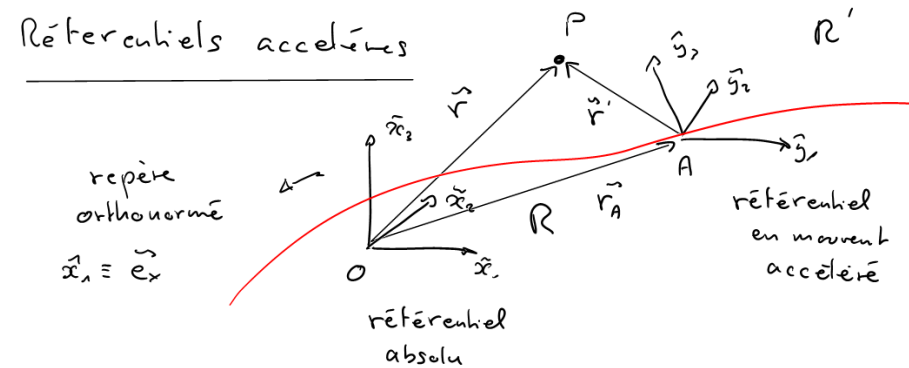




R' : en translation + rotation
 $\vec{r}_A(t)$ $\vec{\omega}(t)$

Position relative

$$\vec{r}_P)_R = \vec{r}_A + \vec{r}'_P)_R$$

avec

$$\begin{cases} \vec{r} = \sum x_i \hat{x}_i \\ \vec{r}_A = \sum \alpha_A \hat{x}_i \\ \vec{r}' = \sum y_i \hat{y}_i \end{cases}$$

Vitesse relative

$$\vec{v}_P)_R = \frac{d}{dt} \vec{r} = \frac{d}{dt} \vec{r}_A + \frac{d}{dt} \vec{r}'$$

$$\begin{aligned}
 &= \frac{d}{dt} \left(\sum_i x_{A,i} \hat{x}_i \right) + \frac{d}{dt} \left(\sum_i y_i \hat{y}_i \right) \\
 &= \sum \dot{x}_{A,i} \hat{x}_i + \sum y_i \dot{\hat{y}}_i + \sum y_i \hat{y}_i \\
 \dot{\hat{y}}_i &= \tilde{\omega} \cdot \hat{y}_i \\
 &= \tilde{V}_A + \tilde{V}'_{R'} + \sum y_i (\tilde{\omega} \times \hat{y}_i) \\
 &= \tilde{V}_A + \tilde{V}' + \tilde{\omega} \times \sum y_i \hat{y}_i \\
 \tilde{V}_{R'} &= \tilde{V}_A + \tilde{V}'_{R'} + \tilde{\omega} \times \tilde{r}'_{R'}
 \end{aligned}$$

#

Accelerations relations

$$\tilde{V} = \tilde{V}_A + \tilde{V}' + \tilde{\omega} \times \tilde{r}'$$

$$\tilde{a} = \frac{d}{dt} \tilde{V} = \underbrace{\frac{d}{dt} \sum v_{A,i} \hat{x}_i}_{(1)} + \underbrace{\frac{d}{dt} \sum v'_i \hat{y}_i}_{(2)} + \underbrace{\frac{d}{dt} (\tilde{\omega} \times \tilde{r}')}_{(3)}$$

$$(1) \quad \sum a_{A,i} \hat{x}_i = \tilde{a}_A)_{R'}$$

$$(2) \quad \sum a'_i \hat{y}_i + \sum v'_i \tilde{\omega} \times \hat{y}_i = \tilde{a}'_{R'} + \tilde{\omega} \times \tilde{v}'_{R'}$$

$$(3) \quad \tilde{\omega} \times \tilde{r}' + \tilde{\omega} \times \frac{d}{dt} \sum y_i \hat{y}_i$$

$$\tilde{\omega} \times \sum \dot{y}_i \hat{y}_i + \tilde{\omega} \times \sum y_i (\tilde{\omega} \times \hat{y}_i)$$

$$\begin{aligned}\tilde{a})_R &= \tilde{a}_A)_R + \tilde{a}')_{R'} + \tilde{\omega} \times \tilde{v}')_{R'} \\ &\quad + \dot{\tilde{\omega}} \times \tilde{r}') + \tilde{\omega} \times \tilde{v}')_{R'} + \tilde{\omega} \times \tilde{\omega} \times \tilde{r}')_{R'}\end{aligned}$$

$$\tilde{a})_R = \tilde{a}_A)_R + \underbrace{\tilde{a}')_{R'}}_{a_{\text{cor}} \text{ Coriolis}} + 2 \underbrace{(\tilde{\omega} \times \tilde{v}')_{R'}}_{a_c \text{ centrifète}} + \underbrace{\tilde{\omega} \times \tilde{\omega} \times \tilde{r}')_{R'}}_{a_E \text{ Euler}} + \underbrace{\dot{\tilde{\omega}} \times \tilde{r}'}_{a_E \text{ Euler}}$$

⚠ Pour effectuer le calcul, il faut exprimer les vecteurs définis dans R' dans R . C'est à dire qu'il faut exprimer les vecteur $\hat{y}_i$ dans la base $\hat{x}_i$.

