

6: Physik der Planeten

Gravitation

I. Wie kann man die Bewegung in einem rotierenden Bezugssystem beschreiben ?

Zentrifugalkraft und Corioliseffekt

II. Wodurch wird die Umlaufbahn eines Planeten bestimmt ?

Die 3 Keplerschen Gesetze

Ursprung der Gezeiten

III. Warum ist der Raum gekrümmt ?

Äquivalenz-prinzip

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** (2 Seiten):

11-8 Rotating frames of reference

6-1 Newton's law of universal gravitation

Vorbereitende Übungen (3) **vor der Übungssession** zu erledigen :

Giancoli 6-1, 3, 37

Giancoli Kapitel 6-1 bis 6-5; 6-8 sowie 11-8 bis 11-9

6-1

6-1. Kann man die Rotation der Erde vernachlässigen ?

Zentripetalbeschleunigung am Äquator:

Radius $R_T = 6.4 \cdot 10^6 \text{ m}$, Periode (1j) $T = 86.4 \cdot 10^3 \text{ s}$

$\Rightarrow a_R = 0.034 \text{ m/s}^2 \cong 0.3\% g$

Schlussfolgerung:

Für die Mehrheit der Beobachtungen kann man die Rotation der Erde vernachlässigen.

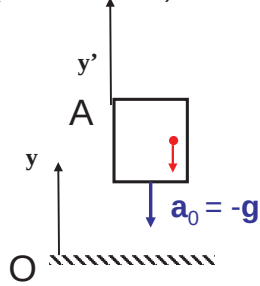
Aber: Es bestehen Ausnahmen

(s. weiter unten)

6-2

Wie muss man das 2. Axiom einem beschleunigten Bezugssystem anpassen ?

(siehe Lektion 3)



Situation: Man lässt einen Ball in einem frei fallenden Lift los.

Frage: Welches ist der Betrag der auf den Ball wirkenden resultierenden Kraft, vom Lift aus gesehen?

Für eine korrekte Darstellung der resultierenden Bewegung im beschleunigten Bezugssystem:

Muss man **eine fiktive Kraft $-ma_0$** hinzufügen

[Der reellen Beschleunigung des Liftes entgegengesetzt]

Welche Scheinkraft muss man einem rotierenden Bezugssystem anfügen?

In diesem Bezugssystem, das sich dem Karussell entsprechend dreht, beobachtet man, dass das Mädchen

1. sich nicht bewegt,
2. aber immer noch der Kraft des Stuhles ausgesetzt ist ...

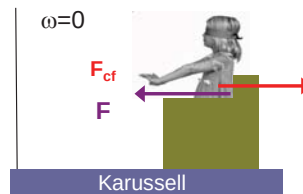
Newton: « $F=ma$ » :

Einführen einer *Scheinkraft*

(Beschleunigung): *Zentrifugalkraft*.

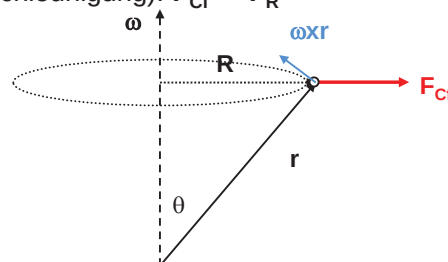
Zeigt nach aussen mit Norm mv^2/R

$$\vec{F}_{Cf} = -m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$



$\mathbf{F}_{Cf}$ ist eine Scheinkraft, **Trägheitskraft**, Folge des beschleunigten Bezugssystems

