

3: Kinematik der Rotation

- I. Wie beschreibt man eine kreisförmige (und oszillierende) Bewegung ?
- II. Welche Bedingungen umschreiben ein Objekt auf einem Kreis ?
Winkelbeschleunigung
- III. Wie kann man die kreisförmige Bewegung allgemein beschreiben ?
Präzession
- III. Wie beschreibt man die Bewegung in zylindrischen Koordinaten ?
- IV. Wie beschreibt man die Bewegung in einem linear beschleunigten Bezugssystem ?

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** (3.5 Seiten):

5-2 Uniform circular motion - kinematics

10-1 Angular quantities

Vorbereitende Übungen (6) **vor der Übungssession** zu erledigen :

Giancoli 5-36, 38

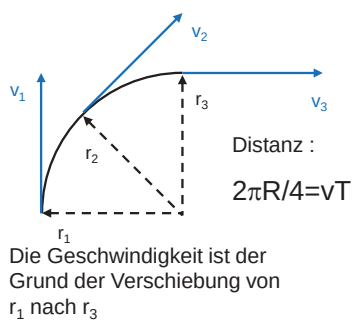
Giancoli 10-4, 5ab, 7abc, 12ab

Giancoli Kapitel 5-2 und 10-1 bis 10-3

3-1

3-1. Kann man beschleunigen, ohne $|v|$ zu ändern ?

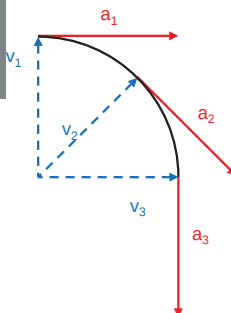
Die Zentripetalbeschleunigung



$$a_R = \frac{v^2}{R}$$

(zum Zentrum hin)

$$\frac{v}{R} = \frac{a}{v}$$
$$\frac{2\pi v / 4}{2\pi R / 4} = \frac{aT}{vT}$$



Die Beschleunigung verursacht die Änderung der Geschwindigkeit v :

«Distanz» :

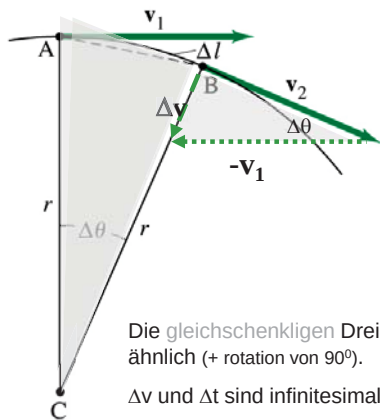
$$2\pi v/4 = aT$$

3-2

Welches ist der Ursprung der **Zentripetalbeschleunigung** a_R ? eine zwingende geometrische Bedingung

Wodurch wird die Kreisbewegung charakterisiert ?

Die Beschleunigung die eine Kreisbewegung bewirkt, zeigt **immer** zu deren Zentrum hin :



Eine Beschleunigung $\perp$ zur Geschwindigkeit $\mathbf{v}$ kann nur deren Richtung ändern.

Siehe: $\frac{d(\vec{v}^2)}{dt} = 2\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} = 2\vec{v} \cdot \vec{a} = 0$

$$v_1^2 \cong v_2^2$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_1 + \Delta \mathbf{v}$$

oder auch:

$$\Delta \mathbf{v} \parallel \mathbf{a}$$

$$\frac{\Delta v}{v} \cong \frac{\Delta l}{r} \xrightarrow{\Delta l \cong v \Delta t} \frac{\Delta v}{v} \cong \frac{v \Delta t}{r}$$

$$\frac{dv}{dt} \cong \frac{v^2}{r}$$

Norm der **Radial-** (oder **Zentripetal-**)
beschleunigung :

$$a_R(t) = \frac{v(t)^2}{r}$$

3-3

Wie beschreibt man in Komponenten die Kreisbewegung? Bewegungsgleichung der Schwingung (Oszillation)

Die Kreisbewegung in Komponenten:

Kreisförmig: $\mathbf{x}(t)^2 + \mathbf{y}(t)^2 = r^2 = \text{const} = R^2$

Welche Funktion für $x(t)$, $y(t)$?

$$\vec{r} = R(\cos \varphi, \sin \varphi)$$

$$\mathbf{r} = x(t), y(t)$$

$$\vec{r}(t) = (R \cos(\omega t), R \sin(\omega t))$$

$$= R(\cos(\omega t), \sin(\omega t))$$

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} = R\omega(-\sin(\omega t), \cos(\omega t))$$

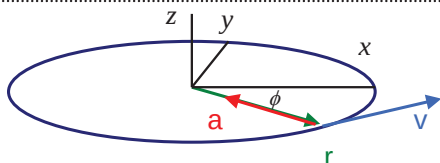
$$\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = R\omega^2(-\cos(\omega t), -\sin(\omega t))$$

$$\vec{a}(t) = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = -\vec{r}(t)\omega^2$$

Wie lautet die Lösung $r(t)$ dieser
Bewegungsgleichung ?

