11: Rotation – feste Achse

I. Wie beschreibt man die Dynamik des Rollens ohne Gleiten ?
  z. Erinnerung: 2. Gesetz der Rotation

II. Wie bestimmt man das Trägheitsmoment eines starren Körpers ?
  Parallelachsen-Theorem (Steinersche Satz)

III. Wie kann man die Rollbewegung als momentane Rotation um den Kontaktpunkt beschreiben ?

IV. Welches Trägheitsmoment für welche Körper ?

V. Welches ist die mechanische Energie eines rotierenden starren Körpers ?
  z. Erinnerung: Dynamik

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** *(1.5 Seiten)*:
  10-5 Torque and rotational inertia

Vorbereitende Übungen *(4)* **vor der Übungssession** zu erledigen **:**
  Giancoli 10-32, 41, 47a, 56, 10-65, 71

Giancoli Kapitel 10-5 bis 10-9

z. Erinnerung: Die Dynamik des Massenpunktes

Das 2. Axiom (Gesetz) bis jetzt

Linear (Lektion 4)

$$\boxed{\vec{F}_{net} = \sum \vec{F}_i = m\vec{a}}$$

Rotation (Lektion 5)

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_i = I\vec{\alpha}}$$

Verallgemeinerung für den starren Körper

Lineare Dynamik des Festkörpers (Lektion 10)

$$\sum \vec{F}_i^{ext} = M\vec{a}_{CM} \qquad \vec{r}_{CM} = \frac{1}{M}\int_{Objekt} \vec{r}\,dm$$

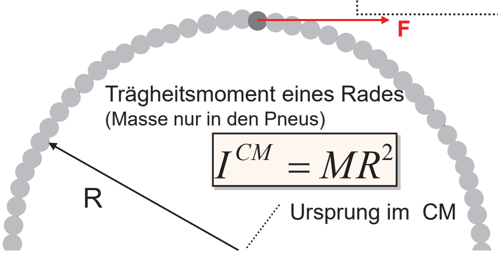
$$M = \int_{Objekt} dm$$

Dynamik der **Rotation** eines Rades

$$\vec{r} \times \vec{F} = n\, m r_\perp^{\,2} \vec{\alpha}$$

$r_\perp$: Distance zur Drehachse

$$I^{CM} = \left(\sum \Delta m\right) r^2 = \int_{Objekt} r^2\,dm$$



Trägheitsmoment eines Rades
(Masse nur in den Pneus)

$$\boxed{I^{CM} = MR^2}$$

I^{CM} Bezeichnet die Achse

11-1. Unter welchen Bedingungen rollt ein beschleunigtes Objekt ohne zu gleiten ?

Ohne Gleiten: Der Kontaktpunkt P des Rades ist in Ruhe: $v_P=0$.

Translation des CM und Rotation um den Massenschwerpunkt CM :

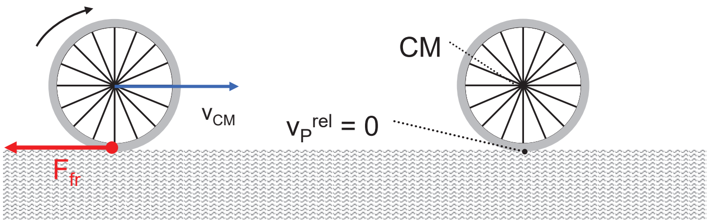
$$\vec{v}(\vec{r}_i) = \vec{v}_{CM} + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_{CM})$$

1. Beziehung zwischen Geschwindigkeit der Rades v_{CM}, ω und seinem Radius R

$$\boxed{v_{CM} = -\omega R}$$

2. Was garantiert dass ein beschleunigtes Rad nicht gleitet ?

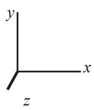
$$\boxed{\mu_s F_N \geq F_{fr} > 0}$$

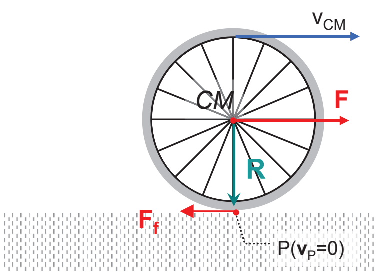


Wie bestimmt man die Beschleunigung eines Rades ?

