8: Schwingungen

I. Wie analysiert man die Kräfte eines Potentials?
   Energie-diagramm
   (In-)stabile Gleichgewichte
II. Wie beschreibt man die Bewegung am stabilen Gleichgewicht ?
   Harmonische Schwingungen
   Gedämpfte harmonische Schwingungen
III. Was beschreibt die erzwungene harmonische Schwingung ?
   Resonanz

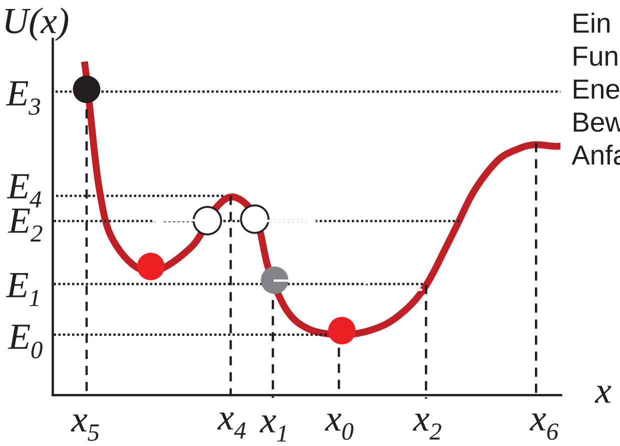
Vorbereitung für den Kurs und die Uebungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs** zu lesen *(4 p)*:
- 8-9 Potential energy diagrams
- 14-1 Oscillations of a spring; 14-2 Simple harmonic motion
- 14-7 Damped harmonic oscillator
- 14-8 Forced oscillations

Vorbereitungsübungen *(4)* **vor den Übungen** zu lösen:
- Giancoli 14-3, 9, 59, 65

Giancoli Kapitel 8-9;14-1 bis 5; 14-7 und 14-8

8-1. Wie bestimmt man ob ein Gleichgewicht stabil ist ?



Ein konservatives System wird durch die Funktion U(x) und seine mechanische Energie bestimmt (Konstante der Bewegung); durch die Anfangsbedingungen definiert (e.g. E_i).

1. Falls $E=E_1$ ... kann das Objekt sich von nach bewegen (K=)
2. Falls $E=E_0$ ... kann das Objekt
3. Falls $E=E_2$ …
4. Falls $E=E_3$ …
5. $E = E_4$ …

Welche Bewegung ergibt sich um ein stabiles Gleichgewicht ?

Potentielle Energie und ihre konservative Kraft

$$F_x(x) = -\frac{dU(x)}{dx}$$

Am Gleichgewicht um x_0, $F_x(x_0) = 0$:

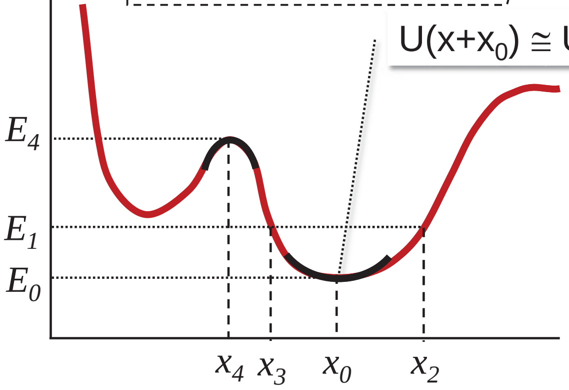
Gleichgewicht: $dU(x_0)/dx=0$

stabil $d^2U(x_0)/dx^2 > 0$

instabil: $d^2U(x_0)/dx^2 < 0$

Warum ergibt sich immer eine Schwingung als Bewegungsform um ein stabiles Gleichgewicht herum ?

$U(x)$



$$U(x+x_0) \cong U_0 + kx^2/2 \Rightarrow F_x = -kx$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x = 0$$

Besteht ein Bezug zwischen der gleichförmigen Kreisbewegung und der harmonischen Schwingung ?

Wie beschreibt man die Kreisbewegung in Koordinaten ?

$$\vec{r}(t)^2 = R^2 = konst \qquad \vec{r}(t) = (R\cos(\omega_0 t), R\sin(\omega_0 t)) = R(\cos(\omega_0 t), \sin(\omega_0 t))$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\omega_0(-\sin(\omega_0 t), \cos(\omega_0 t))$$

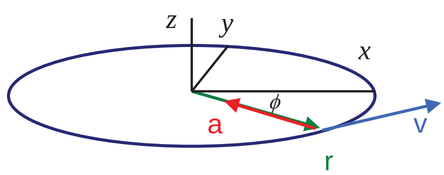
$$\vec{a}(t) = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R\omega_0^2(-\cos(\omega_0 t), -\sin(\omega_0 t))$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{r}(t)\omega_0^2$$

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} = -\omega_0^2 x}$$

$$\boxed{x(t) = R\cos(\omega_0 t + \varphi_0)}$$

Schwingung
(s. Lektionen 3 und 5)



$$(\omega_0 r)^2 + v^2 = konst$$

Wie bestimmt die mechanische Energie die Amplitude einer Bewegung um ein stabiles Gleichgewicht?

