

7: Arbeit und Energie

- I. Wie kann man die Geschwindigkeit eines Objektes aufgrund seiner Bahnkurve bestimmen (ohne die benötigte Zeit zu berechnen) ?
Das Arbeit-Energie Prinzip
Konservative Kräfte
- II. Welche Energieformen hängen von der Position des Objektes ab ?
Mechanische Energie
- III. Wie berechnet man die Leistung eines sich in Bewegung befindenden Objektes ?
- IV. Unter welchen Umständen ist die mechanische Energie nicht erhalten ?
Energieerhaltungssatz
Nicht-konservative Kräfte

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** (4 Seiten):

7-1 Work done by a constant force

7-4 Kinetic energy and the work-energy principle

8-5 Law of conservation of energy

Vorbereitende Übungen (9) **vor der Übungssession** zu erledigen :

Giancoli 7-5, 50, 53, (59), 63abc

8-12, 62, 70, 39

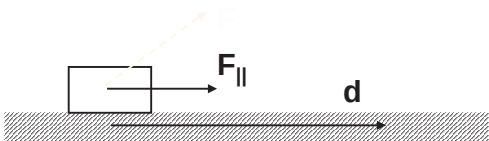
Giancoli Kapitel 7-1 bis 7-4; 8-1 bis 8-8

7-1

7-1. Wie definiert man die Arbeit einer Kraft ?

Situation:

Eine Kraft $\mathbf{F}$ wirkt während einer Distanz $\mathbf{d}$ auf ein starres Objekt in geradliniger Bewegung



Definition:

Die **Arbeit** W

einer konstanten Kraft $\mathbf{F}$ ergibt sich aus der Multiplikation von der Distanz $\mathbf{d}$

mit

der Kraftkomponente $\mathbf{F}_{\parallel}$ dieser Kraft $\mathbf{F}$ entlang $\mathbf{d}$:

$$W = F_{\parallel} d$$

$$W = Fd \cos \theta = \vec{F} \cdot \vec{d}$$

Einheit: [Nm $\equiv$ J] (Joule)

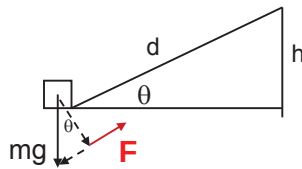
NB. Für eine sehr kurze Zeit kann man F immer als konstant annehmen.
Infinitesimale Arbeit:

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

7-2

Hängt die Arbeit des Gewichtes von der Bahnkurve ab ?

Situation: Eine Masse m wird mit $v=\text{konst}$ auf einer schiefen Ebene mit θ um eine Höhe h verschoben (ohne Reibung). Welche Arbeit wird auf die Masse angewendet ?

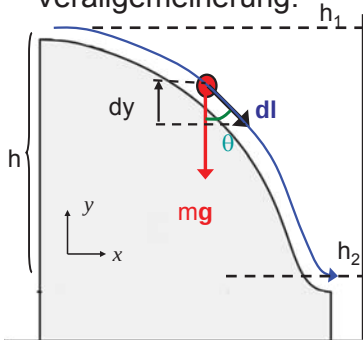


1. Distanz $d = h/\sin\theta$

2. Kraft $F \parallel$ zu d : $mg\sin\theta$

3. Arbeit $W = mg\sin\theta d = mgh$

Verallgemeinerung:



Für eine kleine Distanz dl : $dW = mg\cos\theta dl$

$dy = \cos\theta dl$: $dW = -mg dy$

$$W_{h_1 \rightarrow h_2} = \int_{h_1}^{h_2} dW = -mg \int_{h_1}^{h_2} dy = -mg(h_2 - h_1) = mgh$$

Die Arbeit des Gewichtes **hängt nicht von der Bahnkurve**, sondern nur von der Änderung der Höhe ab.

7-2. Was verbindet Arbeit und Energie ?

Definition

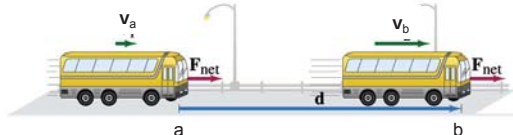
Energie = Fähigkeit eines Objektes, Arbeit zu leisten

$\Rightarrow$ Änderung der Energie = Arbeit

$$\Delta E = W$$

Situation: Ein Objekt (Bus) wird von einer resultierenden Kraft F_{net} auf geradliniger Bahn während einer Distanz d beschleunigt.

