

12: Der Drehimpuls

- I. Wie bestimmt man den Drehimpuls eines starren Körpers ?
Drehungen im Ungleichgewicht - Zentrifuge
- II. Wozu dient die Drehimpulserhaltung ?
- III. Wie beschreibt man die Bewegung eines Kreisels ?
Gyroskop – die gleichmässige Drehbewegung der Rotation

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** (2.5 Seiten):
11-1 Angular Momentum – objects rotating about a fixed axis
11-7 The spinning top and gyroscope
Vorbereitende Übungen (12) **vor der Übungssession** zu erledigen:
11-2, 4, 6, 15, 55, 57

Giancoli Kapitel 11-4 bis 11-7 (wenig Übereinstimmung)

12-1. Der Drehimpuls

2. Axiom für den Massenpunkt (Lektion 9, 10)

$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{L}^0 \equiv \vec{r} \times \vec{p} = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau}^0_i = \frac{d\vec{L}^0}{dt}$$

Ohne **resultierende** externe Kräfte:

Erhaltung von p

Ohne **resultierende** Drehmomente:
Erhaltung von L

NB. $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{p} = m\vec{r}_{\perp} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}) = mr_{\perp}^2 \vec{\omega}$

	Lineare Bewegungen (s. Lektionen 4, 8 - 11)	Drehbewegung (s. Lektionen 5, 10-12)
1D	$F_{ext} = Ma_{CM} \quad (a_{CM} = dv_{CM}/dt)$ $(\sum F_i = Ma_{CM})$	$\tau_z = I\alpha_z \quad (\alpha_z = d\omega_z/dt)$ $(\sum \tau_z = I\alpha)$
Vektoriell	$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}_{CM}}{dt} \quad (\vec{p} = M\vec{v}_{CM})$	$\sum \vec{\tau}^0 = \frac{d\vec{L}^0}{dt} \quad \vec{L}^0 \equiv I^0 \vec{\omega}$

$$M = \int dm$$

$$I_{Achse} = \int r^2 dm$$

um Achse

Welchen Kräften ist eine symmetrische, sich drehende Achse ausgesetzt ?

Situation: Ein um eine feste Achse sich drehendes Rad, durch Kugellager stabilisiert, die selber z.B. an einem Chassis fixiert sind, ω_z =konstant.

Modell: Eine Stange (Masse vernachlässigt), die 2 Massen m mit Radius R verbindet, ist senkrecht zur Achse des Rades angebracht.

2. Gesetz Rotation:

Drehimpuls bezgl. O:

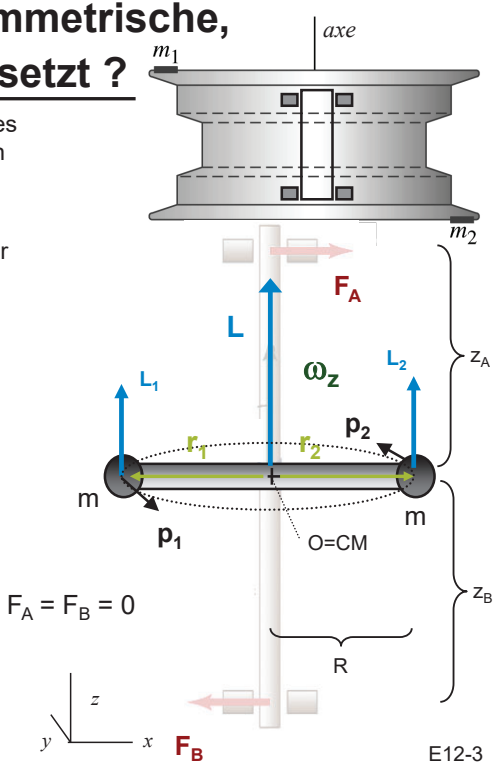
$$\vec{L}^O = \vec{L}_1^O + \vec{L}_2^O = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 \leftarrow p = mv = m\omega R$$

Drehmomente (bezgl. O)

$$\sum \vec{\tau}^O = \vec{0} \rightarrow z_A F_{Ax} + z_B F_{Bx} = 0$$

2. Axiom : $a_{CM}=0$

$$F_{Ax} + F_{Bx} = Ma_{CM}$$



Welchen Kräften ist die Achse einer unausgewogenen Zentrifuge (Rad) ausgesetzt ?

Konsequenz der vorangehenden Folie: Eine ausgewogene Zentrifuge ist keinem Drehmoment ausgesetzt (Analyse zu einem gewissen Zeitpunkt).