Description du mouvement du point dans R' à partir de sa description dans R

On inverse simplement les formules précédentes

Positions

$$\tilde{r})_R = \tilde{r}_A)_R + \tilde{r}')_{R'}$$

$$\tilde{r}')_{R'} = \tilde{r})_R - \tilde{r}_A)_R$$

Vitesse

$$\tilde{\vec{v}}_R = \tilde{\vec{v}}_A + \tilde{\vec{v}}'_{R'} + \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'}$$

$$\tilde{\vec{v}}'_{R'} = \tilde{\vec{v}}_R - \tilde{\vec{v}}_A - \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'}$$

connu

Accélération

$$\tilde{\vec{a}}_R = \tilde{\vec{a}}_A + \tilde{\vec{a}}'_{R'} + 2(\tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{v}}'_{R'}) + \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'} + \dot{\tilde{\vec{\omega}}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'}$$

$$\tilde{\vec{a}}'_{R'} = \tilde{\vec{a}}_R - \tilde{\vec{a}}_A - 2(\tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{v}}'_{R'}) - \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'} - \dot{\tilde{\vec{\omega}}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'}$$

Coriolis

centrifuge

Euler

Accélération (force) centrifuge

On imagine un tourniquet qui tourne à vitesse angulaire $\tilde{\vec{\omega}} = \omega \vec{e}_z$

On imagine un point initial immobile dans R'

$$\tilde{\vec{a}}'_{R'} = \tilde{\vec{a}}_R - \cancel{\tilde{\vec{a}}_A} - 2(\cancel{\tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{v}}'_{R'}}) - \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'} - \cancel{\dot{\tilde{\vec{\omega}}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'}}$$

$$\text{Si } \tilde{\vec{r}}'_{R'} = r \vec{e}_x \quad \underline{- \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{\omega}} \times \tilde{\vec{r}}'_{R'} = \omega^2 \vec{e}_x'}$$



- ① Si le point est fixe dans R' il faut une force supplémentaire qui contre balance la force centrifuge

see examples

② Dès qu'on lâche le point $\vec{v}' \neq 0$
la force de Coriolis s'enclanche

Formule de Poisson

Brechet p. 67

Rotation d'un repère orthogonal

Repère orthogonal

Vecteurs de base sont unitaires $\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i = 1$

On cherche à exprimer $\frac{d}{dt}(\vec{e}_i)$

$$\frac{d}{dt}(\vec{e}_i \cdot \vec{e}_i) = \dot{\vec{e}}_i \cdot \vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{e}}_i = 2 \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{e}}_i = 0$$

$\vec{e}_i \perp \dot{\vec{e}}_i$

vecteurs orthogonaux
base orthogonale

On peut décomposer $\dot{\vec{e}}_i$ dans la base $\vec{e}_j$

$$\dot{\vec{e}}_i = \sum_{ij} w_{ij} \vec{e}_j$$

de $\dot{\vec{e}}_i \cdot \vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \dot{\vec{e}}_i = 0$

$$\left(\sum w_{ij} \vec{e}_j \right) \cdot \vec{e}_i + \vec{e}_i \cdot \sum w_{ij} \vec{e}_j = 0$$

avec $\vec{e}_j \cdot \vec{e}_i = \delta_{ij}$ vect. orthogonaux

$\Rightarrow w_{ik} + w_{ki} = 0 \quad w_{ki} = -w_{ik}$

on a donc

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_{12} & w_{13} \\ -w_{12} & 0 & w_{23} \\ -w_{13} & -w_{23} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

3 comp. indep. $w_{12} \ w_{13} \ w_{23}$

$$\begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & w_3 & -w_2 \\ -w_3 & 0 & w_1 \\ w_2 & -w_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \vec{e}_1 \\ \vec{e}_2 \\ \vec{e}_3 \end{pmatrix}$$

et on montre par ex.

$$\vec{w} = \begin{pmatrix} w_1 \\ w_2 \\ w_3 \end{pmatrix} \quad \text{alors} \quad \underline{\vec{e}_i = \vec{w} \times \vec{e}_i}$$

#