Frage: Welches ist die Änderung der Energie ?



$$\begin{aligned} W_{a \rightarrow b} &= \int_a^b dW = \int_a^b F_{\text{net}} dx = \int_a^b m a dx = \int_a^b m \frac{dv}{dt} dx \\ &= m \int_a^b dv \frac{dx}{dt} = m \int_{v_a}^{v_b} v dv = m \frac{v^2}{2} \Big|_{v_a}^{v_b} \end{aligned}$$

Definition kinetische Energie $K \equiv \frac{mv^2}{2}$

NB. Arbeit einer konstanten Kraft $\vec{F}$ die während einer infinitesimalen Distanz $d\vec{r}$ wirkt :

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{r}$$

$$W_{a \rightarrow b} = \int_a^b dW = \int_a^b \vec{F}_{\text{net}} \cdot d\vec{r} = \int_{x_a}^{x_b} m a_x dx + \int_{y_a}^{y_b} m a_y dy + \int_{z_a}^{z_b} m a_z dz$$

Woher stammt das Verhältnis zwischen Arbeit und kinetischer Energie ?

Das Arbeit-Energie Prinzip

$$W_{a \rightarrow b}^{net} = \frac{m}{2} \int_a^b d(\vec{v}^2) = \int_a^b dK \quad K \equiv \frac{mv^2}{2}$$

s. voriges Dia:

$$W_{a \rightarrow b}^{net} = \int_a^b F_{net} dx = \int_a^b m a dx = \frac{m}{2} (v_b^2 - v_a^2) = K_b - K_a$$

Die Summe aller an einem Objekt geleisteten Arbeiten bestimmt die Änderung seiner linearen kinetischen Energie

$$W_{net} = K_b - K_a$$

Beispiele

Frage: Welche Arbeit muss geleistet werden, um ein Auto mit $m=1200\text{kg}$ auf $v_1=100\text{ km/h}$ und von $v_1=100$ nach $v_2=140\text{ km/h}$ zu beschleunigen?

Wie unterscheiden sich diese zwei Arbeiten quantitativ ?

Von 0 auf $v = 100/3.6 = 27.8\text{ m/s}$,
K nimmt um $mv_1^2/2$ zu :

Von 27.8 m/s auf $v_2 = 140/3.6 = 38.9\text{ m/s}$

$$\Delta K = 1200 \cdot 27.8^2 / 2 = 1200 \cdot 773 / 2$$

$$= 460\text{ kJ}$$

$$= 910 - 460\text{ kJ} = 450\text{ kJ}$$

Situation: Bei einem Verkehrsunfall prallt ein VW Polo mit $m_A=1200\text{ kg}$ auf einer nassen Strasse ($\mu_k=0.5$) auf einen Fiat Punto mit $m_B=900\text{ kg}$, der vor einer Verkehrsampel steht.

Frage: Kann der Fahrer des VW, der mit $v_A=54\text{ km/h}$ fährt, einen Unfall vermeiden wenn er $d_A=15\text{ m}$ vor dem Fiat zu bremsen beginnt ?

$$d = v^2 / 2g\mu_k$$

$$d = \quad \quad \quad \text{m}$$

$$W = -F_f d = -mg\mu_k d = -mv^2/2$$

NEIN

E7.7:

7-3. Wann ist eine Kraft konservativ ?

Definition: konservative Kraft

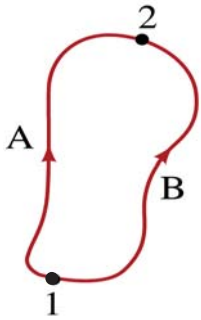
Eine Kraft gilt als konservativ, wenn die geleistete Arbeit nur von den beiden Endpunkten abhängt und nicht vom zurückgelegten Weg.

F ist konservativ, wenn die geleistete Arbeit W die folgende Bedingung für irgendwelche Bahnkurven A oder B erfüllt :

$$W_{1 \rightarrow 2}^A = W_{1 \rightarrow 2}^B$$

$$W_{1 \rightarrow 2}^A = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} \Big|_{\text{Weg A}} = \int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{l} \Big|_{\text{Weg B}}$$

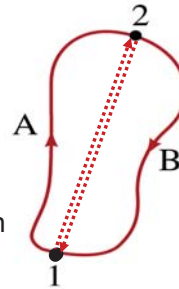
i.e.



