

9: Der Impuls und Systeme mit veränderlicher Masse

I. Welche Grössen sind während einer Kollision zweier Objekte (Stoss) erhalten ?

Impulserhaltungssatz

II. Was geschieht während eines Stosses ?

Inelastischer Stoss

III. Wie bestimmt man den Schub einer Rakete ?

III. Welche Grössen sind während einer Kreisbewegung erhalten ?

Rotationsenergie

Erhaltung des Drehimpulses

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** (4 Seiten):

9-1 Momentum and its relation to force

9-10 Systems of variable mass; rocket propulsion

11-3 angular momentum of a particle

11-6 conservation of angular momentum

Vorbereitende Übungen (7) **vor der Übungssession** zu erledigen :

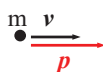
Giancoli 9-3, 9, 10, 24, 10-63; 11-1, 5, 7

Giancoli Kapitel 9-1; 9-2; 9-4 bis 9-7; 10-10; 11-1, 11-3, 11-4 (6)

9-1

9-1. Impuls

Impuls («linear momentum »)



$$\vec{p} \equiv m\vec{v}$$

Einheit: kgm/s

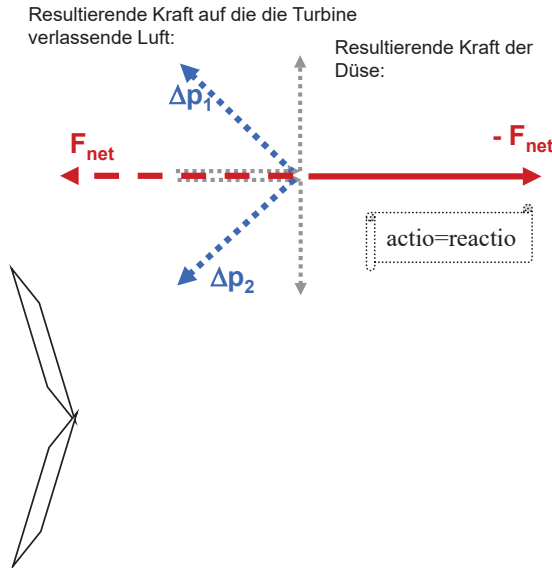
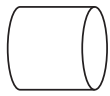
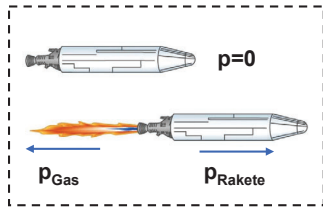
Das 2. Axiom umgeschrieben:

Die Impulsänderung eines Objektes mit der Zeit entspricht der resultierenden Kraft, die auf dieses einwirkt.

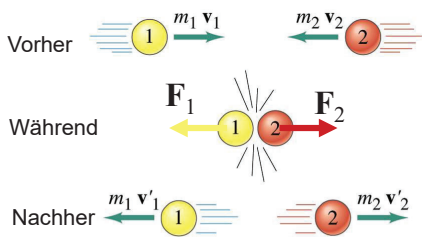
$$\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

9-2

zB: Schub und Antrieb



Was sind die Folgen einer Kollision zweier Objekte ?



Frage: Welche Beziehungen bestehen zwischen p_1 , p_2 , p_1' , p_2' ?

3. Axiom (actio=reactio): $F_1 = -F_2$

F_1 ist die auf 1 resultierende Kraft F_1 , auf 2 ist es F_2

2. Axiom (s. vorher): $\vec{F}_1 = \frac{d\vec{p}_1}{dt} = -\vec{F}_2 = -\frac{d\vec{p}_2}{dt}$

$$\Rightarrow \frac{d\vec{p}_1}{dt} + \frac{d\vec{p}_2}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{p_1 + p_2 = \text{konstant}}$$

Definition:

Elastischer Stoss: $K_i = K_f$

Zwei identische Objekte mit gleicher, aber entgegengesetzter Geschwindigkeit

1. Elastisch



2. Komplett inelastisch (Die Objekte kleben aneinander nach dem Stoss)



9-2. Impulserhaltung

Erhaltungssatz:

Der gesamte Impuls eines *isolierten Systems* (es wirken keine resultierenden äusseren Kräfte) ist erhalten.