Die mechanische Energie eines konservativen Systems am stabilen Gleichgewicht

$$E = U(t) + K(t) = U_0 + \frac{kx^2}{2} + \frac{mv^2}{2}$$

$U_0=0$: $E = \frac{k}{2}\left(x^2 + \left(\frac{m}{k}\right)v^2\right)$ $\quad \frac{E}{m} = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}x(t)^2 + \left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2\right)$

Kann man die Konstanten der Bewegung davon herleiten ?

$$\frac{d}{dt}\left(\frac{E}{m}\right) = 0$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\left(\frac{k}{m}x(t)^2 + \left(\frac{dx}{dt}(t)\right)^2\right) = \frac{1}{2}\left(\frac{k}{m}2x(t)\frac{dx}{dt}(t) + 2\frac{dx}{dt}(t)\frac{d^2x}{dt^2}(t)\right) = 0$$

$$\left(\frac{k}{m}x(t)\frac{dx}{dt}(t) + \frac{dx}{dt}(t)\frac{d^2x}{dt^2}(t)\right) = 0 \qquad \frac{k}{m}x(t) + \frac{d^2x}{dt^2}(t) = 0$$

8-2. Wie beschreibt man die Bewegung des einfachen Pendels ?

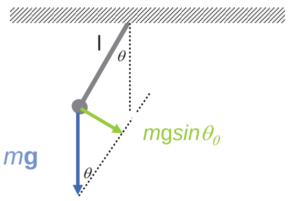
Situation: Kugel am Faden aufgehängt. Man lässt sie los und es ergibt sich eine periodische Bewegung.

Frage: Welches ist die Periode dieser Bewegung ?

2. Gesetz Rotation
(s. Lektion 5)

$$\sum \tau = I\alpha = I\frac{d^2\theta}{dt^2}$$

$$\vec{\tau} = \vec{l} \times m\vec{g}_{\perp} \qquad \tau = -lmg\sin\theta$$



$$I\frac{d^2\theta}{dt^2} = -mgl\sin\theta \qquad \frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\sin\theta = 0$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2} + \frac{mgl}{I}\theta = 0$$

Harmonische Schwingung !

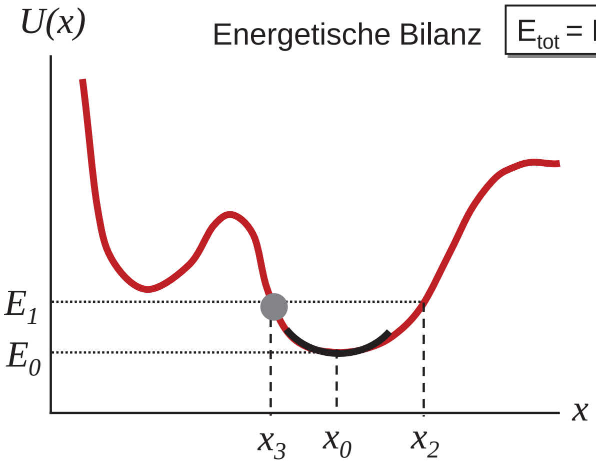
$\theta(t)=\theta_{max}\cos(\omega_0 t+\phi)$ $\qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{I}}$

ω_0: «Eigenkreisfrequenz»

8-3. Welches sind die Folgen nicht-konservativer Kräfte ?

Gedämpfte Schwingung

Energetische Bilanz $\boxed{E_{tot} = K + U - W_{NC} = \text{konst}}$



Bilanz der Kräfte

$$\sum \vec{F}_k = -\frac{dU}{d\vec{r}} + \vec{F}_{fr}$$

$$= m\vec{a} = m\frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Spezialfall: Strömungswiderstand

$$\vec{F}_{fr} = -b\vec{v} = -b\frac{d\vec{r}}{dt}$$

$$m\frac{d^2x}{dt^2} = -\frac{dU}{dx} - b\frac{dx}{dt}$$

Bewegung ums stabile Gleichgewicht

$$U \cong U_0 + \frac{k}{2}x^2$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m}x(t) + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt} = 0$$