Äquivalente Definition:

Auf einem Rundgang ist die von einer konservativen Kraft geleistete Arbeit null.

(Die Arbeit von 1 → 2 ist derjenigen von 2 → 1 entgegengesetzt: $W_{12} = -W_{21}$)



Beispiele

Wie kann man bestimmen, ob eine Kraft konservativ ist ?

Beweisen, dass für irgendeinen geradlinigen Weg, die Arbeit hin und zurück immer gleich null ist ...

1. Das Gewicht

$$\text{Arbeit: } W_{G^{1 \rightarrow 2}} = mg(y_1 - y_2) = -W_{G^{2 \rightarrow 1}}$$

2. Die Federkraft

Hookesches Gesetz

(Von der Feder ausgeübte Kraft)

$$\vec{F} = -k\vec{x} \quad \xrightarrow{\Delta x \rightarrow 0}$$

$$dW(x) = kx dx \quad \dots \rightarrow W_{a \rightarrow b} = k \int_a^b x dx = \frac{k}{2} \int_a^b d(x^2) \\ = \frac{k}{2} (x_b^2 - x_a^2) = -W_{b \rightarrow a}$$

$$\Delta E = W:$$



$$E_{\text{Feder}} = \frac{k}{2} x^2$$

7-4. Wann ist eine Energie «potentiell» ?

Definition:

Die potentielle Energie (Potential) U ist eine Energie, deren (konservative) Kräfte von der Position der Objekte abhängen.

Die Änderung einer potentiellen Energie ist

- 1) der Arbeit gleichgesetzt, die sie durch die assoziierte konservative Kraft leisten kann
- 2) Der durch ihre konservative Kraft geleisteten Arbeit, die ein Objekt verschiebt, entgegengesetzt

$$\int_1^2 dU = U_2 - U_1 = \Delta U = -W_{12}$$

$$-W_{12} = -\int_1^2 \vec{F} \cdot d\vec{r} = -\vec{F} \cdot \Delta\vec{r}$$

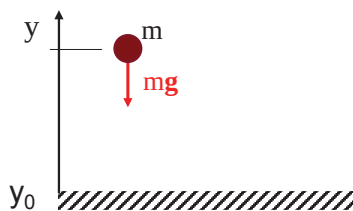
$$\Delta U = -(F_x \Delta x + F_y \Delta y + F_z \Delta z)$$

$$\frac{dU}{dx} = -F_x$$

$$\vec{F} = - \frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}}$$

(-U ist die Stammfunktion von F)

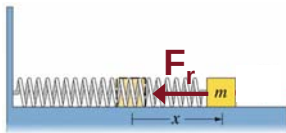
Potentielle Energie : 3 Beispiele



$$\frac{dU_g}{dx} = 0 = -\frac{dU_g}{dz} \rightarrow F_x = F_z = 0$$

$$U_g = mgy + C_g$$

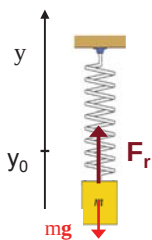
$$\frac{dU_g}{dy} = -mg \rightarrow$$



$$U_r = kx^2/2 + C_r$$

$$\frac{dU_r}{dx} = -kx \rightarrow$$

$$\leftarrow F_y = F_z = 0$$



$$U_s = -ky^2/2 + mgy + C_s$$

$$\frac{dU_s}{dy} = ky - mg \rightarrow$$

$$\leftarrow F_x = F_z = 0$$

Integrationskonstante C ?
 $\Rightarrow$ Freie Wahl von $U(r)=0$

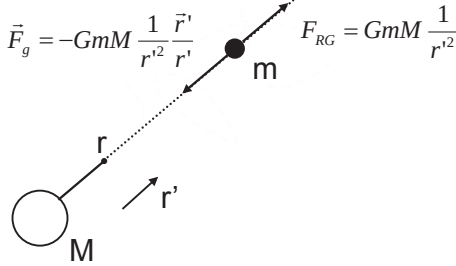
Welches ist das Potential der Gravitation ?

Situation: Man (RG) verschiebt vom Unendlichen her eine Masse m mit konstanter Geschwindigkeit, bis zu einer Distanz r eines Planeten (M).