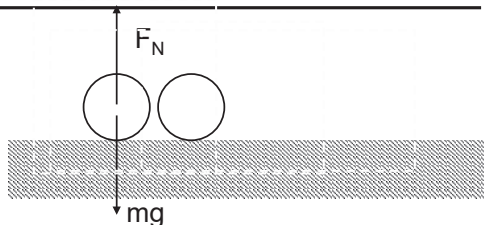
» E.g. für N Objekte:
$$\sum_{k=1}^N \vec{p}_k(t) = \text{konst.}$$

« ohne resultierende äussere Kräfte »

- » Häufig vernachlässigt man die Reibung
- » Schwache äussere Kräfte werden vernachlässigt (e.g. g während eines kurzen Stosses)
 - ✓ Möglich sofern man **p** gerade vor und nach dem Stoss bestimmt

Wann gilt ein System als isoliert ?

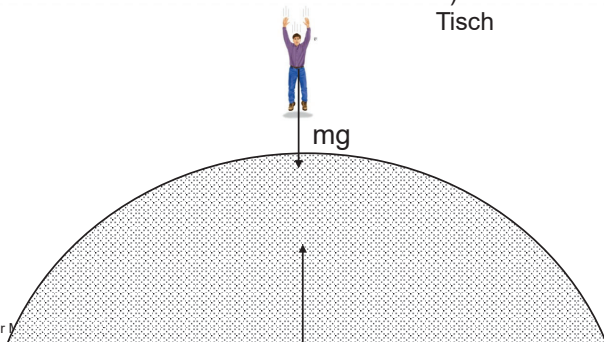
=System ohne resultierende äussere Kräfte



3) Billardkugel auf dem Tisch

4) Stoss zwischen 2 Billardkugeln auf dem Tisch

2) System Erde-Mensch



zB: geradlinige Stösse

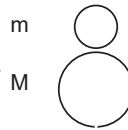
Supernova!

Während 1 s, kollabiert der Stern, dabei prallen seine Lagen vom Kern ab und dies resultiert in Stössen mit den externen Lagen mit dem Resultat, dass Materie mit relativistischen Geschwindigkeiten herausgeschleudert wird (0.1-0.2c).

Dieser Effekt wird mit dem Experiment mit 4 Bällen simuliert.

Was während jedem Stoss geschieht:

1. Erhaltung von p und K:
2. Bezugssystem A oder B ?



A. Objekt M in Ruhe



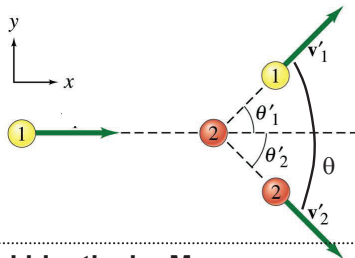
B. Objekt M mit entgegengesetzter v



E9-7

Grütter Mechanik 2024

Wie analysiert man einen elastischen Stoss in 2D ?



1. Impulserhaltung:

Komponenten x und y:

$$m_1 v_1' \cos \theta_1 + m_2 v_2' \cos \theta_2 = m_1 v_1$$

$$m_1 v_1' \sin \theta_1 + m_2 v_2' \sin \theta_2 = 0$$

2. Elastisch = Erhaltung der kinetischen Energie:

$$m_1 v_1^2 / 2 = m_1 v_1'^2 / 2 + m_2 v_2'^2 / 2$$

Zwei identische Massen:

Erhaltung der kinetischen Energie:

$$\frac{m}{2} v_1^2 = \frac{m}{2} v_1'^2 + \frac{m}{2} v_2'^2 \rightarrow v_1^2 = v_1'^2 + v_2'^2$$