Rekapitulation: die Bewegungsgleichungen

Zwei Bewegungsgleichungen

Die spezifischen Lösungen (nur eine Kraftkomponente berücksichtigt) :

$$\frac{d^2x}{dt^2}(t) = -\beta\frac{dx}{dt}(t)$$

Ansatz der Gleichung
(ex. 4-18 und Uebungen 4)

$$\frac{dv}{dt}(t) = -\beta v(t)$$

$$v(t) = Be^{-Ct}$$

v(0) = B

v(∞) = 0

C = β

$$v(t) = v(0)e^{-t/\tau}$$

$$\frac{d^2\theta}{dt^2}(t) = -\gamma\theta(t)$$

Ansatz mit Lösung der gleichförmigen Kreisbewegung
(ex. 3-5, 5-9, 5-11 und 8-7)

$$\theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\gamma}t + \varphi_0\right) + B\sin\left(\sqrt{\gamma}t + \varphi_0\right)$$

$$\gamma = \frac{k}{m} = \omega_0^2 \qquad \beta = \frac{b}{m} = \frac{1}{\tau}$$

Welche Funktion beschreibt die gedämpfte Schwingung ?

Fall 1: vernachlässigte Reibung
$$\frac{d^2x}{dt^2}+\frac{k}{m}x(t) = 0$$

Lösung 1: harmonischer Oszillator

$x(t)=x_{max}\cos(\omega_0 t+\phi)$

Fall 2: vernachlässigte konservative Kraft
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{b}{m}\frac{dx}{dt}=0$$

$$\frac{d}{dt}v+\frac{b}{m}v=0 \qquad \frac{dx}{dt}=v_0 e^{-\frac{b}{m}t} \qquad x(t)=x_0 - v_0\frac{m}{b}e^{-\frac{b}{m}t'}\Big|_0^t$$

$$= x_0+v_0\frac{m}{b}\left(1-e^{-\frac{b}{m}t}\right)$$

Lösung 2: Asymptotische Bewegung

$x(t)=A+Ce^{-(b/m)t}$

Lösungsansatz
$$x(t)=\left[Ae^{-\alpha t}\right]\cos(\omega t+\varphi)$$

Welches sind die Konsequenzen der Lösung ?

Die drei Fälle der gedämpften Schwingung

$$x(t)=A\cos(\omega t+\varphi)e^{-\frac{b}{2m}t}$$

$$\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}\sqrt{1-\frac{b^2}{4mk}}$$

I. Schwingfall
$b^2<4mk$

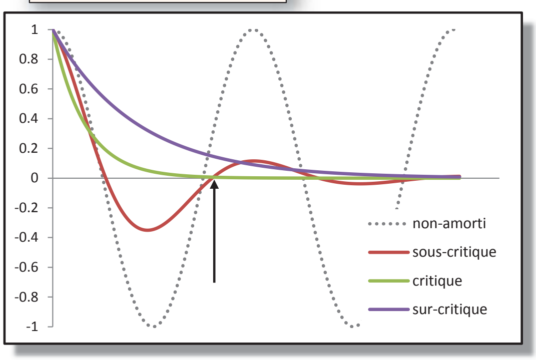
$$\omega<\sqrt{\frac{k}{m}}$$

II. Aperiodischer Grenzfall
$b^2=4mk$

$$\omega=0$$
$$x(t)=Ae^{-\frac{b}{2m}t}$$

III. Kriechfall
$b^2>4mk$

Keine reelle Lösung …



8-4. Welche Bewegung ergibt sich unter Anwendung einer periodischen Kraft?

Situation: Eine Masse ist an einer Feder aufgehängt. Eine sinusoidale Kraft wirkt auf die Masse. **Frage:** Welche Amplitude ergibt sich für die Bewegung der Masse ?

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x(t) + 1/\tau \frac{dx}{dt} = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t) \qquad \tau = \frac{m}{b} \qquad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

Ansatz $x(t) = R_0 \cos(\omega t - \varphi)$

$$R_0(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\omega/\tau}$$

Rekapitulation: $\omega_0^2 = k/m$

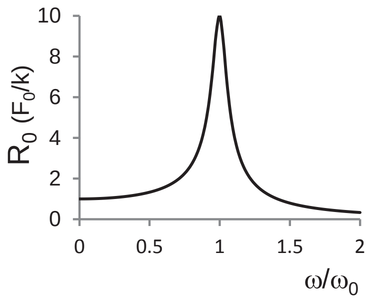
Wie bestimmt die Frequenz ω der externen Kraft die Amplitude ?

$$R_0(\omega) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \frac{\omega^2}{\tau^2}}}$$

$$\tan\varphi = \frac{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)}{\omega/\tau}$$

$$R_0(0) = \frac{F_0}{m}\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{F_0}{k}$$

$$R_0(\infty) = 0$$



Wann ist die Amplitude $R_0(\omega)$ maximal ?