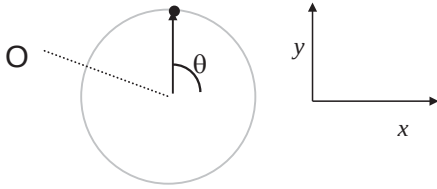
$$\frac{d^2 x}{dt^2} = -\omega^2 x \Rightarrow x(t) = R \cos(\omega t + \varphi_0)$$

NB. φ_0 wird von den Anfangsbedingungen
definiert, i.e. $x(0)$, $y(0)$



3-4

3-2. Wie kann man die Kreisbewegung einfacher darstellen ?



Das Problem: Position und Geschwindigkeit einer Kreisbewegung haben zwei Komponenten die zeitlich variieren.

Frage: Wie vereinfachen (i.e. die Bedingung eines gut gewählten Bezugssystems erfüllen) ?

Beobachtung: Die Norm der Position (Radius) ist konstant.

Polar/Zylinderkoordinaten mit Zentrum O

Mittlere Winkelgeschwindigkeit [Einheit: rad/s] :

T: Periode (eine Umdrehung)

$$\omega \equiv 2\pi/T$$

Definition **Frequenz** $f=1/T$
[Einheit 1/s=1Hz (Hertz)]

$$\omega = 2\pi f$$

Die in $T=1/f$ [s] zurückgelegte Distanz beträgt $2\pi R$

$$\rightarrow v = 2\pi R/T = 2\pi f R$$

$$\rightarrow \omega = v/R$$

3-5

Wie beschreibt man die Kreisbewegung in Winkelkoordinaten ?

Winkelgeschwindigkeit und -beschleunigung

Momentane Winkelgeschwindigkeit :

in Δt : $\omega = \Delta\theta/\Delta T$

$$\omega(t) \equiv \frac{\Delta\theta(t)}{\Delta t} \Big|_{\lim \Delta t \rightarrow 0} = \frac{d\theta(t)}{dt}$$

Momentane

Winkelbeschleunigung [rad/s²] :

in Δt : $\alpha = \Delta\omega/\Delta T$

$$\alpha(t) \equiv \frac{\Delta\omega(t)}{\Delta t} \Big|_{\lim \Delta t \rightarrow 0} = \frac{d\omega(t)}{dt} = \frac{d^2\theta}{dt^2}$$

Welche Gleichungen beschreiben ω , θ und α einer gleichförmig beschleunigten Kreisbewegung ?

$$\omega = \omega_0 + \alpha t$$

$$\theta = \theta_0 + \omega_0 t + \frac{1}{2} \alpha t^2$$

3-6

Kann man sowohl die Kinematik der Translations- sowie die der Kreisbewegung bei der Lösung eines Problems benutzen ?

Situation: Der Gewehrlauf verfügt über spiralförmige Rillen die die Kugel zum rotieren bringen, zwecks erhöhter Stabilität (Siehe Lektion 12).

Eine mit der SIG 550 abgefeuerte Kugel dreht sich **2.5**-fach im Lauf. [Annahme: Länge von $L=53$ cm und Endgeschwindigkeit von $v_f=900$ m/s sowie konstante Beschleunigungen.]

Fragen: Welches ist

1. Die lineare Beschleunigung
2. Die Winkelbeschleunigung
3. Die finale Winkelgeschwindigkeit (rotations/s)

Antwort 1:

Lineare Kinematik: $v_f = aT \rightarrow T = v_f/a$

$L = aT^2/2 \rightarrow L = av_f^2/2a^2 \rightarrow a = v_f^2/2L$

Rechnung: $a = 0.90^2 \cdot 10^6 / 2 \cdot 0.53 =$

$T = 2L/v_f$
 m/s^2

Antwort 2:

Kinematik der Rotation:

$\theta = \alpha T^2/2 \rightarrow \theta = \alpha 4L^2/2v_f^2$

$\alpha = \theta v_f^2 / 2L^2$ ($\theta = 2.5 \cdot 2\pi$)

Rechnung: $\alpha = 2.5 \cdot 6.3 \cdot 0.90^2 \cdot 10^6 / 2 \cdot 0.53^2 =$ rad/s²

Antwort 3:

Kinematik der Rotation: $\omega_f = \alpha T = \theta v_f / L$

Rechnung: $\omega_f = 2.5 \cdot 2\pi \cdot 0.90 \cdot 10^3 / 0.53 = 27 \cdot 10^3$ rad s⁻¹

$\omega_f / 2\pi =$ Hz

E3-7

Grütter Mechanik 2024

3-3. Wie definiert man die Winkelgeschwindigkeit in 3D ?

Die vektorielle Kinematik der Kreisbewegung

In welche Richtung zeigt ω ?

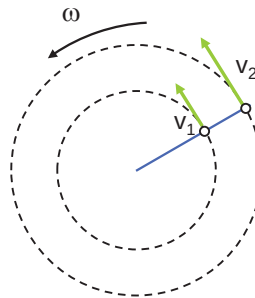
Die Kreisbewegung verläuft in der xy Ebene um eine Achse $\parallel z$

→ man definiert $\omega \parallel z$: ω_z

In welche Richtung (Vorzeichen) zeigt ω ?

Wenn die Finger der rechten Hand der Winkelbewegung folgen, dann ist ω_z positiv

(« Regel der rechten Hand », « Korkenzieher-Regel »)



Kreisbewegung: r , v et ω sind immer orthogonal.

Für eine Rotation

- In xy, i.e. von x nach y: ω_z
 - In yz, i.e. von y nach z: ω_x
 - In xz, i.e. von z nach x: ω_y
- ω ist ein Vektor

3-8

Grütter Mechanik 2024

Wie kann man allgemein eine Kreisbewegung beschreiben ?

Präzession: eine grundlegende und nützliche Gleichung

Für eine Kreisbewegung mit Radius $r_{\perp}$, ist die Norm der Geschwindigkeit

$$v = \omega r = |\Delta r_{\perp} / \Delta t|$$

v, ω und $r_{\perp}$ sind orthogonal:

- » $v_x = \omega_y z - \omega_z y$

» $v_y = \omega_z x - \omega_x z$

» $v_z = \omega_x y - \omega_y x$

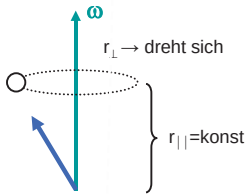
Vektorprodukt

$$\vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

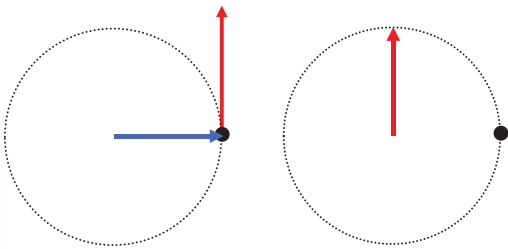
Beschreibt eine Rotation von r um den Vektor ω mit der Frequenz $f = \omega / 2\pi$

⇒ Gültig für irgendeine Vektorgroße f anstelle von r



Wie beschreibt man gleichförmige Kreisbewegung vektoriell ?

Präzession des Geschwindigkeitsvektors



Position r :

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{v} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Geschwindigkeit v :

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{v}$$

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = \vec{a}_R$$

$$\vec{a}_R = \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} = -\vec{r} \omega^2$$

Wenn $\omega \perp r$:

$$\vec{a}_R = \vec{\omega} \times (\vec{\omega} \times \vec{r}) = -\omega^2 \vec{r}$$

Radial- (oder zentripetal-) Beschleunigung:

Richtung Zentrum

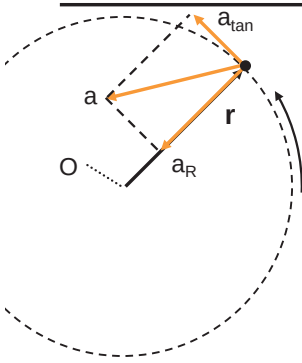
NB. Auch wenn $\omega(t)$ zeitabhängig ist:

Für eine Kreisbewegung muss

$$a_R = \omega(t)^2 r$$

zwingend zu jedem Zeitpunkt t erfüllt sein !

Welches ist der vektorielle Zusammenhang zwischen Winkelbeschleunigung α und dem Beschleunigungsvektor?