Impulserhaltung:

$$m \vec{v}_1 = m \vec{v}_1' + m \vec{v}_2' \rightarrow \vec{v}_1 = \vec{v}_1' + \vec{v}_2'$$

$$v_1^2 \equiv \vec{v}_1 \cdot \vec{v}_1 = (\vec{v}_1' + \vec{v}_2')^2 = v_1'^2 + v_2'^2 + 2 \vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2'$$

Es folgt also

$$\vec{v}_1' \cdot \vec{v}_2' = 0$$

3 Gleichungen, 7 Unbekannte (s. Lineare

Algebra):

Sofern m_1, m_2, v_1 und $\theta (= \theta_1 + \theta_2)$ bekannt, kann $\vec{v}_1'$ und $\vec{v}_2'$ bestimmt werden

1. Entweder gilt $\theta = \pi/2$
2. Oder eines der Objekte ist in Ruhe nach dem Stoss (welches ?).

9-8

Grütter Mechanik 2024

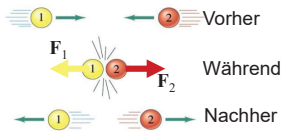
9-3. Was geschieht während einer Kollision ?

Kraftstoss

Situation: Elastischer Stoss von zwei Kugeln mit identischer Masse und Schnelligkeit:

$$m_1 = m_2 = m$$

$$v_1 = -v_2 = v$$



Energetische Bilanz (kinetisch):

$$E_{vorher} = K_{tot} = mv^2$$

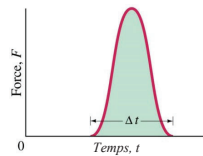
$$K_{während} = 0 \quad (v = 0)$$

$$E_{nachher} = K_{tot} = mv^2$$

$K_i = K_f$ (elastisch) $\Rightarrow F_1$ und F_2 sind konservativ

Welche Kraft wirkt ? K wird in eine elastische Deformationsenergie, ähnlich jener einer Feder, umgewandelt:
 $mv^2 = k\Delta x^2 \Rightarrow$ Es ergibt sich eine Deformation

Analyse: $v=0$ während des Stosses bedingt eine negative Beschleunigung aufgrund der Kontaktkraft ($F=ma$), welche sich auf nicht-lineare und komplexe Weise ändert (s. rechts)



Wie analysiert man die Kräfte während eines Stosses ?

Kraftstoss J und mittlere Kraft

Definition: Kraftstoss

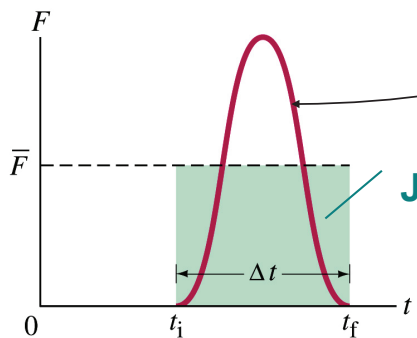
$$\vec{J} = \vec{p}_f - \vec{p}_i = \int \vec{F} dt$$

Einheit: Ns

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i = \int_{t_i}^{t_f} \frac{d\vec{p}(t)}{dt} dt = \int_{t_i}^{t_f} \vec{F}(t) dt = \vec{J}$$

$$\vec{p}_f - \vec{p}_i \equiv \int_{t_i}^{t_f} d\vec{p}(t)$$

$F(t)$: komplexe Funktion



Mittlere Kraft:

$$\vec{F} = \frac{\Delta \vec{p}}{\Delta t}$$

Kraftstoss J und mittlere Kraft (Bsp. und Demo)

Situation: Ein Hammer mit $m=0.5\text{kg}$, $v_i=-2\text{m/s}$ schlägt einen Nagel um $d = 1\text{cm}$ in ein Holzstück ($v_f=0$).

Frage: Welches ist die mittlere Kraft ?