Die von RG geleistete Arbeit = Potential =
- Arbeit des Planeten

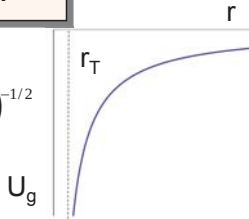
$$dW^{RG} = GmM \frac{1}{r'^2} dr'$$

$$W_{\infty \rightarrow r}^{RG} = \int_{\infty}^r GmM \frac{1}{r'^2} dr' = -GmM \frac{1}{r'} \Big|_{\infty}^r$$



$$U_g(\vec{r}) = -G \frac{mM}{r}$$

$$= -GmM(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$$



7-5. Die mechanische Energie

Definition: mechanische Energie $E \equiv K + U$

Arbeit-Energie Prinzip :

Die Arbeit der mit U assoziierten Kraft auf ein Objekt ist der Änderung seiner kinetischen Energie gleichgesetzt :

$$W_{12} = \Delta K$$

Die Änderung der *potentiellen* Energie ist der Arbeit die sie leisten KANN gleichgesetzt

$$\Delta U = W_{21} = -W_{12} = -\Delta K$$

$$\Rightarrow \Delta E \equiv \Delta K + \Delta U = 0$$

Erhaltung der mechanischen Energie
eines Systemes (sofern *alle* Kräfte, die Arbeit verrichten, *konservativ* sind):

$$E = \text{konstant}$$

$$E = \frac{mv^2}{2} + mgh = \text{konstant}$$

(beinhaltet auch die Federenergie: $U_R = kx^2/2$)

Wann sind Berechnungen einfacher, die die Erhaltung der mechanischen Energie ausnützen ?

Wie entscheidet man zwischen Kinematik/Dynamik oder energetischen Betrachtungen ?

Falls die Zeit keine Rolle spielt, sind Berechnungen mit der Energieerhaltung häufig simpler und direkter

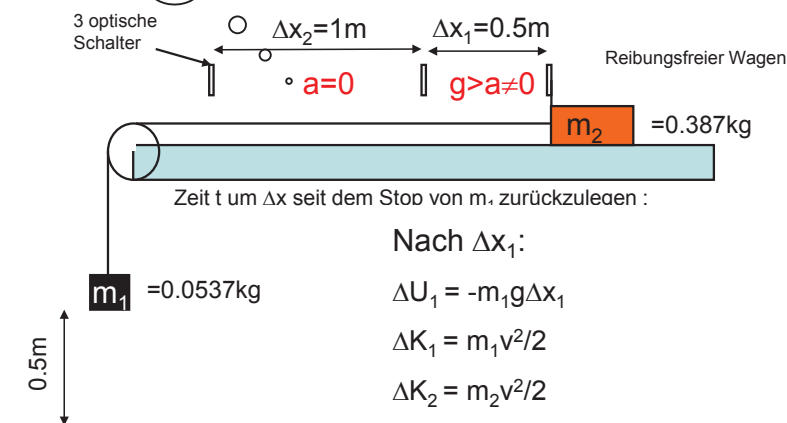
ABER ...

(sich vergewissern, dass e.g. $v=0$ in einer der Situationen)

Die Demos der Lektion 4

– aus energetischer Sicht

Warum?



$$m_1 g \Delta x_1 = m_1 v^2 / 2 + m_2 v^2 / 2$$

$$v^2 = \frac{m_1 g}{(m_1 + m_2)} 2 \Delta x_1$$

7-6. Leistung

Definition:

Leistung = pro Zeit verrichtete Arbeit

Mittlere Leistung: $\bar{P} = \frac{W}{T}$

Einheit: 1W=1J/s

NB. 1kWh = 3.6 MJ

Arbeit-Energie Prinzip :

$$P = \Delta E / T$$

Momentane Leistung:

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \frac{dE}{dt}$$

Momentane Leistung einer Kraft:

$$P(t) = \frac{dW}{dt} = \vec{F} \cdot \frac{d\vec{l}}{dt}$$

$$\Rightarrow P(t) = \vec{F} \cdot \vec{v}$$

z.B.: Das Stauwehr in Verbois GE und die Windmühle von Martigny

Frage 1: Welche maximale Leistung kann das Stauwehr in Verbois produzieren ?