Methode 1: Translation + Rotation um den Massenschwerpunkt CM

Situation: Eine Kraft **F** wirkt am CM. Am Kontaktpunkt P: Reibungskraft $F_f \rightarrow$ Drehmoment $\tau_z^{CM} = RF_f$ ($F_f<0$)





1) 2. Axiom (Translation): $F - F_f = Ma_{CM}$

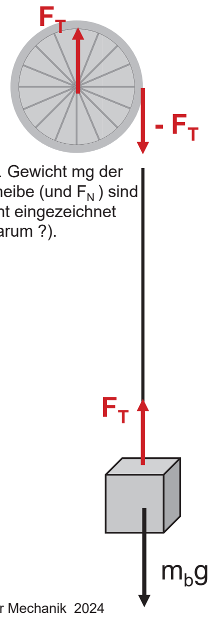
2) 2. Gesetz der Rotation:

$$\tau_z^{CM} = -RF_f = \frac{d\omega_z}{dt} I_z^{CM} \quad \Rightarrow \quad -F_f = -\frac{a_{CM}}{R^2} I_z^{CM}$$

$$F = Ma_{CM} + \frac{a_{CM}}{R^2} I_z^{CM}$$

$$\boxed{a_{CM} = \frac{F}{M}\left(\frac{1}{1 + I_z^{CM}/MR^2}\right)}$$

z.B.: Masse an einer Riemenscheibe



NB. Gewicht mg der Scheibe (und F_N) sind nicht eingezeichnet (Warum ?).

Zugspannung am Faden ?

Feststellungen (lineare Dynamik):

1) Actio=Reactio : Die Kraft F_T ist dieselbe an beiden Enden des Fadens
2) Die Scheibe bewegt sich nicht: Die durch die Masse induzierte Kraft am CM der Scheibe erhöht sich um F_T
3) Die Beschleunigung der Masse ergibt sich als

$$a = g - \frac{F_T}{m_b}$$

Dynamik der Rotation: Das resultierende Drehmoment auf den CM der Scheibe ist

$$\tau^{CM} = F_T R = I\alpha \qquad a = \frac{F_T R^2}{I}$$

$$\boxed{F_T = m_b g\left(\frac{I}{I + m_b R^2}\right)}$$

11-2. Was beschreibt die Proportionalität zwischen τ und α ?

Das Trägheitsmoment I und das « 2. Gesetz » der Rotation

Das 2. Gesetz der Rotation:

$$\boxed{\sum \vec{\tau}_{ext} = \underbrace{I^{Achse}}_{\text{Inertie der Rotation}} \vec{\alpha}} \qquad I^{Achse} = \sum \Delta m_i r_i^2$$

(Widerstand zur Änderung der Winkelgeschwindigkeit)

I≡**Trägheitsmoment**

Einheit: [kgm²]

Δm→0

$$\boxed{I^{Achse} \equiv \int\limits_{\text{um die Drehachse}} r^2 dm}$$

r = Distanz zur Drehachse

Für zwei Objekte 1 und 2, die um die selbe Drehachse drehen, addieren sich deren Trägheitsmomente (Warum ?):

$$\boxed{I_{tot}^{Achse} = I_1^{Achse} + I_2^{Achse}} \qquad I_{tot}^{Achse} = \sum_k I_k^{Achse}$$

Welche Eigenschaften besitzt das Trägheitsmoment bezüglich des CM ?

$I^{CM} \equiv$ Trägheitsmoment bezüglich einer Drehachse durch den Massenschwerpunkt CM des Objektes

$$I^{CM} \equiv \int_{\substack{\text{um Drehachse}\\ \text{durch CM}}} r^2 dm$$

r = Distanz zur Drehachse

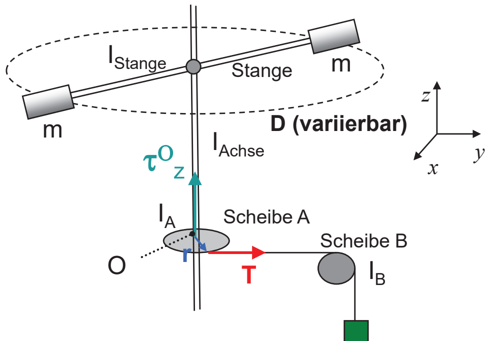
Parallelachsen-Theorem (Steiner)

