

5:Dynamik der Kreisbewegung (Rotation)

I. Welche Kräfte führen zu einer gleichmässigen Kreisbewegung ?

Die Bedingung der Zentripetalkraft

II. Welche Kräfte führen zu einer Schwingung (Oszillation) ?

III. Wie kann man die Winkelgeschwindigkeit ändern ?

Drehmoment

Inertial- oder Trägheitsmoment

IV. Wie beschreibt man die Bewegung in Kugelkoordinaten ?

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** (3 Seiten):

5-3 Dynamics of uniform circular motion

10-5 torque

Vorbereitende Übungen (4) **vor der Übungssession** zu erledigen :

Giancoli 5-34, 49

Giancoli 10-26, 27

Giancoli Kapitel 5-3 bis 5-5; 10-4(5); und 11-2

5-1

Grütter Mechanik 2024

5-1. Welche Kräfte führen zu einer gleichförmigen Kreisbewegung ?

Frage: Kann man bei konstantem Tempo beschleunigen ?

1. Radialbeschleunigung von $\mathbf{a}_R$ (zwingend)
2. Newton: Um eine Richtungsänderung vorzunehmen, braucht es eine resultierende Kraft

$$\sum_k \vec{F}_k = m\vec{a} \quad \Rightarrow \quad \left(\sum_k \vec{F}_k \right)_R = m\vec{a}_R$$

Zentripetalbedingung (Lektion 3):

Die Norm der radialen Komponenten der Beschleunigung (zum Zentrum hin)

beträgt

$$a_R = \frac{v^2}{r} = \omega^2 r$$

Die Zentripetal-**bedingung** (radiale Kraftkomponente)

$$\vec{F}_R \equiv \left(\sum_k \vec{F}_k \right)_R = -m \frac{v^2}{r} \frac{\vec{r}}{r} = -m\omega^2 \vec{r}$$

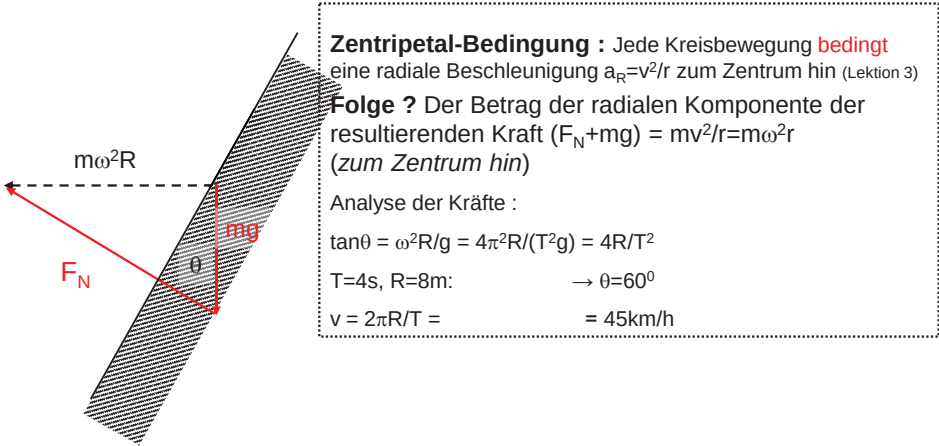
Grütter Mechanik 2024

Welche Geschwindigkeiten sind in einer Kurve möglich ?

Nascar: Einbezug der Reibungskräfte

Beobachtung: Die Autos und Töff in einem «Todeskreis» (oder –kugel) können ihre Position entlang der fast vertikalen Mauer halten.

Frage: Welches ist die Geschwindigkeit der Motorräder im Todeskreis ?



Bei welcher Geschwindigkeit fällt die Wäsche in der Waschtrommel ?

Situation: Ein Kleidungsstück (Masse m) befindet sich in einer Waschmaschine mit Radius R in einer vertikalen gleichmässigen Kreisbewegung mit Winkelgeschwindigkeit ω .