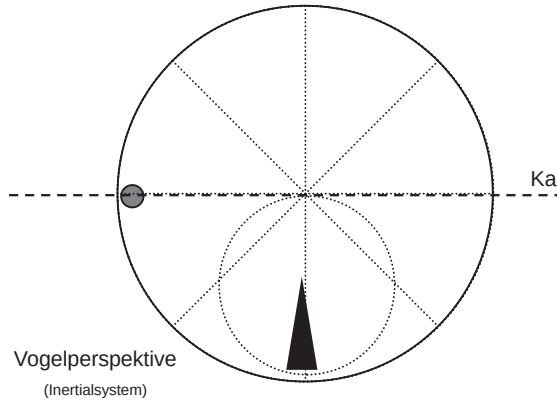
s. auch Zentripetalbedingung (radiale Beschleunigung): $\mathbf{F}_{Cf} = -\mathbf{F}_R$



Genügt die Zentrifugal«kraft» der Beschreibung aller Bewegungen im rotierenden Koordinatensystem ?

Situation: Ein Pendel oberhalb einer sich drehenden Scheibe wird losgelassen. Seine Amplitude ($R\sin\theta$) entspricht dem Radius der Scheibe und die Periode der der Scheibe.

Beobachtung: Das Pendel bewegt sich auf einer Geraden in einem Inertialsystem, aber auf einem Kreis im Bezugssystem der Scheibe.



Kann die Zentrifugalkraft die Beobachtung erklären ?

Wann ist der Corioliseffekt zu berücksichtigen ?

Konsequenz des rotierenden Bezugssystems. Man muss zur resultierenden Kraft zwei Scheinkräfte addieren (Inertialkräfte), wovon eine dem Corioliseffekt zugeschrieben wird

Coriolis «Kraft»

$$\vec{F}_{Co} = -2m\vec{\omega} \times \vec{v}$$

Wann ist dieser Effekt wichtig ?



6-2. Wie bestimmen Distanz und Masse die Gravitationskraft ?

1.) Auf der Erde: $g=9.8 \text{ m/s}^2$

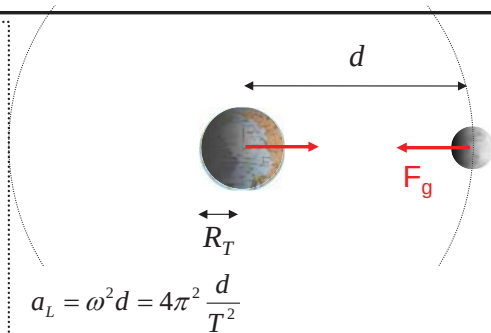
Der Mond umkreist die Erde mit einer Periode von 27.3 Tagen und Radius $d=384'000 \text{ km}$

Zentripetalbeschleunigung des Mondes $a_L = 0.0027 \text{ m/s}^2$

$$\rightarrow a_L \cong g/3600$$

$\Rightarrow$ Mit zunehmender Distanz ist die Gravitationskraft stark abgeschwächt

$$d/R_T \cong 60$$



$$\frac{1}{375} \text{ m/s}^2$$

2.) Wenn wir unsere Masse verdoppeln, verdoppelt sich die Anziehungskraft: $\Rightarrow F_g \propto m$

$$\Rightarrow g(r) \propto r^{-2}$$

$\Rightarrow$ Zwei Objekte mit Masse m_1 und m_2 :

$$F_g \propto m_1 m_2$$

$$\Rightarrow F_g \propto m_1 m_2 / r^2$$

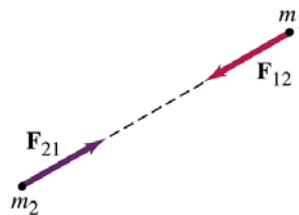
6-9

Grütter Mechanik 2024

Wie lautet das universelle Gravitationsgesetz Newtons ? eine auf Distanz wirkende Aktion

Die Gravitationskraft zwischen zwei punktförmigen Massen wirkt immer auf deren Verbindungslinie mit Norm

$$|\vec{F}_{12}| = G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_{12}|^2}$$



Die Gravitationskonstante

$$G=6.67 \cdot 10^{-11} \text{ Nm}^2/\text{kg}^2$$

Vektoriell:

$$\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$$

Mehrere Massen m_k die auf m_1 einwirken:

$$\vec{F}_{net} = \sum_k \vec{F}(\vec{r}_1 - \vec{r}_k) = \sum_k G \frac{m_1 m_k}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_k|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_k)$$