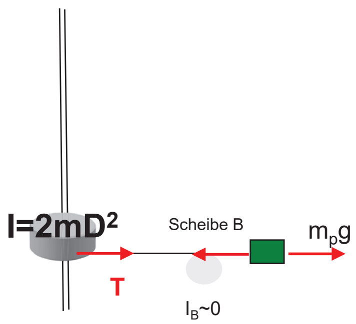
Rotation um eine Drehachse mit Distanz h | |zu der Drehachse durch den CM lässt sich durch ein Trägheitsmoment I^{Achse} beschreiben, wobei

$$\boxed{I^{Achse} = I^{CM} + mh^2}$$

$$\boxed{h >> R \quad \Rightarrow \quad I^{Achse} = Mh^2}$$

Demo: Variation des Trägheitsmomentes





$$I_z^O = 2mD^2 + \overbrace{I_{Achse}^O + I_A^O + I_{Stange}^O}^{\text{vernachlässigbar}} \cong 2mD^2$$

$$m_p a = T - m_p g$$

$$rT = I^{axe}\alpha$$

$$\alpha = \frac{g}{r\left(1 + \frac{I_z^O}{m_p r^2}\right)} \approx \frac{g}{r(1 + \frac{2mD^2}{m_p r^2})}$$

11-3. Kann man eine Rotation (ohne Gleiten) auch um den Kontaktpunkt P analysieren ?

Einleitung: Wie löst man Probleme der Dynamik der Rotation (feste Achse) ?

1.) Für die lineare Bewegung des CM: 2. Axiom $\vec{F}_{net} = m\vec{a}_{CM}$

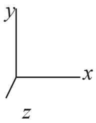
2.) Rotation: 2.Gesetz $\vec{\tau}_{net}^{\,Achse} = I^{Achse}\vec{\alpha}$

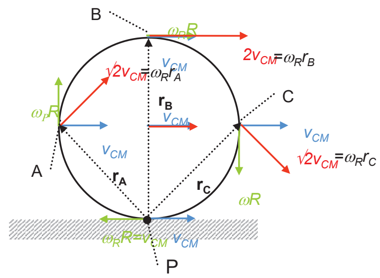
3.) 1 und 2 kombinieren→ Lösung

z.B.: Rollen ohne Gleiten

Am Kontaktpunkt P gilt zu jeder Zeit

v_P=Geschwindigkeit des Bodens (=0)





Translation um v_{CM}

+

Rotation um den CM mit ω_R=-v/R

=

Rotation um P

(Kontaktpunkt)

$\rightarrow \mathbf{v_i = \omega_R \times r_i} \Rightarrow \frac{d\vec{r}}{\ } = \vec{\omega}_R \times \vec{r}$

Demo: Von einem Faden gezogene Spulen

Frage: In welche Richtung rollt die Spule, wenn man am Faden zieht,?

Situation 1: Die Schnur ist auf dem kleinen Zylinder aufgerollt, die Spule rollt (ohne zu gleiten) auf dem grossen Zylinder

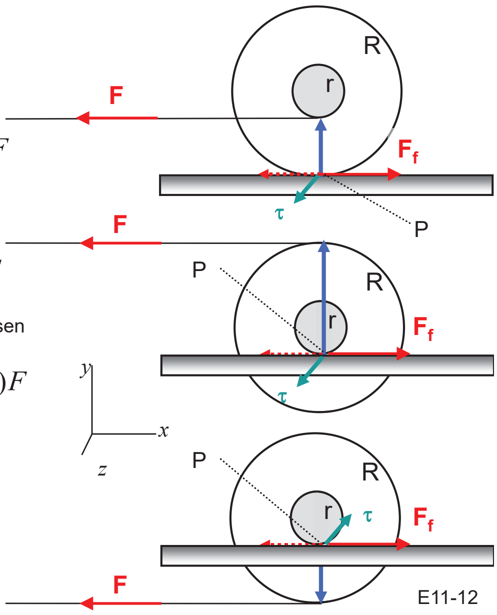
$$\tau_z^P = (R-r)F$$

Situation 2: Man zieht oben mit der Schnur am grossen Zylinder, die Spule rollt (ohne Gleiten) auf dem kleinen Zylinder.

$$\tau_z^P = (R+r)F$$

Situation 3: Man zieht unten mit der Schnur am grossen Zylinder, die Spule rollt (ohne Gleiten) auf dem kleinen Zylinder..