Situation : Anfügen einer einzelnen Masse m oben

2. Gesetz Rotation:

Drehimpuls bezgl. O:

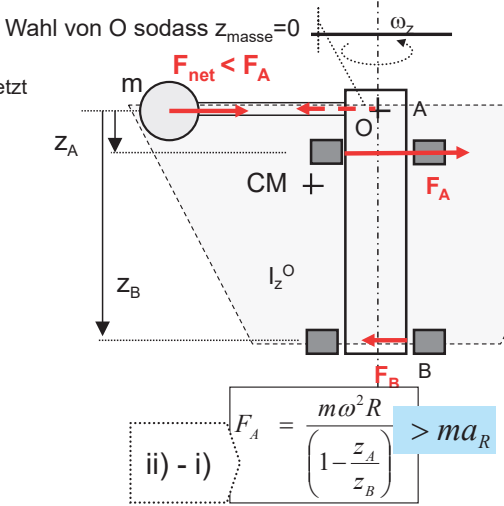
$$L_z^O = mR^2\omega_z + I_z^O\omega_z = konst$$

Drehmomente (bezgl. O)

$$\sum \tau_y^O = z_A F_A + z_B F_B = 0$$

2. Axiom :

- Für die Masse m (Kreisbewegung):
 $F_{net} = ma_R = m\omega^2 R$
- Für die Achse (statisch, $a=0$):
 $-F_{net} \text{ (reactio)} + F_A + F_B = 0$



12-2. Drehimpulserhaltung

(Rotation um eine feste Drehachse)

Feststellung:

1. Die Masse = Widerstand gegenüber einer Geschwindigkeitsänderung $\Rightarrow$ Impulserhaltung (p)

2. Trägheitsmoment = Widerstand gegenüber einer Winkelgeschwindigkeitsänderung

$$\sum_{i=1}^N \vec{\tau}_{i,net}^O = \frac{d \sum_{i=1}^N \vec{L}_i^O}{dt} = \frac{d\vec{L}^O}{dt} = \sum \vec{\tau}_{O,net}$$

Drehimpulserhaltungssatz:

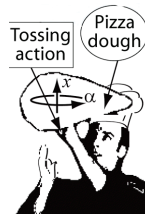
Für ein isoliertes System ($\tau_{net}^O=0$) gilt

$$\mathbf{L}_{tot}(t) = \text{konstant}$$

Welches sind die Konsequenzen, wenn man das Trägheitsmoment eines isolierten Systems ändert ?

Beispiel I: Ein Pizzaiolo bereitet den Pizzateig vor. Der Teig dehnt sich, bis die Kraft die ihn zusammenhält, als Federkraft $-kr$ modelliert, die Zentripetalbedingung $m\omega^2 r$ erfüllt.

Warum muss man erneut ein Drehmoment τ anwenden ?



Beispiel II: Man befindet sich auf einem frei drehbaren Stuhl mit zwei Gewichten (2 kg) in den Händen am Körper. Während der Drehbewegung streckt man beide Arme.

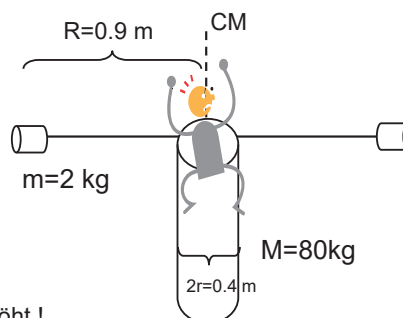
Was geschieht nun ?

$$\text{Mensch: } I_{CM} = Mr^2/2 = 1.6 \text{ kg m}^2$$

$$\text{Massen: } I_{CM} = 2mR^2 = 3.2 \text{ kg m}^2$$

I_{CM} wird um mindestens das 3-fache erhöht !

Wenn man die Arme am Körper anlegt :
 I_{CM} verringert sich um mindestens das 3-fache !



Ex. Pulsar im Krebsnebel

Neutronenstern

Überrest einer Supernova, die von chinesischen und arabischen Astronomen 1054-1056 wahrgenommen wurde.