6-10

Grütter Mechanik 2024

Beispiele

1. Wie kann man G bestimmen ?

Das Experiment von Cavendish

2. Kann man die Masse der Erde M_T bestimmen, sofern man ihren Radius R_T kennt?

$$g = GM_T/R_T^2 \rightarrow M_T = gR_T^2/G$$

$$M_T = 9.8 (6.38 \cdot 10^6)^2 / 6.67 \cdot 10^{-11}$$

3. Welches ist die Schwerkraft anderswo ?

	M/M_T	$(R/R_T)^2$	g^*/g
Mond	0.012	0.07	
Mars	0.10	0.28	
Jupiter	318	120	
Sonne	330'000	12100	
Sirius B	$\sim 330'000$	~ 1	

$$g^* = G \frac{M}{R^2} \Rightarrow \frac{g^*}{g} = \frac{M}{M_T} \frac{R_T^2}{R^2}$$

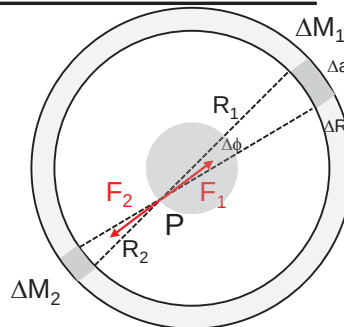
Wie verhält sich das Gewicht im Innern der Erde ?

Situation: Man berücksichtige eine Hohlkugel mit Dicke ΔR und konstanter Dichte, und P sei ein Punkt in ihrem Innern mit Entfernung r vom Zentrum.

Frage: Welches ist die Schwerkraft bei P aufgrund der Masse die man unter einem fixen Winkel $\Delta\phi$ sieht?

Mit einer Dicke ΔR , $\Delta V = \Delta R \cdot \Delta A = \Delta R \cdot \Delta a \cdot \Delta b$

Masse $\Delta M = \rho \cdot \Delta V$



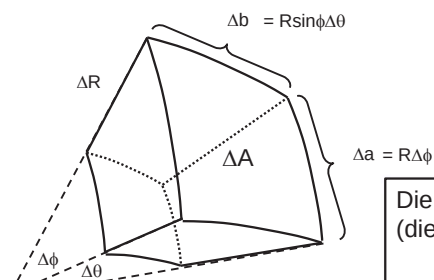
Oberfläche ΔA hängt von R^2 ab

$$F = Gm \frac{\Delta M}{R^2} = Gm \frac{\rho \Delta R (R^2 \sin \phi \Delta \theta \Delta \phi)}{R^2}$$

Unabhängig von R!

Konsequenz ?

$$\vec{F}_1 + \vec{F}_2 = 0$$



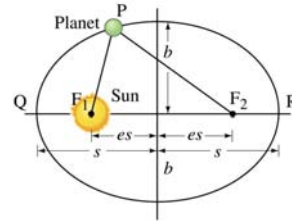
Die Schwerkraft entspricht der einer Kugel mit Radius r (die Masse ausserhalb trägt nichts dazu bei), s. Serie 3.

$$F = Gm \frac{M(r)}{r^2} = Gm \frac{\rho \frac{4\pi}{3} r^3}{r^2} = \frac{4\pi}{3} Gm \rho r$$

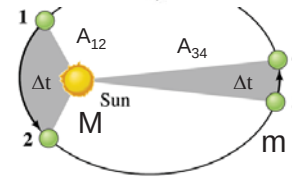
Welche Konsequenzen entspringen dem Gravitationsgesetz ?

