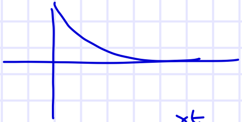
Si $\gamma < \Omega_0$



$x_2(t) = A e^{-\gamma t}\cos(\omega t + \varphi)$

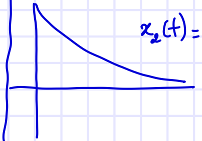
$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$

Si $\gamma = \Omega_0$



$x_2(t) = (A + Bt)e^{-\gamma t}$

Si $\gamma > \Omega_0$



$x_2(t) = A e^{\lambda_1 t} + B e^{\lambda_2 t}$

λ_1 et λ_2 solutions de l'équation homogène

Ces trois solutions tendent vers 0 quand $t \to \infty$!

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ $\qquad t \to \infty \qquad x(t) \simeq x_1(t)$ ⇒ régime permanent

$x_1(t) = A(\omega_e)\cos[\omega_e t + \varphi(\omega_e)]$ ←

proposition de solution

- $x_1(t)$ oscillatoire de pulsation ω_e
- l'amplitude de x_1 dépend de ω_e
- $x_1(t)$ déphasé par rapport à l'excitation
- le déphasage de x_1 dépend de ω_e

Nous allons donc supposer que cette solution particulière $x_1(t)$ est :

$$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$$

Solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = f_0 \cos(\omega_e t)$ avec $f_0 = F_0/m$

Passons en notation complexe

$$ae^{i\theta} = a\cos\theta + i\sin\theta$$

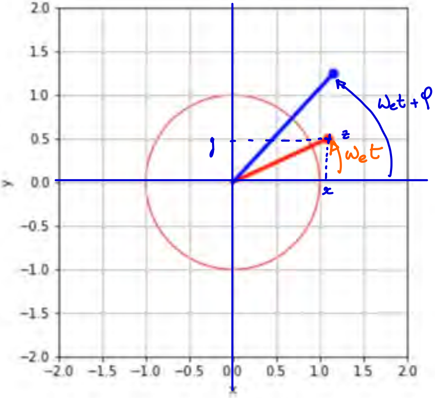
L'équation différentielle en complexes devient :

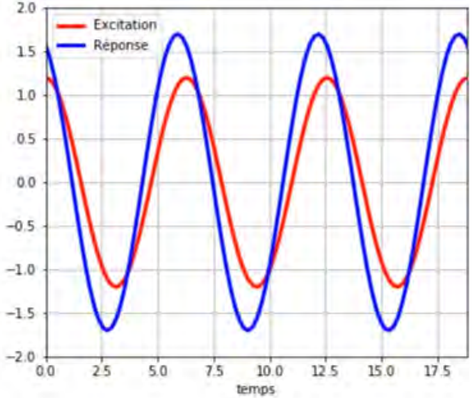
$$\underline{\ddot{x}} + 2\gamma\underline{\dot{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$$

En complexes :

$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t + \varphi)}$$

$$z = x + iy = \rho e^{i\theta} \qquad f_0 e^{i\omega_e t} \qquad A(\omega_e)\, e^{i\underbrace{(\omega_e t + \varphi)}}$$





$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)e^{i(\omega_e t+\varphi)}$ solution de : $\ddot{\underline{x}} + 2\gamma\dot{\underline{x}} + \Omega_0^2\underline{x} = f_0\, e^{i\omega_e t}$? ?

$$\underline{x}_1(t) = A(\omega_e)\, e^{i\omega_e t} e^{i\varphi} = \underbrace{A(\omega_e)\, e^{i\varphi(\omega_e)}}_{\chi_0} e^{i\omega_e t} = \chi_0\, e^{i\omega_e t} \qquad \chi_0 = A(\omega_e)\, e^{i\varphi(\omega_e)}$$

$$\dot{\underline{x}}_1(t) = \chi_0\,(i\omega_e)\, e^{i\omega_e t}$$

$$\ddot{\underline{x}}_1(t) = \chi_0\,(i\omega_e)^2 e^{i\omega_e t} = -\chi_0\,\omega_e^2\, e^{i\omega_e t}$$

$$-\chi_0\,\omega_e^2\,\cancel{e^{i\omega_e t}} + 2\gamma\,\chi_0\,(i\omega_e)\,\cancel{e^{i\omega_e t}} + \Omega_0^2\,\chi_0\,\cancel{e^{i\omega_e t}} = f_0\,\cancel{e^{i\omega_e t}}$$

$$\chi_0\left[-\omega_e^2 + 2i\gamma\omega_e + \Omega_0^2\right] = f_0$$

$$\chi_0 = \frac{f_0}{-\omega_e^2 + \Omega_0^2 + i\,2\gamma\omega_e} = \frac{f_0}{-(\omega_e^2 - \Omega_0^2) + i\,2\gamma\omega_e} = A(\omega_e)\, e^{i\varphi(\omega_e)}$$

$$\chi_0 = \frac{f_0}{-(\omega_e^2 - \Omega_0^2) + i\,2\gamma\omega_e} = \frac{f_0}{a + ib} = A\,e^{i\varphi} \qquad A = |\chi_0|$$

$$\left|\frac{f_0}{a+ib}\right| = \frac{f_0}{\sqrt{a^2+b^2}} = \boxed{\frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2-\Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} = A(\omega_e)}$$