Lösung in drei Etappen (1D : skalare Notierung):

1.) Berechnung der mittleren Geschwindigkeit

$$v_m = (v_f + v_i) / 2 = -1\text{m/s}.$$

2.) Berechnung der Stossdauer aufgrund der zurückgelegten Distanz und der mittleren Geschwindigkeit:

$$\Delta t \cong d / v_m = 10^{-2}\text{s},$$

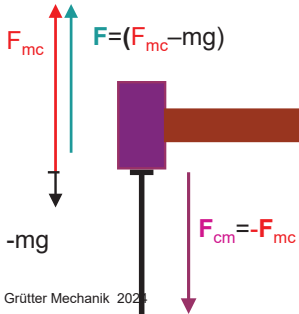
3.) Änderung des Impulses ergibt den Kraftstoss :

$$J = \Delta p = m(v_f - v_i) = +1\text{Ns}$$

Auf den Hammer wirkende mittlere resultierende Kraft :

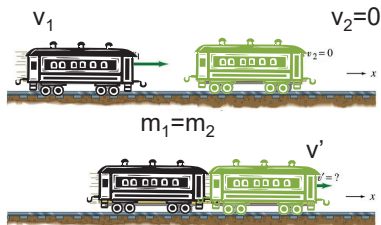
$$\bar{F} = \frac{\Delta p}{\Delta t} = \bar{F}_{mc} - mg$$

$$\rightarrow \bar{F}_{mc} = \frac{\Delta p}{\Delta t} + mg = 1/10^{-2} + 0.5 \cdot 9.8 \cong 105\text{N}$$



E9-11

Demo Stoss: Luftkissen-Wagen



1) Mit Rückstoss-Federn ausgestattete Wagen

$K_f = K_i$, da die Federkräfte konservativ sind : **elastischer Stoss**

2) Wagen kleben aneinander (**vollständig inelastischer Stoss**):

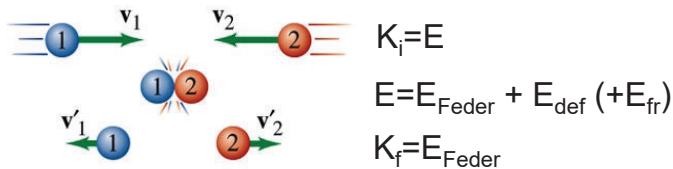
Vorher: $p_i = mv_1$

Nachher: $p_f = mv_1' + mv_2' = 2mv'$

Es folgt: $mv_1 = 2mv' \rightarrow v' = v_1/2$

E9-12

9-4. Wie verhält sich die kinetische Energie nach einem teilweise inelastischen Stoss ?



K ist nicht erhalten. Warum?

Definition: Restitutionskoeffizient C_R

(Stoss mit stationärem Objekt, e.g. Erde)

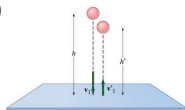
$$C_R = -v_f / v_i$$

Von $\Delta U + \Delta K = 0$ und $\Delta K = \Delta K' + W_{\text{NC}}$, i.e.

$$C_R = \sqrt{(\Delta K' / \Delta K)} = \sqrt{(\Delta U' / \Delta U)}$$

folgt

$$C_R = \sqrt{h' / h}$$



9-14

9-5. Wie bestimmt man die Beschleunigung eines Systems mit variabler Masse ?

Situation: Eine Rakete wird am höchsten Punkt in zwei Teile getrennt.

Impulserhaltung :

$$(M_1 + M_2)v = M_2 v_2 + M_1 (v - v_{\text{rel}})$$

$$v_{\text{rel}} = v. \text{ Sofern } M_1 = M_2 = M$$

$$Mv_2 = 2Mv \rightarrow v_2 = 2v : \text{ Beschleunigung!}$$



Annahme: Die Rakete hat eine initiale Masse von M_i und ein Bruchteil davon ΔM wird mit einer relativen Geschwindigkeit zur Rakete von v_{rel} ausgeworfen:

$$P_{i+1} - P_i = M_{i+1} v_{i+1} + \Delta M (v_i - v_{\text{rel}}) - M_i v_i \quad \left\{ \begin{array}{l} M_{i+1} = M_i - \Delta M \\ v_{i+1} = v_i + \Delta v \end{array} \right.$$

$$\Delta P = P_{i+1} - P_i = (M_i - \Delta M) (v_i + \Delta v) + \Delta M (v_i - v_{\text{rel}}) - M_i v_i$$

$$\Rightarrow \Delta P = M_i \Delta v - \Delta M v_{\text{rel}}$$

Wenn das System ΔM [kg] alle Δt Sekunden verliert :

$$\frac{\Delta P}{\Delta t} = M(t) \frac{\Delta v}{\Delta t} - v_{\text{rel}} \frac{\Delta M}{\Delta t} \xrightarrow{\Delta t \rightarrow 0} \frac{dP}{dt} = M(t) \frac{dv}{dt} - v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

$$\frac{dP}{dt} = \sum F^{\text{ext}}$$

$$\sum F^{\text{ext}} = M(t) \frac{dv}{dt} - v_{\text{rel}} \frac{dM}{dt}$$

9-16

Wie bestimmt man die resultierende Geschwindigkeit eines Systems, das Masse verliert ?

Bsp: Sie (75 kg) befinden sich in Ruhe auf einem Wagen von 75kg, mit einem Korb von 1000 Äpfeln von 150kg. Sie können einen Apfel mit $v_{rel} = 10\text{m/s}$ werfen.

Frage: Welches ist Ihre Geschwindigkeit am Ende (ohne Reibung) ?

$$M_i \Delta v_i = \Delta M v_{rel} \xrightarrow{\Delta v, \Delta M \rightarrow 0} dv = v_{rel} \frac{dM}{M(t)}$$

$$v_f = \int_0^{v_f} dv = v_{rel} \int_{M_0}^{M_f} \frac{dM}{M(v)} \quad \int \frac{1}{x} dx = \ln x$$

$$v_f = v_{rel} \ln\left(\frac{M_f}{M_0}\right)$$

Antwort: Die Masse ist um 50% reduziert. Ihre endgültige Geschwindigkeit ist dann $10 \ln(0.5) = -7\text{m/s}$

9-17

Grütter Mechanik 2024

9-6. Welches ist die Rotationsenergie ?

Kinematik/Dynamik der Kreisbewegung:

$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt}$	Linear	Rotation	$\vec{\alpha} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}$
$\sum \vec{F}_k = m\vec{a}$			$\sum \vec{\tau}_k^O = I^O \vec{\alpha}$

Situation: Massenpunkt auf einer Kreisbahn.

Welches ist seine kinetische Energie ?

$$K = \frac{1}{2} m v^2$$

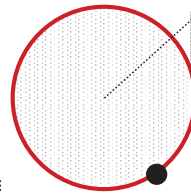
$$v = \omega_z r_{\perp}$$

$$(\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r})$$

Trägheitsmoment, I^O

$$I^O = m r_{\perp}^2$$

$$K_{rot} = \frac{I^O \omega^2}{2}$$



$\vec{r}$ und $\vec{v}$ bezgl. des Koordinatenursprungs O

9-18

Grütter Mechanik 2024

Wie kann man das 2. Gesetz der Rotation schreiben ?

Drehimpuls

2. Axiom

$$\vec{F} = m\vec{a}$$

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt} + \text{Impulserhaltung}$$

2. Gesetz Rotation

$$\vec{\tau} = I\vec{\alpha}$$

?

Definition: Drehimpuls L

$$\vec{L}^O \equiv \vec{r} \times \vec{p}$$

Für ein Massenpunkt m der sich bezüglich O bewegt

Während der Kollision kann F_R vernachlässigt werden:
 $\vec{p}$ ist konstant

$$\vec{r} \times \vec{p}$$

Konstant während und gerade nach der Kollision

Ursprung O

9-19

9-7. Unter welchen Bedingungen bleibt der Drehimpuls erhalten ?