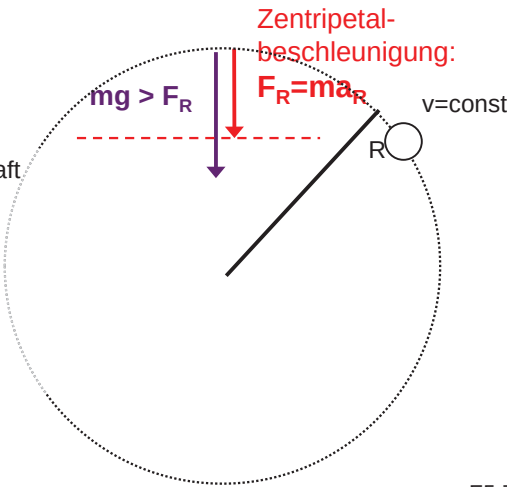
Frage: Bei welcher minimalen Geschwindigkeit fällt das Wäschestück am höchsten Punkt ?

Welche Kräfte tragen zur resultierenden Radialkraft am höchsten Punkt bei ?

Die **Zentripetalbeschleunigung** F_R/m , **unbedingt** notwendig, wird kleiner als das Gewicht mg :

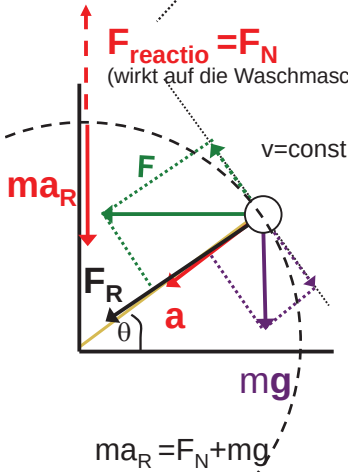
$$F_R=mv^2/R=mg \quad v^2 = Rg \text{ oder}$$

$$\omega^2=g/R \rightarrow T^2=4\pi^2R/g$$



zB. Waschmaschine – ein vertikales Karussell

Wo ist die Reactio von mg ?



Situation: Ein einzelnes Kleidungsstück (Masse m) wird in einer Waschmaschine von $M=100\text{kg}$ und Radius R von 0.2m mit einer konstanten Frequenz von 30Hz (1800rpm) geschleudert.

Frage: Welche externen Kräfte wirken auf das Kleidungsstück ein ?

Ab welcher Masse des Kleidungsstückes beginnt die Waschmaschine sich zu bewegen ?

$$F_{\text{reactio}} = F_R - mg > Mg \Rightarrow m\omega^2 R - mg = Mg$$

$$\Rightarrow m = \frac{Mg}{\omega^2 R - g}$$

$$\begin{aligned} \omega^2 &= 40 \cdot 900 \rightarrow \omega^2 R - g = 7200 \text{ [m/s}^2\text{]} \quad \text{und} \\ Mg &= 100 \cdot 10 = 1000 \text{ [N]} \\ (m &= 1000/7200 \text{ [kg]}) \end{aligned}$$

5-2. Wie beschreibt man die Schwingung einer Feder ?

Masse an Feder befestigt (ohne Reibung)

Situation: Man verschiebt eine Masse m , die an einer Feder befestigt ist, und lässt los.

$$F = -k\Delta L$$

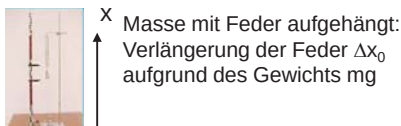
Frage: Welches ist die Beziehung zwischen Beschleunigung der Masse und der Verlängerung ΔL der Feder ?



$$2. \text{ Axiom : } ma = -k\Delta L$$

$$a(t) \equiv \frac{d^2 x(t)}{dt^2} = -\frac{k}{m} \Delta L(t) = \frac{d^2 \Delta L(t)}{dt^2}$$

Man stellt fest, dass die Masse einer Schwingung unterworfen ist.



$$F = -k(x - \Delta x_0) - mg \quad F = -kx$$

$$[mg = k\Delta x_0]$$

$$\Delta L(t) = \Delta L_0 \sin(\omega t + \phi) \quad \omega = \sqrt{\frac{k}{m}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

A propos Bewegungsgleichungen ...