Die 3 empirischen Gesetze Keplers (~1600)

1. Gesetz: Planeten bewegen sich auf elliptischen Bahnkurven, in deren einem gemeinsamen Brennpunkt die Sonne steht.



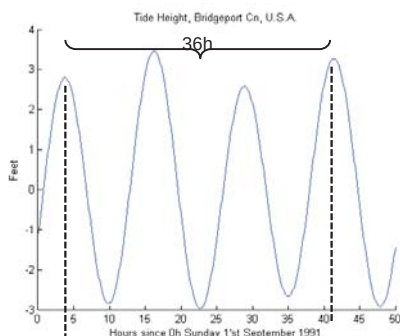
2. Gesetz: Der Ortsvektor des Planeten überstreicht in gleichen Zeiten gleich große Flächen.



3. Gesetz: Für zwei Planeten verhalten sich die Perioden T_1 und T_2 und die grossen Bahnhalfachsen s_1 und s_2 gemäss

$$\left(\frac{T_1}{T_2}\right)^2 = \left(\frac{s_1}{s_2}\right)^3$$

6-3. Die Gezeiten



Warum ergibt sich ein maximaler (oder minimaler) Wasserstand alle 12h anstatt alle 24 h?

Warum ergibt sich eine Flut, wenn der Mond sich auf der anderen Seite der Erde befindet ?

Situation: «Erde» auf Kreisbahn um die «Sonne». Wir vernachlässigen die Erdrotation.

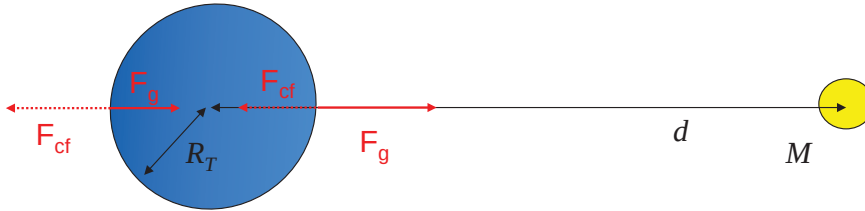
Im Erdmittelpunkt
(Zentripetalbedingung)
 $F_g = GmM \frac{1}{d^2} = m\omega^2 d$

$F_g > m\omega^2(d-R_T)$
Das Wasser «fällt» Richtung Sonne

$F_g < m\omega^2(d+R_T)$

Trägheit des Wassers (1. Axiom) : Tendenz zur geradlinigen Laufbahn

Im mit $\omega = \text{konst}$ sich drehenden Koordinatensystem (die Erde ist bewegungslos):
Hinzufügen der fiktiven Trägheitskraft (Zentrifugal-«kraft», F_{cf})



Wie entstehen Gezeiten ?

Analyse in Bezug auf Beschleunigungen

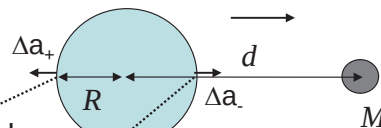
1. Beschleunigung der Erde durch die Sonne (Mond):

$$a = G \frac{M}{d^2} = a_R \quad (\text{Zentripetalbedingung})$$

2. Kraft (Beschleunigung) an der Oberfläche:

$$a_+ = G \frac{M}{(d+R)^2}$$

$$a_- = G \frac{M}{(d-R)^2}$$



3. Beschleunigungs-Diskrepanz

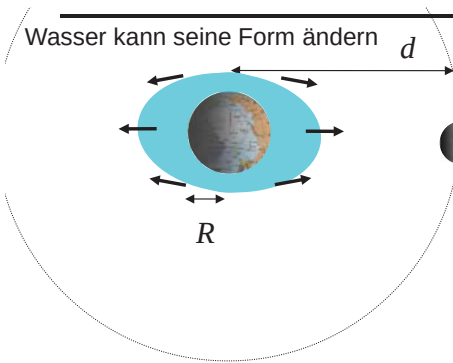
$$\Delta a_+ = a_+ - a_R = G \frac{M}{(d+R)^2} - G \frac{M}{d^2}$$

$$\Delta a_+ = -2G \frac{M}{d^3} R \quad \Delta a_- = +2G \frac{M}{d^3} R$$

negativ

positiv

Hat die Sonne einen vernachlässigbaren Effekt ?