Wie kann man die Norm von $v(t)$ ändern?

$$\vec{a}_{\text{tan}} = \frac{dv(t)}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

Norm: $v = \omega r$ ($r = \text{const}$):

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega(t)}{dt} \cdot r = \alpha(t)r$$

$|\vec{a}_{\text{tan}}| : \parallel \vec{v}, \alpha \perp \text{ zu } \vec{a}_{\text{tan}} \dots$

Wie verknüpft man α und $\vec{a}_{\text{tan}}$?

$$\vec{a}_{\text{tan}} = r \frac{d\omega(t)}{dt} \cdot \frac{\vec{v}}{v}$$

$$\frac{\vec{r}}{r} \times \vec{a}_{\text{tan}} = r \frac{d\omega(t)}{dt} \left(\frac{\vec{r}}{r} \times \frac{\vec{v}}{v} \right)$$

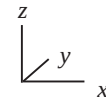
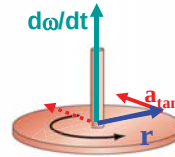
$$\hat{i} \times \hat{j} = \hat{k}$$

$$\vec{r} \times \vec{a}_{\text{tan}} = r_{\perp}^2 \vec{\alpha}$$

$$\frac{d\vec{\omega}(t)}{dt}$$

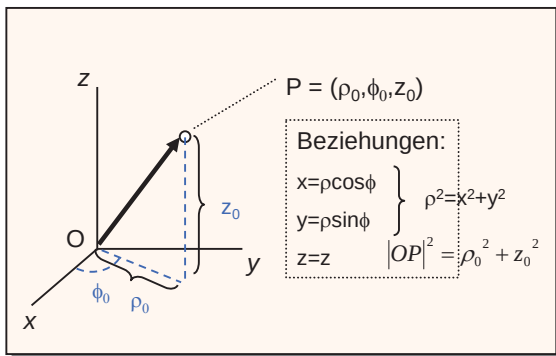
Gültig für irgendein $\vec{a}$ (auch $\vec{a}_R$):

$$\vec{r} \times \vec{a} = r_{\perp}^2 \vec{\alpha}$$



3-11

3-4. Wie beschreibt man die Bewegung in Zylinderkoordinaten?



$$\begin{aligned} \hat{\phi} &= -\sin \phi \hat{x} + \cos \phi \hat{y} \\ \hat{\rho} &= \cos \phi \hat{x} + \sin \phi \hat{y} \end{aligned}$$

Zylindrisch = Polar + z-Achse

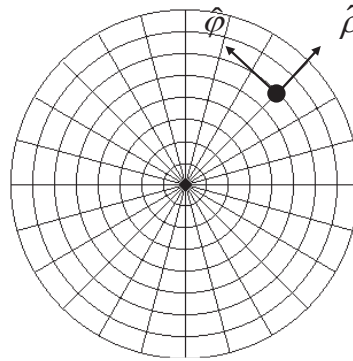
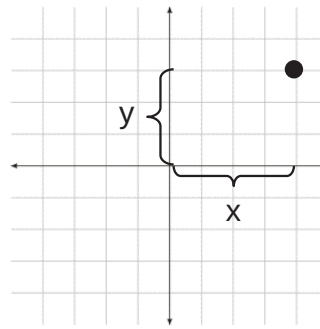
$$\begin{array}{c} \hat{x} \\ \hat{y} \\ \hat{z} \end{array} \longleftrightarrow \text{Orthonormierte Basen} \longleftrightarrow \begin{array}{c} \hat{\rho} \\ \hat{\phi} \\ \hat{z} \end{array}$$

3-12

Wie ergibt sich die Position in Polarkoordinaten ?

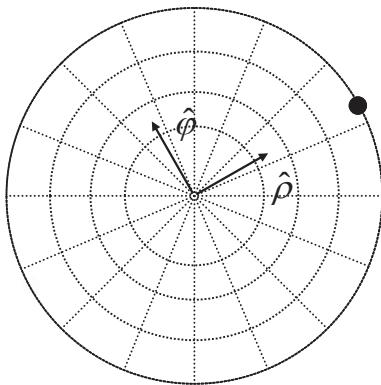
Man beschreibt die Position eines beliebigen Punktes in Funktion der unitären kartesischen Basisvektoren, entlang x und y, als $\vec{r} = x\hat{x} + y\hat{y} = (x, y)$

Die unitären Basisvektoren in Polarkoordinaten sind entlang ρ und ϕ (siehe Schema).