L^O : Drehimpuls bezgl. O,

$\vec{r}$: Ortsvektor bezgl. O

2. Gesetz der Rotation ?

$$\frac{d\vec{L}^O}{dt} = \frac{d}{dt}(\vec{r} \times \vec{p}) = \underbrace{\frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p}}_0 + \vec{r} \times \underbrace{\frac{d\vec{p}}{dt}}_{\vec{F}_{net} = \frac{d\vec{p}}{dt}}$$

$\vec{r} \times \vec{F}_{net} = \vec{\tau}^O$

$$\vec{\tau}^O_{net} = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$$

In einem isolierten System, i.e. ohne resultierendes externes Drehmoment, bleibt der Drehimpuls erhalten

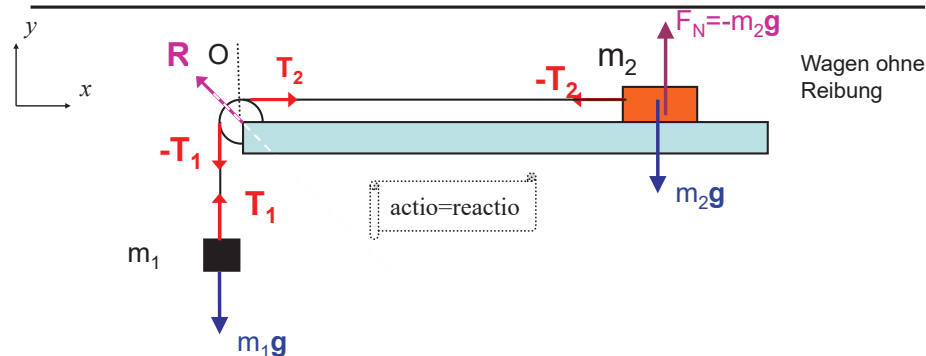
Gültig wenn das 2. Axiom gilt, d.h. wenn O einem Inertialsystem RI angehört

$\vec{F}$, $\vec{p}$ hängen nicht von der Wahl des Ursprungs O ab

$\vec{\tau}$, $\vec{L}$ sind durch O bestimmt

9-20

Wie kann man das Experiment «Wagen und Masse» (s. Lektion 4) mit Hilfe des Drehimpulses analysieren ?



1. Drehmomente:

2. Drehimpulse:

$$\left. \begin{aligned} \sum \vec{\tau}^O &= \frac{d \sum \vec{L}^O}{dt} = r m_1 g \\ &= r (m_1 + m_2) a \end{aligned} \right\} a = \frac{m_1}{(m_1 + m_2)} g$$

Grütter Mechanik 2024

E9-22

Das wahre 2. Gesetz zusammengefasst

Impuls und Drehimpuls
«linear and angular momentum»

2. Gesetz des Massenpunktes (Lektion 9)

$$\vec{p} \equiv m \vec{v}$$

$$\sum \vec{F}_i = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{L}^O \equiv \vec{r} \times \vec{p} = m r_{\perp}^2 \vec{\omega}$$

$$\sum \vec{\tau}^O_i = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$$

Ohne **resultierende** externe Kräfte:

Erhaltung von p

Ohne **resultierende** externe
Drehmomente: **Erhaltung von L**

NB. $\vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}_{\perp} \times \vec{p} = m \vec{r}_{\perp} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_{\perp}) = m r_{\perp}^2 \vec{\omega}$

	Linear (s. Lektion 4, 8 - 9)	Rotation (s. Lektion 5, 9)
1D	$F_{ext} = ma$ ($a = dv/dt$) ($\sum F_i = ma$)	$\tau_z = I \alpha_z$ ($\alpha_z = d\omega_z/dt$) ($\sum \tau_z = I \alpha$)
Vektoriell	$\vec{F}_{ext} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ ($\vec{p} = m\vec{v}$)	$\sum \vec{\tau}^O = \frac{d\vec{L}^O}{dt}$ $\vec{L}^O \equiv I^O \vec{\omega}$

$$I^{axe} = m r_{\perp}^2$$

Grütter Mechanik 2024

9-24

Welche Grössen sind erhalten während einer Bewegung ?