Wasser kann seine Form ändern

d

R

$$\Delta a = 2GR \frac{M}{d^3}$$

$$2GR = 8.5 \times 10^{-4} \text{ Nm}^3/\text{kg}^2$$

1. Effekt des Mondes:

»Masse Mond $M_M = 7.4 \times 10^{22} \text{ kg}$

»Distanz Mond-Erde $d_M = 3.8 \times 10^8 \text{ m}$

$$M_M/d_M^3 = 1.3 \times 10^{-3} \text{ kg/m}^3 \rightarrow$$

$$\Delta a_M = 1.2 \times 10^{-6} \text{ N/kg [m/s}^2]$$

Sonne

2. Effekt der Sonne:

»Masse d. Sonne $M_S = 2 \times 10^{30} \text{ kg}$

»Distanz Sonne-Erde $d_S = 1.5 \times 10^{11} \text{ m}$

$$M_S/d_S^3 = 5.9 \times 10^{-4} \text{ kg/m}^3 \quad (\text{NB. } d_S = 1 \text{ UA})$$

$$\rightarrow \Delta a_S = 0.51 \times 10^{-6} \text{ N/kg}$$

entspricht ~43% dessen des Mondes

→ minimaler/maximaler Tidenhub (Ebbe-Flut) ~ 0.7

E6-17

6.4 Entspricht die Masse des Gravitationsgesetzes der trägen Masse ?

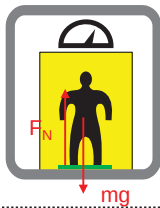
Äquivalenzprinzip

Das Äquivalenzprinzip (Einstein 1915)

Die Masse (Trägheit) m (in $F=ma$)
ist gleich der
gravitationellen Masse m (in GMm/r^2)

Fall 1: In der Gegenwart einer
Schwerkraft (mg), der Lift sei in
Ruhe ($a=0$).

$a=0$



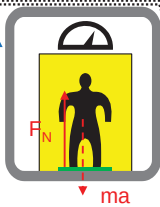
Einbezug aller Kräfte ergibt $F = ma = 0$

$$\square F_N - mg = 0 \Rightarrow F_N = mg$$

F_N misst das Gewicht.

Fall 2: Ohne Schwerkraft. Der
Lift wird mit $a=g$ nach oben
beschleunigt.

$a=g$



Im Bezugssystem des Liftes ($a'=0$):

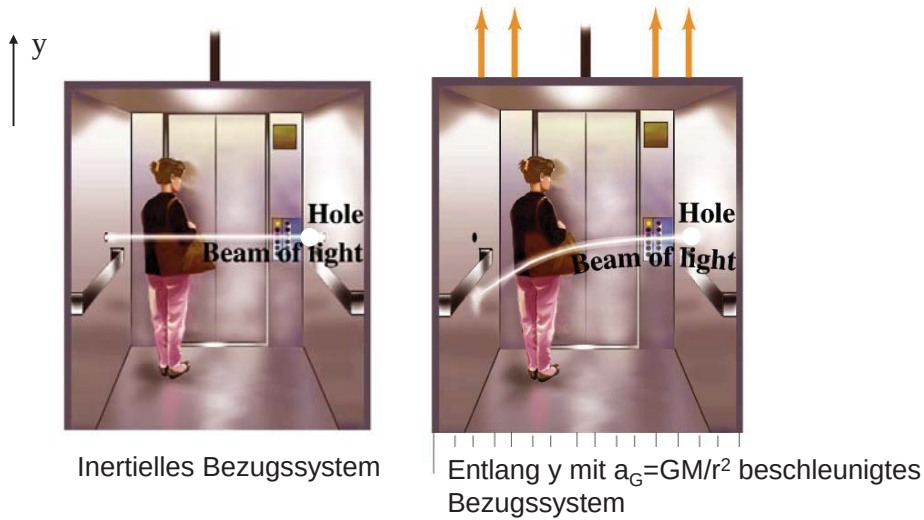
$\square$ Es muss die **Trägheitskraft ma**
(= $-mg$) berücksichtigt werden, die im
entgegengesetzten Sinn der
Beschleunigung des Liftes wirkt

F_N misst das Gewicht.