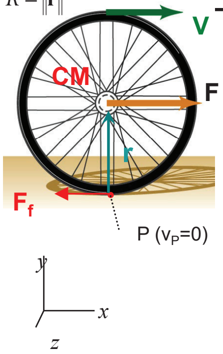
$$\tau_z^P = -(R-r)F$$



Wie bestimmt man die Beschleunigung des rollenden Rades ?

Methode 2: Rotation um den Kontaktpunkt P

$R = \|\mathbf{r}\|$



Situation: Eine Kraft **F** wird am CM angesetzt

→ Drehmoment $\tau_z^P = -RF$

2. Gesetz (Rotation)

$$\left.\begin{aligned} \tau_z^{\,P} &= -RF = I_z^{\,P}\alpha \\ \alpha &= -\frac{a_{CM}}{R} \end{aligned}\right\} \quad a_{\mathrm{CM}} = \frac{R^2}{I_z^{\,P}} F$$

(Steinersche Satz)

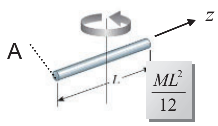
$$I_z^{\,P} = MR^2(1 + I_z^{\,CM}/MR^2)$$

$$a_{CM} = \frac{F}{M}\left(\frac{1}{1 + I_z^{\,CM}/MR^2}\right)$$

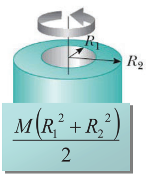
11-4. Welches ist das Trägheitsmoment des CM einer Achse ?

Beispiel gewisser homogener Basisobjekte

Dünner Stab um sein Zentrum herum:

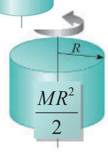


Hohler Zylinder bezüglich seiner Symmetrieachse:

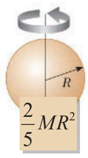


($R_1 \cong R_2 = R$) ⇒ **Hohlzylinder** :

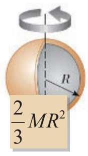
($R_1 = 0$, $R_2 = R$) ⇒ **Voller Zylinder**:



Vollkugel



Hohlkugel

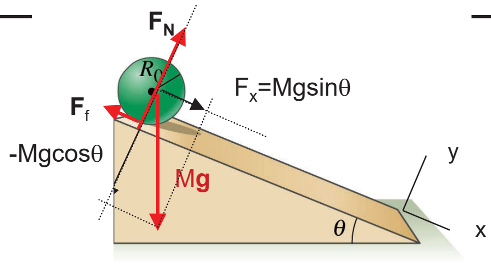


Wettrennen der Zylinder: durch Analyse der Kräfte

$$a_{CM} = \frac{F_x}{M}\left(\frac{1}{1+I_z^{CM}/MR^2}\right)$$

(Beschleunigung des Rades, s. vorher)

$$g' = \frac{g}{\frac{I_z^{CM}}{MR^2}+1}$$



Also, wer gewinnt das Rennen?

Hohlzylinder $I/MR^2=1$ $g'/g=0.5$

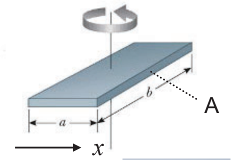
Vollzylinder: $I/MR^2=0.5$ $g'/g=0.67$

Vollzylinder aus Metall: $I/MR^2=0.5$

Vollzylinder aus Plastik: $I/MR^2=0.5$

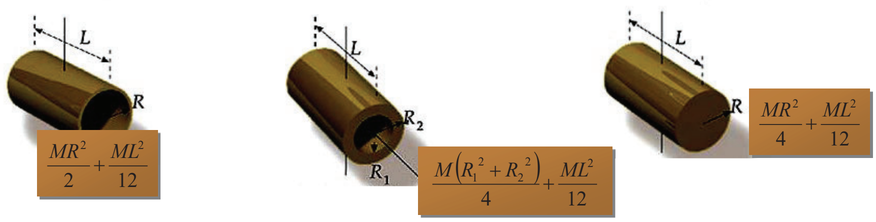
Noch mehr Trägheitsmomente

Parallelflache Form (Buch)