Heute bringt seine Strahlung das ausgeworfene Gas zum Leuchten: Krebsnebel

Angaben:

Diameter: 20 - 30km

Masse 1.3-2 $M_{\odot}$

Periode T: 33ms (190 rad/s), nimmt 35 ns/Tag (0.4 ps/s) zu

Sonne:

$M_{\odot} = 2 \cdot 10^{30}$ kg

$R_{\odot} = 110R_{\text{T}} = 7 \cdot 10^5$ km

Periode = 25 Tage

Supernova:

Isoliertes System: L erhalten

Kontraktion bis 30 km ($4 \cdot 10^{-5} R_{\odot}$): I verringert sich um das $5 \cdot 10^9$ fache

ω erhöht sich um das 10^9 fache: Periode um 10^9 reduziert = 4ms

Leistung ?

$$P = \frac{dK_{\text{rot}}}{dt} = I\omega \frac{d\omega}{dt} = \frac{2MR^2}{5} \frac{\omega^3}{2\pi} \frac{dT}{dt}$$
$$= 3 \cdot 10^{30} [\text{kg}] 1.5 \cdot 10^8 [\text{m}^2] 190^3 \cdot 0.4 \cdot 10^{-12} / 6.3$$
$$\sim 10^{32} \text{ W}$$

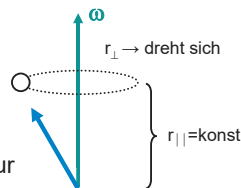
$$L = \frac{2}{5} M_{\odot} R^2 \omega = \frac{4\pi}{5} M_{\odot} \frac{R^2}{T}$$

12-3. Welche Bewegung der Rotation entspricht der gleichförmigen Kreisbewegung ?

Kinematik der Kreisbewegung:

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$
$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Die Komponente der Beschleunigung $\perp$ zur Bahnkurve, $a_{\perp}$, ändert die Norm der Geschwindigkeit nicht, i.e. auch von v^2



$$\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a}_{\perp} = 0$$

2.Axiom: Die Komponente der resultierenden Kraft $\perp$ zur Bahnkurve, i.e. v , $F_{\perp}$, lässt die Norm des Impulses p unverändert.

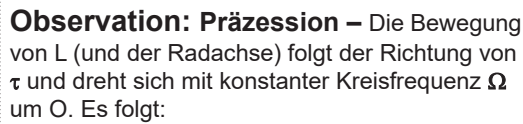
$$\vec{F}_{\perp} \cdot \vec{p} = 0 \quad F_{\perp} = ma_{\perp}$$
$$\vec{F} = m\vec{a} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

2. Gesetz Rotation: Die Komponente des resultierenden Drehmomentes $\perp$ zu L , $\tau_{\perp}$, lässt die Norm des Drehimpulses L unverändert:

$$\vec{\tau}_{\perp} \cdot \vec{L} = 0$$
$$\vec{\tau} = \frac{d\vec{L}}{dt}$$

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

Schnur



Bedingung für eine Präzession ($\tau \neq 0$): τ_{net} muss eine Komponente $\perp \mathbf{L}$ besitzen $\rightarrow$

$$\vec{\tau} \cdot \vec{L} = \frac{d\vec{L}}{dt} \cdot \vec{L} = (\vec{\Omega} \times \vec{L}) \cdot \vec{L} = 0$$

Welches ist die Kreisfrequenz Ω der Präzessionsbewegung ?

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\vec{L}^{CM}}{dt} &= \vec{\tau}^{CM} = M\vec{g} \times \vec{r} = M\vec{r} \times \frac{\vec{r}}{r} = M\vec{r} \times \frac{\vec{L}^{CM}}{L} \\ &= M\vec{r} \times \frac{\vec{L}^{CM}}{L} = M\vec{r} \times \frac{\vec{L}^{CM}}{I\omega} \end{aligned} \right\} \frac{d\vec{L}^{CM}}{dt} = \frac{Mr}{I^{CM}\omega} \vec{g} \times \vec{L}^{CM}$$

12-13

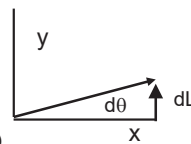
Kreisel mit externem Drehmoment

The diagram illustrates the forces and angular momentum in a gyroscope. A vertical axis passes through the center of mass O . A horizontal axis is shown with a red arrow labeled ω_x and a blue arrow labeled ω_z . A red arrow labeled τ_y is shown along the vertical axis. A red arrow labeled Mg points downwards from the center of mass. A blue arrow labeled $L_z = I_z \Omega$ points upwards along the vertical axis. A blue arrow labeled L_{tot} points upwards and to the right. A blue arrow labeled dL points to the right. A blue arrow labeled $L_x = \omega_x I_x$ points to the right. A blue arrow labeled x_{CM} points to the right. A blue arrow labeled x points to the right.

$$\tau^0 = dL^0/dt$$

Von $L_x = I_x \omega_x$ folgt

(NB Ω ist positiv, Rechte-Hand-Regel)



Präzession (s. Lektion 3): $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$

Welche Physik steckt in einem Bumerang ?