3-13

Wie schreibt man die Geschwindigkeit in Polarkoordinaten ?



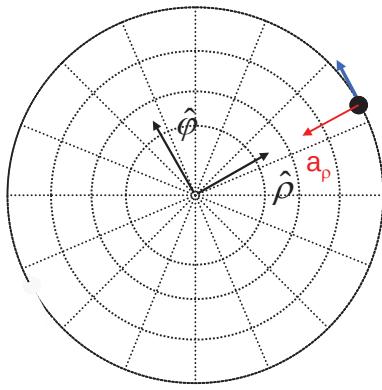
Bewegung entlang ρ : $\frac{d\rho}{dt} \hat{\rho}$
Radialgeschwindigkeit v_R entlang ρ

Von der Kreisbewegung : $\rho \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi}$
 $v_{\text{tan}} (= \rho\omega)$ ist entlang ϕ

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \overbrace{\frac{d\rho}{dt} \hat{\rho}}^{v_\rho} + \overbrace{\rho \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi}}^{v_\phi} + \frac{dz}{dt} \hat{z}$$

3-14

Wie beschreibt man die Beschleunigung in Polarkoordinaten ?



Bewegung entlang ρ : $\frac{d^2 \rho}{dt^2} \hat{\rho}$

Von der Kreisbewegung : $-\rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \hat{\rho}$
 $a_{\rho} (= v_{\phi}^2 / \rho)$ entlang ρ
 (Zentripetalbeschleunigung)

Beschleunigte Kreisbewegung : $\rho \frac{d^2 \phi}{dt^2} \hat{\phi}$
 $a_{\text{tan}} (= R\alpha)$ entlang ϕ

Wenn ein Objekt sich entlang ρ mit Geschwindigkeit v_{ρ} bewegt:
 $a_{\text{tan}} (= 2v_{\rho}\omega)$ entlang ϕ (siehe unten) $2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} \hat{\phi}$

$$\vec{a} = \frac{d^2 \vec{r}}{dt^2} = \left[\frac{d^2 \rho}{dt^2} - \rho \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right] \hat{\rho} + \left[2 \frac{d\rho}{dt} \frac{d\phi}{dt} + \rho \frac{d^2 \phi}{dt^2} \right] \hat{\phi} + \frac{d^2 z}{dt^2} \hat{z}$$

Grütter Mechanik 2024

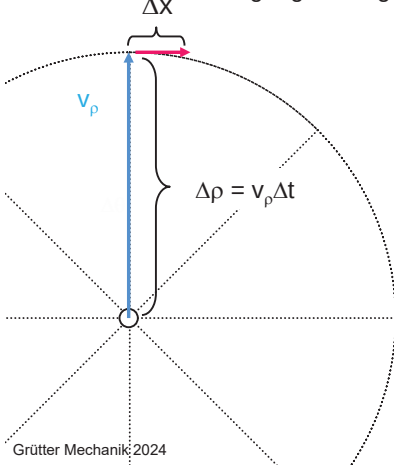
3-15

Welcher Beschleunigung ist ein Objekt ausgesetzt, das sich entlang ρ bewegt ?

Situation: Ein Objekt in Rotation mit $d\phi/dt = \omega$ bewegt sich mit Geschwindigkeit v_{ρ} entlang ρ .

Dieses Objekt ist einer Beschleunigung senkrecht zu seiner Geschwindigkeit ausgesetzt da seine Tangentialgeschwindigkeit sich ändert.

(Im Folgenden betrachten wir ein kleines Zeitintervall Δt der Bewegung nahe am Mittelpunkt. Δx bezeichnet die Bewegung entlang ϕ .)



$$\begin{aligned} \Delta x &= \Delta\rho \sin\Delta\theta = v_{\rho}\Delta t \sin\Delta\theta \\ &= v_{\rho}\Delta t \Delta\theta \\ &= v_{\rho}\Delta t^2 \omega \end{aligned}$$

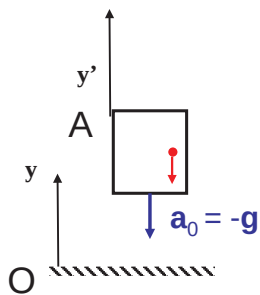
Lineare Kinematik: $\left. \begin{aligned} \Delta x &= a_x \Delta t^2 / 2 \\ a_{\phi} &= 2v_{\rho}\omega \end{aligned} \right\}$

$$a_{\phi} = 2v_{\rho} \frac{d\phi}{dt}$$

Grütter Mechanik 2024

3-17

3-5. Wie beschreibt man die Bewegung im beschleunigten Bezugssystem ?