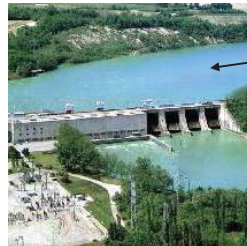
Lösung 1: Änderung der potentiellen Energie/s = Leistung

$$= m/t gh = 530 \cdot 10^3 \cdot 9.8 \cdot 20$$

$$= 1.04 \cdot 10^8 \text{ W} = 104 \text{ MW}$$

(Dichte des Wassers
 $\rho \approx 1000 \text{ kg/m}^3$)

(In ca. 2 Jahren produziert man dieselbe Energie wie die Grande Dixence in einem Jahr ...)



530 m³/s

(Das Wasser fällt um 20m)

Frage 2: Welche maximale Leistung P_{max} könnte ein mit einer Geschwindigkeit von $v = 36 \text{ km/h}$ blasender Wind ($\rho = 1.2 \text{ kg/m}^3$) erzeugen, der durch die von den rotierenden Flügeln (Diameter $D = 80 \text{ m}$) einer Windmühle aufgespannte Fläche passiert ?

Lösung 2: Kinetische Energie der Luft $K = mv^2/2$.

Masse, die während einer Zeit T passiert, $m(T) = \rho \pi r^2 v T$ (Zylindervolumen)

$$= \pi \rho D^2 v T / 4$$

$$\text{Leistung} = K/T = \pi \rho D^2 v^3 / 8 = \text{ MW}$$

z.B. : Momentane Leistung einer Kraft

Beispiel 1: Auto von 1200kg beschleunigt von 110 auf 120 km/h in $T=3s$ (s. Beispiel Lektion 1):

Beschleunigung $a=\Delta v/T=0.9m/s^2$

1) $F=ma=m\Delta v/T=1.1kN$, mittlere Geschwindigkeit $v = 115 \text{ km/h} \sim 32m/s$

2) $P = Fv = mv\Delta v/T \cong 35kW$
(Ohne Reibung ...)

($\cong 50 \text{ PS}$)

Beispiel 2: Ein Auto ($m=1200kg$) mit einer Leistung von 150kW kann eine maximale Geschwindigkeit von 220km/h erreichen. Berechnen Sie die Reibungskraft.

Bedingungen: Maximale Geschwindigkeit bedeutet $a=0$.

$$F_M + F_{Fr} = 0$$

$$P = F_M v_{\max}$$



7-7. Energieerhaltungssatz

Die totale Energie eines isolierten Systems ist konstant.



Der Anfangszustand eines Systems bestimmt damit alle möglichen Zustände !

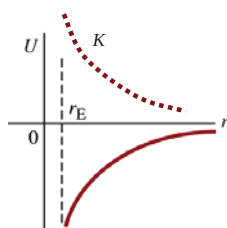
Die Energie kann von einer Form in eine andere umgewandelt werden, aber die Summe ist konstant.

Grundlage bilden experimentelle Beobachtungen, universell verifiziert

z.B. Fluchtgeschwindigkeit

Beispiel: Welche Geschwindigkeit (i.e. kinetische Energie) braucht es, damit man der Erdanziehung entfliehen kann ?

$$E = K + U > 0 :$$



$$K = \frac{mv_0^2}{2} = G \frac{mM_T}{R_T} = -U(R_T)$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{2GM_T}{R_T}} = \sqrt{2gR_T}$$

$$R_T = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$$

$$v_0 = \quad \text{km/s}$$

NB. Schwarze Löcher – Das Licht kann der Anziehung eines Sternes nicht entfliehen :
Welcher Radius R_{TN} hat ein schwarzes Loch der Masse M_S ($2 \cdot 10^{30} \text{ kg}$) ?

$$c = \sqrt{\frac{2GM_{TN}}{R_{TN}}} \rightarrow R_{TN} = \frac{2G}{c^2} M_S$$

$$R_{TN} = 3 \text{ km}$$

E7-21

Beispiel: Bungee Jumping

Lösung eines Problems mittels $E = \text{konstant}$

Situation: Eine Assistentin springt, an einem Gummiseil befestigt, von einer Brücke (Seilmasse und Reibungskräfte vernachlässigt). Das Gummiseil verzieht sich, sobald die Falldistanz grösser ist als die Länge L des Seils, wie eine Feder mit Konstante k .

Frage: Um welche zusätzliche Distanz Δy wird die Assistentin noch fallen, bevor sie vom Gummiseil gestoppt wird ?