Eine Anleitung für die Mechanik (siehe auch Das p. 136-143)

2. Axiom: eine Bewegungsgleichung

$$\sum \vec{F}_k = m\vec{a}$$

$$\frac{d^2 \vec{r}}{dt^2}(t) = \frac{\sum \vec{F}_k}{m} \quad \sum \vec{\tau}_k = I \frac{d^2 \vec{\theta}}{dt^2}$$

Drei Grundtypen von Bewegungsgleichungen

Spezifische Lösungsansätze (nur eindimensionale Kraft/Beschleunigung) :

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = f(t)$$

Zweimal integrieren
(zB. 2-4, 2-10 und 2-11)

$$v(t') = \int_0^{t'} f(t'') dt'' + v(0)$$

$$x(t) = \int_0^t v(t') dt' + x(0)$$

$$\frac{d^2 x}{dt^2}(t) = \alpha - \beta \frac{dx}{dt}(t)$$

Lösungsansatz
(zB. 4-18 und Übung 4)

$$\frac{dv}{dt}(t) = \alpha - \beta v(t)$$

$$v(t) = A + Be^{-Ct}$$

$$v(0) = A + B$$

$$v(\infty) = A = \alpha/\beta$$

$$C = \beta$$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2}(t) = -\gamma \theta(t)$$

Als Lösung diejenige der
gleichförmigen
Kreisbewegung versuchen
(zB. 3-5, 5-9 und 5-11)

$$\theta(t) = A \cos(\sqrt{\gamma}t + \varphi_0) + B \sin(\sqrt{\gamma}t + \varphi_0)$$



5-10

Welche Kräfte wirken auf ein Pendel ein ?

Ungleichförmige Kreisbewegung

z. Erinnerung: Kinematik der Rotation:

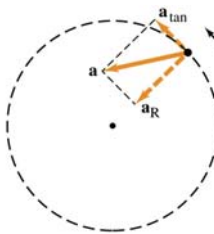
Beschleunigung einer Kreisbewegung kann in eine radiale a_R (oder a_ρ) und tangentielle Komponente zerlegt werden a_{tan} (oder a_ϕ)

Ändert die Norm der Geschwindigkeit, i.e. Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{a}_{tan} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\vec{a}_R = -\omega^2 \vec{r} = -\frac{v(t)^2}{r} \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

Ändert nur die Richtung der Geschwindigkeit



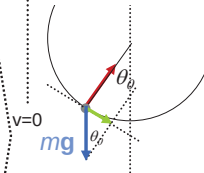
2. Axiom ($F=ma$) in Komponenten:

$$\left(\sum_k \vec{F}_k(t) \right)_{tan} = m \vec{a}_{tan}(t)$$

$$\left(\sum_k \vec{F}_k(t) \right)_R = m \vec{a}_R(t)$$

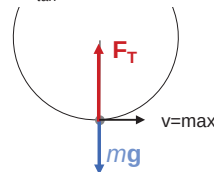
$$F_R = F_T - mg \cos \theta_0 = 0$$

$$F_{tan} = -mg \sin \theta_0$$



$$F_R = m \omega^2 R = F_T - mg$$

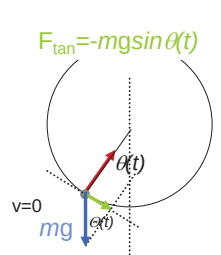
$$F_{tan} = 0$$



5-11

Welches ist die Periode der Pendelbewegung ?