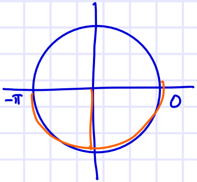
$\varphi(\omega_e)$ argument de χ_0

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{\chi_0}{A} = \frac{\chi_0}{|\chi_0|}$$

$$\frac{\cancel{f_0}}{a+ib} \times \frac{\sqrt{a^2+b^2}}{\cancel{f_0}} = \frac{(a-ib)\sqrt{a^2+b^2}}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{\cancel{\sqrt{a^2+b^2}}}{a^2+b^2}(a-ib) = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} - i\,\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$e^{i\varphi} = \cos\varphi + i\sin\varphi = \frac{\chi_0}{|\chi_0|} = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} + i\,\frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$\cos\varphi = \frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-(\omega_e^2-\omega_0^2)}{\sqrt{(\omega_e^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}} \qquad -1 \leq \cos\varphi \leq 1$$



$$\sin\varphi = \frac{-b}{\sqrt{a^2+b^2}} = \frac{-2\gamma\omega_e}{\sqrt{(\omega_e^2-\omega_0^2)^2+4\gamma^2\omega_e^2}} \leq 0$$

$$\varphi \in [-\pi, 0]$$

$$\tan\varphi = \frac{\sin\varphi}{\cos\varphi} = \frac{-2\gamma\omega_e}{-(\omega_e^2-\omega_0^2)} = \boxed{\frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2-\omega_0^2}}$$

$$\varphi \in [-\pi, 0]$$

Au final, de retour dans le monde réel :

$x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$ est bien une solution particulière, avec

$$A(\omega_e) = \frac{f_0}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

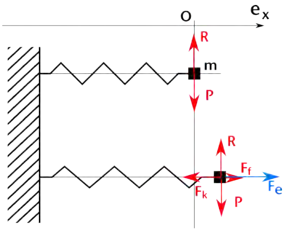
$$\cos\varphi = \frac{(\Omega_0^2 - \omega_e^2)}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \quad \sin\varphi = \frac{-2\gamma\omega_e}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}}$$

$$\tan\phi = \frac{2\gamma\omega_2}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \text{avec,} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

$x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

Résumé :

On applique au système de masse *m* une force qui a une forme sinusoïdale :



$$F_e = F_0 \cos(\omega_e t)$$

$$\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = (F_0/m)\cos(\omega_e t)$$

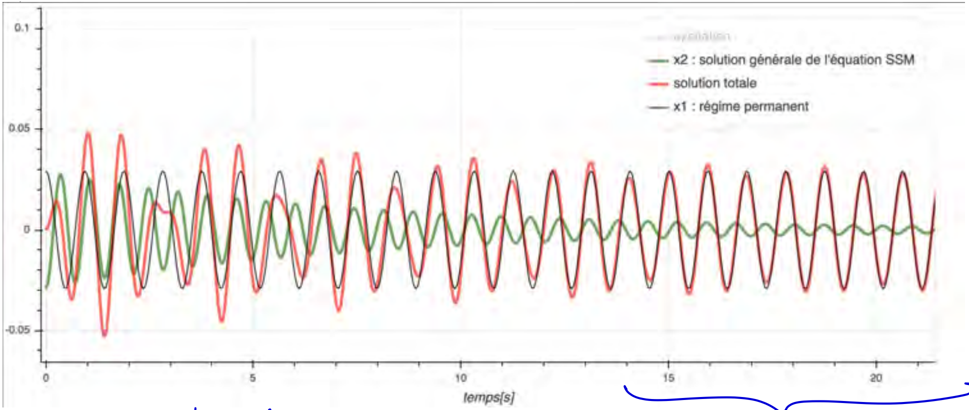
La solution générale est la somme de x_1 et x_2 $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$

x_2 solution de $\ddot{x} + 2\gamma\dot{x} + \Omega_0^2 x = 0$ tend vers 0

en régime permanent il reste $x_1(t) = A\cos(\omega_e t + \varphi)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} \qquad \tan(\varphi) = \frac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2} \quad \varphi \in [-\pi, 0]$$

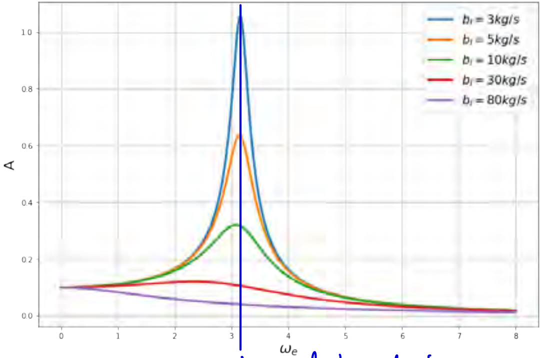
Etablissement du régime permanent



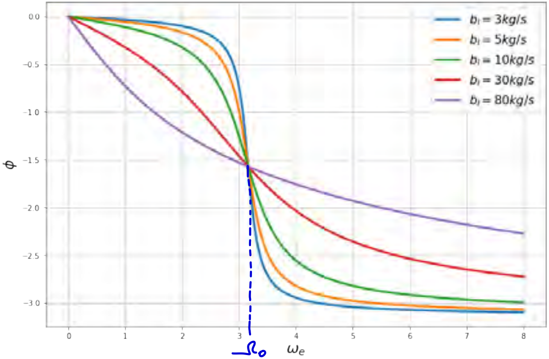
Régime transitoire

régime perma

Analyse du régime permanent $x_1(t) = A(\omega_e)\cos(\omega_e t + \varphi(\omega_e))$