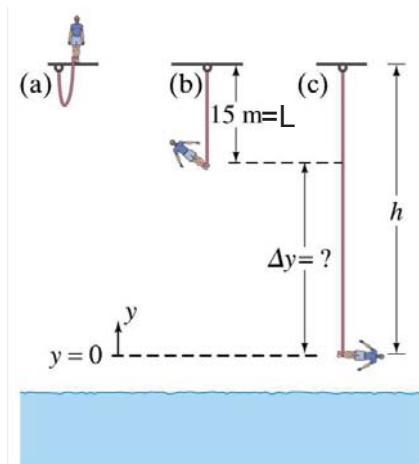
$$E_a = mg(L + \Delta y)$$

$$E_c = k\Delta y^2/2$$

$$E_a = E_c \rightarrow k\Delta y^2/2 = mg(L + \Delta y)$$

$$\frac{k}{2mg} \Delta y^2 - \Delta y - L = 0$$

$$\Rightarrow \Delta y = \frac{mg}{k} \left(1 + \sqrt{1 + 2 \frac{kL}{mg}} \right)$$

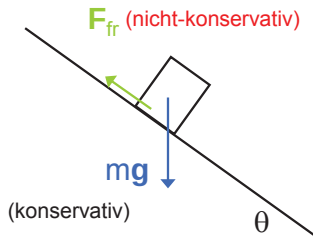


E7-22

7-8. Wann ist die mechanische Energie K+U nicht erhalten ?

Nicht-konservative Kräfte

Das Arbeit-Energie Prinzip besagt $\Delta K = W_{\text{net}}$



$$\Delta K = W_{\text{net}} = W_C + W_{\text{NC}}$$

wo $W_C = -\Delta U$ (Potentialunterschied)

$$\Rightarrow \Delta K = -\Delta U + W_{\text{NC}} \rightarrow \underbrace{\Delta K + \Delta U - W_{\text{NC}}}_{\Delta E} = 0$$

Reibungskräfte: $F_N \mu_s$, $F_N \mu_k$, F_v

Gleitreibung: $dW = \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -\mu_k F_N \frac{\vec{v}}{v} d\vec{r} = -\mu_k F_N \frac{\vec{v}}{v} \cdot \vec{v} dt$

Viskoser Strömungswiderstand: $dW = \vec{F}_f \cdot d\vec{r} = -b\vec{v} \cdot d\vec{r} = -b\vec{v} \cdot \vec{v} dt$

Weg hin und zurück:

< 0

< 0

z.B. Arbeit nicht-konservativer (NC) Kräfte

Es sei die totale Energie definiert als $E_{\text{tot}} = K + U - W_{\text{NC}}$

$\Delta K + \Delta U - W_{\text{NC}} = 0 \Leftrightarrow E_{\text{tot}} = \text{konstant} \Rightarrow$ **Die gesamte Energie ist IMMER erhalten**

Man kann ΔW_{NC} mit einer Energie assoziieren, so dass $\Delta E_{\text{NC}} = -W_{\text{NC}}$
 $\Rightarrow \Delta K + \Delta U + \Delta E_{\text{NC}} = 0$

Umwandlung der mechanischen Energie durch nicht-konservative Kräfte in

1. Hitze

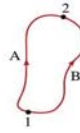
2. Verformung (s. Unfälle ...)

3. Andere NC Kräfte, wie Ton, Elektrizität ...

Energie zusammengefasst

Arbeit einer Kraft: $W_{a \rightarrow b} = \int_a^b \vec{F} \cdot d\vec{l}$

$$dW = \vec{F} \cdot d\vec{l}$$



Konservative Kräfte $W_{1 \rightarrow 2}^A = W_{1 \rightarrow 2}^B$ (Arbeit retour ist null)

Nicht-konservative Kräfte (Reibungen): W_{NC} hängt von der Bahnkurve ab

Arbeit-Energie Prinzip

$$W_{net} = \Delta K$$

Energieerhaltungssatz

Leistung : $P = dW/dt = dE/dt$

$$E_{tot} = K + U - W_{NC} = \text{konstant}$$

Kinetische Energie $K \equiv \frac{mv^2}{2}$

Mechanische Energie $E = K + U$

Potentielle Energie einer konservativen Kraft $\vec{F} = -\frac{dU(\vec{r})}{d\vec{r}}$

Federenergie $U_{ressort} = \frac{k}{2} x^2$

Gravitationsenergie

$$U_g(\vec{r}) = -G \frac{mM_T}{r}$$