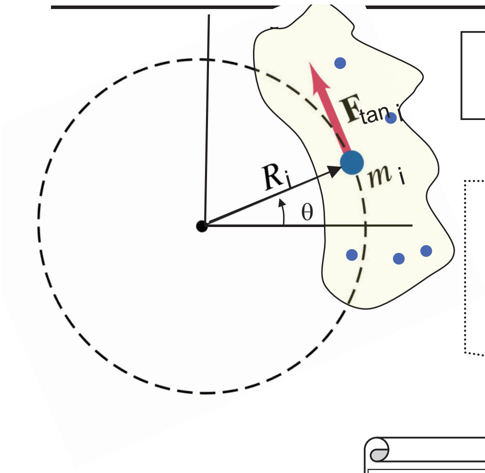
$$\frac{M(a^2+b^2)}{12}$$

Zylinder, Rotation ⊥ zu seiner Symmetrieachse



z. Erinnerung: Das 2. Gesetz der Rotation

ist eine direkte Konsequenz des 2. Axioms



2. Axiom :

$\mathbf{F}_{\tan,\, i} = m_i \mathbf{a}_{\tan,i}$

$$\tau_i = F_i R_i$$

$$a_{T,i} = \frac{dv_i}{dt} = R_i \frac{d\omega_i}{dt}$$

$$\tau_i = m_i R_i^2 \frac{d\omega_i}{dt}$$
$$= m_i R_i^2 \alpha$$

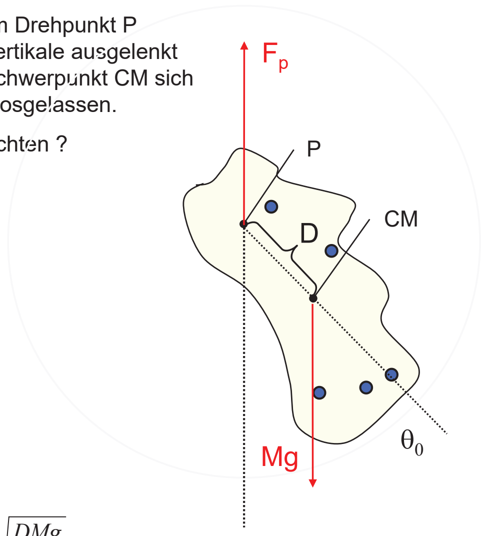
$$\sum \vec{\tau}_{ext}^{\,Achse} = I^{Achse} \vec{\alpha}$$

(siehe Lektion 5, 10 und 11)

Wie beschreibt man die Bewegung eines an einem fixen Punkt aufgehängten Objektes ?

Situation: Ein beliebiges Objekt ist an einem Drehpunkt P aufgehängt, und wird um θ_0 bezüglich der Vertikale ausgelenkt (Gleichgewicht entsteht, wenn der Massenschwerpunkt CM sich unterhalb von P befindet). Das Objekt wird losgelassen.

Frage: Welche Bewegung kann man beobachten ?



$$\sum \vec{\tau}_{ext}^{\,P} = I^P \vec{\alpha}$$

$$\tau_z^{\,P} = -DMg \sin\theta = I_z^{\,P} \alpha = I_z^{\,P} \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{DMg}{I_z^{\,P}} \sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{DMg}{I_z^{\,P}} \theta = 0$$

Harmonische Schwingung mit Eigenfrequenz ω_0:

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{DMg}{I_z^{\,P}}}$$

(Fast) die ganze Dynamik zusammengefasst

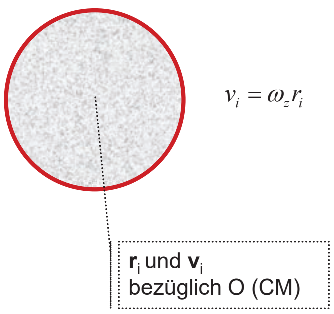
Kraft und Drehmoment, Masse und Trägheitsmoment, kinetische Energie

NB. Die Gesetze der Drehbewegung sind eine <u>direkte</u> Folge der Newtonschen Axiome. Die Gesetze bestehen also als Zwillingen …

	Linear (s. Lektion 4,5,7 & 10)	Rotation (s. Lektion 5, 9 -11)
Eindimensional (komponente)	$\sum F = ma$	$\sum \tau_{ext}^{Achse} = I^{Achse} \alpha$
Vektoriell	$\sum \vec{F} = M\vec{a}_{CM}$	$\sum \vec{\tau}_{ext}^{Achse} = I^{Achse} \vec{\alpha}$ $\vec{\tau} \equiv \vec{r} \times \vec{F}$
Masse, Trägheitsmoment	$M = \int dm$ (Widerständ zur Änderung der Geschwindigkeit)	$I^{Achse} = \int_{\text{um Drehachse}} r^2 dm$ (Widerstand zur Änderung der Winkelgeschwindigkeit)
Kinetische Energie	$K = M \frac{v_{CM}^2}{2}$	$K_{rot} = I \frac{\omega^2}{2}$

Welches ist die kinetische Energie eines starren Körpers ?

$v_{CM}=0$



$v_i = \omega_z r_i$

$$\underbrace{K = \frac{1}{2}\sum_i m_i v_i^2} \Rightarrow K_{rot} = \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega_z^2$$

$$K = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_z^{CM} \omega_z^2$$

11-5. Welches ist die mechanische Energie der Rotation ?

(bezüglich einer festen Drehachse)

$$\boxed{K_{rot} = \frac{I^{Achse}\,\omega^2}{2}}$$

$$I^{Achse} = \sum\left(\Delta m r^2\right) = \int_{Objekt} r^2\,dm$$

Die mechanische Energie

$E_{tot} = K + U + K_{rot}$

für ein Objekt mit Masse M, das sich um sein Massenschwerpunkt CM dreht:

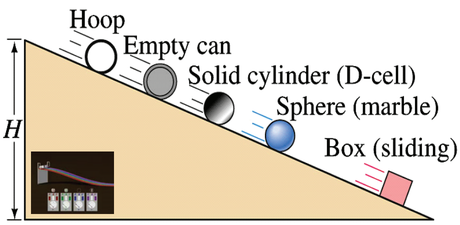
$$\boxed{E_{tot} \equiv \underbrace{M\vec{g}\cdot\vec{r}_{CM}}_{U_{CM}} + \underbrace{M\frac{v_{CM}^2}{2}}_{K_{CM}} + \underbrace{I^{CM}\frac{\omega^2}{2}}_{K_{rot}}}$$

Erhaltung der mechanischen Energie

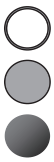
Für ein **konservatives** System in Drehung ist die mechanische Energie erhalten, sofern $\Sigma F_{ext}=0$ und $\Sigma\tau_{ext}=0$:

$$E = K_{CM} + K_{rot} + U_{CM} = \text{konstant}$$

Wettbewerb der Zylinder : mit Energieerhaltung



Welcher kommt zuerst unten an?



	$\frac{I^{CM}}{MR^2}$	$\frac{K_{CM}}{MgH}$
Hohlzyl.	1	1/2
Vollzyl.	1/2	2/3
Kugel	2/5	5/7
Schachtel		1

$$MgH = M\frac{v_{CM}^2}{2} + K_{rot}$$

Umwandlung von K_{rot} $\quad K_{rot} = I^{CM}\frac{\omega^2}{2}$

$$\omega = v_{CM}/R$$

$$MgH = M\frac{v_{CM}^2}{2}\left(1 + \frac{I^{CM}}{MR^2}\right)$$

$$\overbrace{M\frac{v_{CM}^2}{2}}^{K_{CM}} = MgH\frac{1}{\left(1+\frac{I^{CM}}{MR^2}\right)}$$