ω_{res} pulsation de résonance



Amplitude et déphasage en fontion de ω_e pour différents frottements.

Analyse de la fonction $A(\omega_e)$

$$A(\omega_e) = \frac{F_0/m}{\sqrt{(\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2}} = \frac{F_0/m}{\sqrt{g(\omega_e)}}$$

$g(\omega_e) = (\omega_e^2 - \Omega_0^2)^2 + 4\gamma^2\omega_e^2$

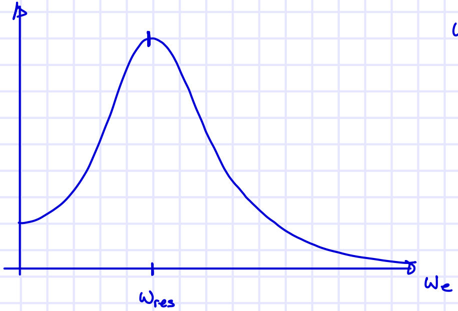
Extremum $A(\omega_e) \leftrightarrow$ Extremum $g(\omega_e)$

$\frac{dg(\omega_e)}{d\omega_e} = 2\omega_e \cdot 2(\omega_e^2 - \Omega_0^2) + 4\gamma^2\, 2\omega_e = 4\omega_e\left[\omega_e^2 - \Omega_0^2 + 2\gamma^2\right]$

$\frac{dg(\omega_e)}{d\omega_e} = 0 \Leftrightarrow \omega_e = 0$ ou $\omega_e^2 = \Omega_0^2 - 2\gamma^2$

Si $2\gamma^2 < \Omega_0^2$ $\omega_e = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$ alors $A(\omega_e)$ est maximum c'est $\omega_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$

Si $2\gamma^2 \geq \Omega_0^2$ $\Rightarrow$ pas de résonance



$\omega_{res} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2} < \Omega_0$

Si γ est faible $\gamma \ll \Omega_0 \Rightarrow \omega_{res} \simeq \Omega_0$

$\tan\varphi = \dfrac{2\gamma\omega_e}{\omega_e^2 - \Omega_0^2}$; si $\omega_e = \Omega_0$

$\tan\varphi \to \infty$ $\varphi \in [-\pi, 0]$ $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$

si γ faible $\varphi \simeq -\dfrac{\pi}{2}$ pour ω_{res}

$$A(\omega_e) = A_{\text{max}} \quad \text{pour} \quad \omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$$

Si $\gamma^2 > \Omega_0^2/2$ il n'y a pas de résonance.

Résumé sur les pulsations :

Ω_0 est la pulsation propre du système, soit la pulsation des oscillation si il n'y a ni amortissement ni forçage.

$\omega = \sqrt{\Omega_0^2 - \gamma^2}$ est la pseudo-pulsation du système avec amortissement, mais non forcé, quand l'amortissement est sous-critique.

ω_e est la pulsation d'excitation : une pulsation *imposée* par l'utilisateur dans le cas d'un osclliateur forcé.

$\omega_{\text{res}} = \sqrt{\Omega_0^2 - 2\gamma^2}$ est la pulsation de résonnance : une valeur particulière de ω_e pour laquelle la réponse du système a une amplitude maximale en régime permanent.

Période = $2\pi/$pulsation et fréquence = 1/période

Facteur de qualité

On définit le *facteur de qualité*

$$Q = \frac{\Omega_0}{2\gamma}$$

Une analyse dimensionnelle montre que Q est sans dimension.

$$A(\omega_e) = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2\left(\frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2} - 1\right)^2 + \frac{\omega_e^2}{\Omega_0^2}}}$$

$$\bar{\omega}_e = \frac{\omega_e}{\Omega_0}$$

$$A(\bar{\omega}_e) = \frac{A(0)Q}{\sqrt{Q^2(\bar{\omega}_e^2 - 1)^2 + \bar{\omega}_e^2}}$$

Amplitude maximale A_{max}

$$A_{max} = A(\omega_{res}) = \frac{A(0)Q^2}{\sqrt{Q^2 - 1/4}}$$

Si $\Omega_0^2 < 2\gamma^2$: pas de résonance

$Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $Q \gg 1$, $A_{max} \simeq A(0)Q$

$A_{max}/A(0) = Q$

Plus Q est grand plus A_{max} est grand.

Q donne directement une mesure de la "qualité" de la résonance.