«eine durch die Schwerkraft verursachte Beschleunigung, kann nicht von der aufgrund eines Bezugssystems, das in die entgegengesetzte Richtung beschleunigt wird, unterschieden werden »

6-20

Kann die Schwerkraft das Licht beeinflussen ?



Inertielles Bezugssystem

Entlang y mit $a_G = GM/r^2$ beschleunigtes Bezugssystem

Kinematik (Approximation) für eine Zeit T:

$$v_x = c$$

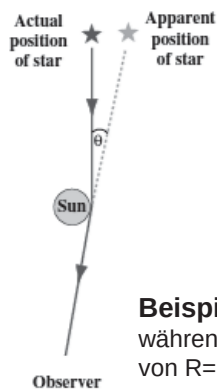
$$\rightarrow x = cT;$$

$$v_y = -a_G T$$

$$\rightarrow y = -a_G T^2/2$$

Der gekrümmte Raum ...

Von der Erde aus gesehen (1917)



Beispiel: Ein Lichtstrahl (Geschwindigkeit $c=3 \cdot 10^8 \text{m/s}$), der die Sonne während 2s gerade passiert, legt eine ihrem Radius entsprechende Distanz von $R=7 \cdot 10^8 \text{m}$ zurück und ist einer mittleren Beschleunigung von $g^* \sim 25g$ ausgesetzt.

Kinematik (s. vorher) $\rightarrow \Delta y = 4g^*/2 \sim 500 \text{m} \rightarrow \tan \theta = \Delta y/R = 7 \cdot 10^{-7} \sim \theta \text{ [rad]}$

$\Rightarrow \theta \sim 4 \cdot 10^{-5} \text{ Grad} \sim 0.15 \text{ arcsec}$

(Die Animation ist stark übertrieben)

Was versetzt ein Objekt in Bewegung ?

(Zusammenfassung Lektionen 4-6)

Im natürlichen Zustand bewegt sich ein Objekt gleichförmig (1. Axiom). (4-2)

Die Beschleunigung eines Objektes ist proportional zur resultierenden Kraft und invers mit seiner Masse gewichtet (2. Axiom). (4-3)

Jede auf ein Objekt wirkende Kraft, aufgrund der Aktion eines anderen Objektes, bedingt eine gleich starke, aber entgegengesetzt auf letzteres Objekt einwirkende Kraft, und umgekehrt (3. Axiom) (4-7)

Die radiale Komponente der resultierenden Kraft muss die Zentripetalbedingung erfüllen, sobald das Objekt sich auf einer kreisförmigen Bahn bewegt. (5-2)

Die Winkelbeschleunigung eines Objektes ist proportional zum resultierenden Drehmoment und invers mit seinem Trägheitsmoment gewichtet (2^{ème} loi). (5-13)

- **Der Ruhezustand** entspricht einer bewegungslosen gleichförmigen Bewegung.
- **Eine Kraft** ist eine Wechselwirkung zwischen zwei Körpern die sie anzieht oder abstösst.
- Die **resultierende Kraft** ist die vektorielle Summe aller Kräfte, die auf das Objekt wirken.
- Die Masse entspricht einem Widerstand zur Geschwindigkeitsänderung (**Trägheitsmasse**).
- **Actio und Reactio** wirken nie auf das gleiche Objekt.
- **Die Zentripetalkraft** gibt es nicht: Es handelt sich um eine Bedingung der resultierenden Kraft.
- Die Zentripetalbedingung ist obligatorisch, sobald man weiss, dass ein Objekt sich auf einer Kreisbahn bewegt.
- Das Drehmoment beschreibt die Fähigkeit einer Kraft, eine Rotation auszuüben.
- Das Trägheitsmoment entspricht einem Widerstand zur Änderung der Winkelgeschwindigkeit.