(Zusammenfassung der Lektionen 7-9)

Die Arbeit einer Kraft entspricht dem Integral der infinitesimalen Arbeit. (7-2)

Die kinetische Energie ist gleich dem Produkt von Masse mal die quadrierte Geschwindigkeit durch zwei geteilt. (7-5)

Die Arbeit der auf einen Körper wirkenden resultierenden Kraft ergibt die Veränderung seiner kinetischen Energie. (7-6)

Die auf einen Körper wirkende resultierende Kraft ist der Änderung seines Impulses mit der Zeit gleichzusetzen (2. Axiom). (9-2)

Das auf einen Körper wirkende resultierende Drehmoment ist gleich der zeitlichen Änderung seines Drehimpulses. (2. Axiom Rotation). (9-20)

Der Impuls sowie der Drehimpuls eines isolierten Systemes sind erhalten.

(9-5 und 9-20)

- Die **infinitesimale Arbeit** ist dem Skalarprodukt der Kraft mal infinitesimale Verschiebung gleichzusetzen. (Während derer man die Kraft als konstant annehmen kann)
- Die **kinetische Rotationsenergie** ist gleich Trägheitsmoment mal die quadrierte Winkelgeschwindigkeit durch zwei.
- Die **Arbeit der resultierenden Kraft (oder resultierende Arbeit)** ist gleich der Summe aller Arbeiten die geleistet werden.
- Wenn die resultierende Kraft gleich null ist, dann ist **der Impuls konstant** mit der Zeit.
- Wenn das resultierende Drehmoment gleich null ist, dann **ändert sich der Drehimpuls nicht** mit der Zeit.
- Ein **System ist isoliert**, wenn es keine externe Kräfte gibt, die arbeiten, sowie kein resultierendes, externes Drehmoment.

9-25

Grütter Mechanik 2024

Was ist bei (nicht-)konservativen Kräften zu beachten ?

(Zusammenfassung der Lektionen 7-9)

Eine Kollision gilt als elastisch, wenn die kinetische Energie erhalten bleibt. (9-4)

Eine Kollision gilt als komplett unelastisch wenn die beiden Objekte nachher aneinander kleben.

Eine Kraft ist konservativ, sofern die geleistete Arbeit nicht vom zurückgelegten Pfad abhängt. (7-8)

Eine Kraft ist nicht-konservativ, wenn es einen geschlossenen Pfad gibt, für den ihre Arbeit ungleich null ist. (7-24)

Die mechanische Energie eines konservativen Systems ist erhalten. (7-14)

Die totale Energie eines isolierten Systems ist immer erhalten. (7-20)

Die räumliche Ableitung einer mit einer konservativen Kraft assoziierten potentiellen Energie ist ihrer Kraft entgegengesetzt. (7-10)

Die Bewegung im Bereich eines stabilen Gleichgewichts ist immer eine Schwingung. (8-5)

- Gültig, sofern man das System kurz vor und nach dem Stoss betrachtet.
- Die infinitesimale **Arbeit der Reibungskräfte** ist immer negativ.
- Die **statische Reibungskraft** arbeitet nicht.
- Ein System ist **konservativ** sofern alle arbeitenden Kräfte konservativ sind.
- Ein System kann als **isoliert** betrachtet werden, sofern der Austausch von Energie mit der Aussenwelt vernachlässigbar ist, bezgl. den intern geleisteten Arbeiten.
- Die **potentielle Energie** ist die negative Stammfunktion seiner konservativen Kraft.
- Für kleine Bewegungen ums stabile Gleichgewicht ergibt die zweite Ableitung der potentiellen Energie geteilt durch die Masse und zwei die **Eigenkreisfrequenz** des harmonischen Oszillators.

9-26

Grütter Mechanik 2024