Oszillationen: Kreisfrequenz ω



$$\vec{a}_{\text{tan}} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

Ändert das Tempo, i.e. Winkelgeschwindigkeit

Bewegungsgleichung:

$$F_{\text{tan}} = m a_{\text{tan}} = -m g \sin \theta$$

$$a_{\text{tan}} = \frac{dv}{dt} = -g \sin \theta = R \frac{d\omega}{dt} = R \frac{d^2 \theta}{dt^2}$$

$v = \omega r$
 $\omega = d\theta/dt$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{R} \sin \theta$$

1.) Vereinfachung
Es sei θ klein
 $\theta \ll 1: \sin \theta(t) \equiv \theta(t)$

$$\frac{d^2 \theta}{dt^2} = -\frac{g}{R} \theta(t)$$

ω_0 : «Kreisfrequenz»

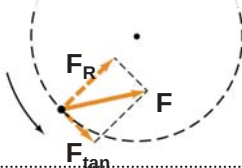
$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t + \phi) \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}} \Rightarrow T = 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}}$$

5-12

5-3. Welche Kraft kann die Winkelgeschwindigkeit ω ändern ?

Situation: Ein Objekt, das einer Kraft F unterworfen ist, bewegt sich auf einem *Kreis* mit variablem Geschwindigkeitsbetrag.

Frage: Wie beeinflusst die Kraft F die Winkelbeschleunigung α ?



Die Bedingungen der Kinematik der Rotationsbewegung (Lektion 3):

Beschleunigung in zwei Komponenten, a_R und a_{tan} zerlegt:

$$\vec{a}_R = -\omega^2 \vec{r} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{zwingend: Muss für alle } v(t) \\ \text{erfüllt sein, ändert nicht die} \\ \text{Norm von } \omega \end{array} \right.$$

$$\vec{r} \times \vec{a}_{\text{tan}} = r_{\perp}^2 \vec{\alpha} \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{Ändert die Norm der Winkelgeschwindigkeit} \rightarrow \\ \text{Winkelbeschleunigung} \end{array} \right.$$

2. Axiom :

$$\begin{aligned} \vec{F} &= m \vec{a} = m(\vec{a}_R + \vec{a}_{\text{tan}}) \\ &= \sum \vec{F}_i = \vec{F}_R + \vec{F}_{\text{tan}} \end{aligned}$$

$$\vec{F}_R = m \vec{a}_R$$

$$\vec{F}_R = m \vec{\omega}(t) \times (\vec{\omega}(t) \times \vec{r}) = -m r \omega(t)^2 \cdot \frac{\vec{r}}{r}$$

$$\vec{F}_{\text{tan}} = m \vec{a}_{\text{tan}}$$

$$\vec{r} \times \frac{\vec{F}_{\text{tan}}}{m} = r_{\perp}^2 \vec{\alpha}$$

5-13

Wie bestimmt man die Winkelbeschleunigung eines Objektes?

Drehmoment, Trägheitsmoment

⇒ Das 2. Gesetz der Rotation (Newton):

$$\underbrace{\vec{r} \times \vec{F}}_{\tau} = m \underbrace{r_{\perp}^2}_{I} \vec{\alpha}$$

τ : Drehmoment (torque)

I : Trägheitsmoment des Objektes

$r_{\perp}$: Distanz relativ zur Drehachse

$$\sum \vec{\tau}_i = I \vec{\alpha}$$

Widerstand gegen Änderungen der Winkelgeschwindigkeit (Inertialmoment)

Fähigkeit einer Kraft, ein Objekt zu drehen

Wie kann man die **Trägheit (Inertie)** interpretieren ?

Widerstand gegen eine Änderung der Winkelgeschwindigkeit

$$\vec{r} \times \vec{F} = m \underbrace{r_{\perp}^2}_{I} \vec{\alpha} \quad \sum \vec{\tau}_i = I \vec{\alpha}$$

Trägheitsmoment I

m : inertielle Masse (Konstante des Objektes)

I : Trägheitsmoment (Hängt von der geometrischen Massenverteilung und der Distanz zur Drehachse ab)

Wo benutzt man die Möglichkeit, dass man das Trägheitsmoment verändern kann ?