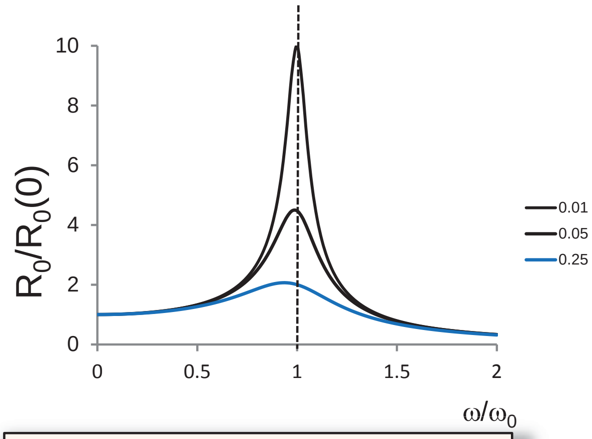
$$\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \omega^2/\tau^2 = \min$$

Wie charakterisiert man die Qualität einer Resonanz ?

Welches ist die maximale Amplitude $R_0(\omega)$?

$$\frac{d}{d\omega}\left[\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}\right]=0$$

$$\boxed{\omega_{\max}^{\;\;2}=\omega_0^{\,2}-\frac{1}{\tau^2}}$$



$$R_0(\omega_{\max})=\frac{F_0}{m}\frac{\tau}{\omega_0}$$

$$\frac{R_0(\omega_{\max})}{R_0(0)}=\frac{\left(\frac{F_0}{m}\frac{\tau}{\omega_0}\right)}{\left(\frac{F_0}{k}\right)}$$

$$=\frac{k}{m}\frac{\tau}{\omega_0}=\omega_0\tau$$

Definition:

Qualitätsfaktor $\qquad Q=\omega_0\tau$

Welche mittlere Leistung ergibt sich für die erzwungene Schwingung ?

Definition der momentanen Leistung (Lektion 7)

$$P(t)=F(t)v(t) \qquad F(t)=F_0\cos(\omega t)$$

$$v(t)=-\omega\sin(\omega t)A+\omega\cos(\omega t)B$$

$$P(t)=\omega F_0\left[B\cos^2(\omega t)-A\sin(\omega t)\cos(\omega t)\right]$$

Mittlere Leistung = verwendete Leistung während einer Periode ($\omega T=2\pi$)

$$\langle P\rangle=\frac{\int_0^T P(t)dt}{T}$$

$$\int_0^T P(t)dt=\omega F_0\Big[B\underbrace{\int_0^T\cos^2(\omega t)dt}_{T/2}-A\underbrace{\int_0^T\frac{\sin(2\omega t)}{2}dt}_{0}\Big]$$

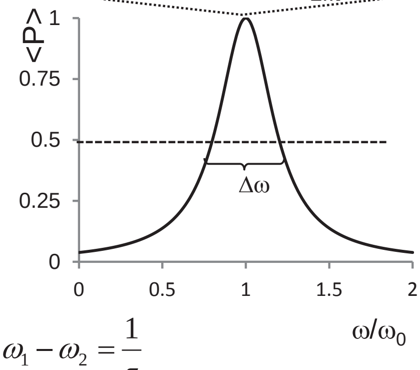
$$\langle P\rangle=\omega F_0\frac{B}{2} \qquad B=\frac{F_0}{m}\frac{\omega/\tau}{\left(\omega_0^{\,2}-\omega^2\right)^2+\frac{\omega^2}{\tau^2}}$$

Wie charakterisiert man die mittlere Leistung der erzwungenen Schwingung mit schwacher Dämpfung ?

$$\left\langle P(\omega)\right\rangle = \frac{\tau F_0^{\;2}}{2m}\frac{1}{\underbrace{\frac{\left(\omega_0^{\;2}-\omega^2\right)^2}{\left(\frac{\omega}{\tau}\right)^2}}_{\substack{=1 \\ \text{bei } \omega_1,\ \omega_2}}+1}$$

Wann ist die Leistung maximal ?

$$\left\langle P(\omega_0)\right\rangle = \max = \frac{\tau F_0^{\;2}}{2m}$$



$$\left(\omega_0-\omega_{1,2}\right)^2 = \frac{1}{\tau^2}\frac{\left(\omega_{1,2}/\omega_0\right)^2}{\left(1+\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0}\right)^2}$$

Schwache Dämpfung: $\omega_{1,2}/\omega_0 \sim 1$

$$\Delta\omega = \omega_1-\omega_2 = \frac{1}{\tau}$$

$$\boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$