6-24

Grütter Mechanik 2024

Welches sind die spezifisch behandelten Kräfte ?

(Zusammenfassung Lektionen 4-6)

Die Normalkraft wirkt stets senkrecht (normal) zur Oberfläche.

Die Federkraft ist proportional zur Verlängerung der Feder, aber deren entgegengesetzt. (4-11)

Die Reibung zwischen Oberflächen hängt ausschliesslich von der gegenseitigen Wechselwirkung und ihren Eigenschaften ab. (4-15)

Der Strömungswiderstand hängt von der relativen Geschwindigkeit des Objektes ab (sowie seiner Form und der Viskosität des Mediums). (4-18)

Die Schwerkraft zwischen zwei Massen wirkt auf Distanz und ist umgekehrt proportional zur quadrierten Distanz. (6-10)

In einem mit a beschleunigten Bezugssystem, muss man eine Trägheitskraft –ma hinzufügen. (6-3)

Die Trägheitskräfte eines rotierenden Bezugssystems bestehen aus der Zentrifugalkraft und dem Corioliseffekt.

- Die Proportionalität zwischen Federkraft und Federverlängerung ist nur in einem gewissen Bereich gültig.
- Die Feder schwingt.
- Die **statische** Reibungskraft zwischen Oberflächen (d.h. ohne relative Geschwindigkeit) kann die Richtung ändern und hat einen Maximalbetrag.
- Die **Gleitreibungskraft** und der **Strömungswiderstand** wirken der Bewegung des Objektes entgegen.
- Die Trägheitsmasse ist der Gravitationsmasse gleichzusetzen.
- Trägheitskräfte sind Scheinkräfte, d.h. sie entspringen keinem physikalischen Phänomen.
- Der Gebrauch der Trägheitskräfte erlaubt es, das 2. Axiom in einem beschleunigten Bezugssystem anzuwenden.

6-25

Grütter Mechanik 2024

Die Dynamik kurzgefasst (Lektionen 4 bis 6)

Die lineare und rotationelle Dynamik sind Zwillinge

1. Die 3 Axiome Newtons:

1. **Trägheitsgesetz:** $v = \text{const}$ ohne Kräfte
2. Resultierende Kraft $\Sigma \vec{F} = m \vec{a}(t)$
3. **Actio=Reactio**

+ Addition/Multiplikation der Vektoren

+ Kinematik (Differentiation und Integration von Vektoren, i.e. Bewegungsgleichungen)

2. Reibungskräfte:

Maximale statische Reibungskraft $F_{\text{max}} \equiv \mu_s F_N$

Strömungswiderstand (laminar):

Gleitreibungskraft: $F_{\text{fr}} \equiv \mu_k F_N$ $\mu_s (v=0) \geq \mu_k (v \neq 0)$

$$F_v = -b(v_c - v_t)$$

3. Hookesches Gesetz: $\vec{F}_{\text{ressort}} = -k\vec{x}$ 4. Gravitationsgesetz: $\vec{F}_{12} = -G \frac{m_1 m_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} (\vec{r}_1 - \vec{r}_2)$

4. Dynamik der Rotation:

2. Gesetz der Rotation:

Zentripetalbedingung

$$\vec{F}_R = -m\omega^2 \vec{r}_\perp = m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$$

$$\underbrace{(\vec{r} \times \vec{F})_{\text{net}}}_{\tau} = \underbrace{mr_\perp^2}_{I} \underbrace{\vec{\alpha}}_{\alpha} \quad \boxed{\sum \vec{\tau}_i = I \vec{\alpha}}$$

5. Trägheitskräfte eines rotierenden Bezugssystems:

Zentrifugalkraft $-m\vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r})$

Corioliseffekt $-2m\vec{\omega} \times \vec{v}$

6-26