Ein präzessierender Kreisel

Damit ein Bumerang mit Dimension r und Masse m auf einem Kreis mit Radius R zurückkehrt, braucht es:

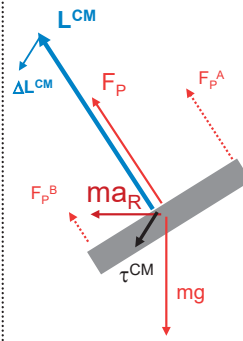
1. Kreisbahn ($v_{CM} = \Omega R$) : Zentripetalbedingung

2. Drehung des Bumerang mit ω :

Drehimpuls $L^{CM} = I^{CM} \omega$

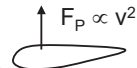
3. Präzession des Drehimpulses mit Ω , damit die Drehachse stets in das Zentrum der Kreisbewegung zeigt

$$\frac{d\vec{L}^{CM}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}^{CM} \quad \rightarrow \text{Drehmoment } \tau^{CM} = I \omega \Omega$$

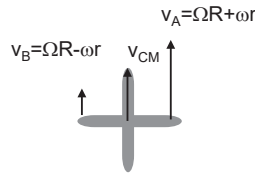


Ursprung des resultierenden Drehmoments τ^{CM} ?

Flügel des Bumerang : wie ein Tragflügel
 $\rightarrow$ Auftriebskraft F_P (s. Aerodynamik, Sem III/IV)



resultierendes Drehmoment
 $\tau^{CM} = (F_P^A - F_P^B) r$
 (eine Vereinfachung!)



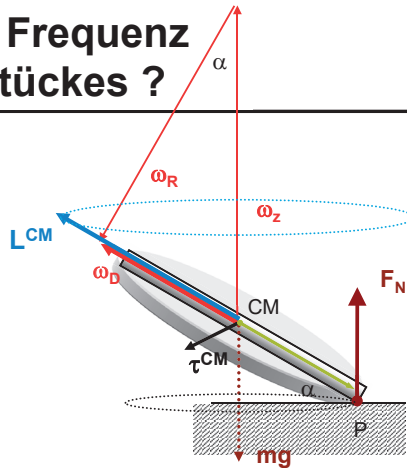
E12-15

Warum erhöht sich die Frequenz eines fallenden Geldstückes ?

Situation: Massenschwerpunkt CM in Ruhe bezgl. Tisch ($v_{CM} = 0$). Der instantane Kontaktpunkt P dreht ohne zu gleiten ($v_P = 0$) mit Radius $R \cos \alpha$ und Kreisfrequenz ω_z um den CM.

Analyse: Die resultierende Drehung des Stücks muss auf der Linie CM-P liegen, entlang ω_D

$$\vec{\omega}_D = \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_R \quad (\text{Konsequenz von } v_P = 0, \text{ s. Anhang})$$



1) Der Drehimpuls L^{CM} entlang CM-P präzessiert mit $\Omega = \omega_z$:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\Omega} \times \vec{L}$$

$$\frac{d\vec{L}^{CM}}{dt} = \omega_z L^{CM} \left(\frac{\vec{\omega}_z}{\omega_z} \times \frac{\vec{L}^{CM}}{L^{CM}} \right)$$

2) Resultierendes Drehmoment

$$\vec{\tau}^{CM} = R F_N \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{F}_N}{F_N} \right)$$

3) Der Drehimpuls ist immer entlang ω_D :

$$L^{CM} = I^{CM} \omega_D$$

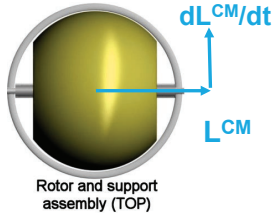
$$\omega_z^2 I^{CM} \sin \alpha = R m g$$

$$\omega_z^2 = \frac{4g}{R \sin \alpha}$$

E12-16

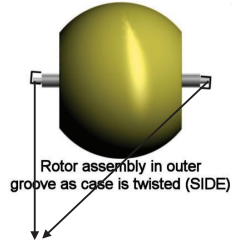
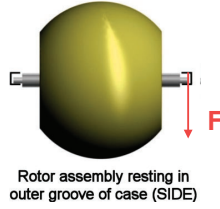
Powerball !

Ein Kreisel mit erzwungener Präzession



Erhöhung der Winkelgeschwindigkeit:
Erhöhung des Betrages des Drehimpulses

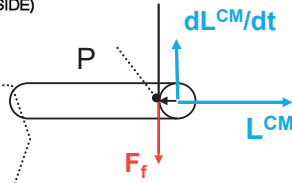
Wie kann man ein Drehmoment entlang L_{CM} kreieren ?



Änderung der Richtung der Drehachse durch F

→ Präzession von L_{CM} $\Omega = \frac{\tau}{L\omega}$

Haftreibungskraft :
beschleunigte Rollbewegung



E12-17