Situation: Man lässt einen Ball in einem Aufzug fallen, der seinerseits sich im freien Fall befindet.

Frage: Welche Norm hat die Beschleunigung des Balles relativ zum Aufzug ?

- A. $g + a_0 (>g)$
- B. Null
- C. $g - a_0 (<g)$

Um die Bewegung adäquat im beschleunigten Bezugssystem darzustellen,

Muss man eine **eine fiktive Beschleunigung $-a_0$** hinzufügen
[entgegengesetzt zur reellen Beschleunigung des Aufzugs.]

3-19

Welche Schritte führen zu einer guten Modellierung ?

Modell etablieren

Zuerst eine gute Zeichnung (die Fragestellung verstehen)

Alle Bedingungen des Problems erstellen

Kann man Effekte vernachlässigen ?

Inventar der (un-)bekannten Größen

Lösungsansatz

Wahl des Koordinaten/Bezugssystems

Bis zum Schluss algebraisch lösen!

Kontrolle der Einheiten nach jeder Etappe

Verifikation

Ist das Resultat vernünftig?

Verhalten der Lösung (auch Zwischenlösung) in Extremfällen

3-22

Wie beschreibt man die Bewegung eines Objektes ?

(Zusammenfassung der Lektionen 1-3)

Die zeitliche Bewegung eines Objektes ergibt sich aus

1. Position
2. Geschwindigkeit (momentan)
3. Beschleunigung (momentan)

Verknüpfung durch Integration/Differentiation

Eine Kreisbewegung kann homolog beschrieben werden, durch

1. Winkel
2. Winkelgeschwindigkeit (momentan)
3. Winkelbeschleunigung (momentan)

Die durch Integration/Ableitung verknüpft sind.

Das Bezugssystem dient einzig und allein der mathematischen Beschreibung.

Eine gute Wahl vereinfacht die Berechnung.

- Die Geschwindigkeit ist immer **tangentiell zur Bahnkurve (Trajektorie)**
- Die Komponente der **Beschleunigung senkrecht zur Geschwindigkeit** kann das Tempo nicht verändern
- Eine Kreisbewegung muss immer die **Zentripetalbeschleunigung respektieren (Bedingung)**.

- Ein Vektor der sich um eine Achse dreht, erfüllt die **Präzessionsgleichung**.
- Nur die Beschleunigung tangentiell zur Trajektorie kann die Winkelgeschwindigkeit ändern.

- Das **Inertialsystem (RI)** ist ein mit konstanter Geschwindigkeit sich fortbewegendes Bezugssystem
- Im beschleunigten Bezugssystem muss man eine fiktive Beschleunigung einbeziehen, die der im RI entgegengesetzt ist.

3-23

Grütter Mechanik 2024

Kurzfassung Kinematik (Lektionen 1-3)

Die lineare Kinematik und die der Rotation sind Zwillinge

Grundgleichungen (linear)

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \quad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{r}(t)}{dt^2} \quad \vec{v}(t) = \int_{t_0}^t \vec{a}(t') dt' \quad \vec{r}(t) = \int_{t_0}^t \vec{v}(t') dt'$$

Kinematik der Rotation

$$\vec{\omega}(t) = \frac{d\vec{\theta}(t)}{dt} \quad \vec{\alpha}(t) = \frac{d\vec{\omega}(t)}{dt} = \frac{d^2\vec{\theta}(t)}{dt^2} \quad \vec{\omega}(t) = \int_{t_0}^t \vec{\alpha}(t') dt' \quad \vec{\theta}(t) = \int_{t_0}^t \vec{\omega}(t') dt'$$

Präzession

$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{r}$$

Zentripetalbedingung

$$\vec{a}_R = -\vec{r}_\perp \omega^2$$

$$\omega = v/R$$

$$a_R(t) = \frac{v(t)^2}{r_\perp}$$

$$\vec{r} \times \vec{a} = r_\perp^2 \vec{\alpha}$$

+ Differentiations- und Integrationsregeln

+ Wahl eines guten Bezugssystems

Inertielles Bezugssystem (RI) $\vec{v}'(t) = \text{const}$

Beschleunigtes Bezugssystem:

fiktive Beschleunigung hinzufügen (entgegen derjenigen vom RI aus gesehen)

3-24

Grütter Mechanik 2024