2: Kinematik im Raum

I. Wie kann man im allgemeinen die geradlinige Bewegung herleiten ?
- Integration der Bewegungsgleichung
- g – Erdbeschleunigung

II. Wovon hängt die allgemeine Beschreibung der Bewegung ab ?
- Wurfparabel
- Inertialsysteme

Vorbereitung auf die Vorlesung und Übungen

Kapitel im Giancoli **vor dem Kurs zu lesen** *(3 Seiten)*:
- 2-7 Freely falling objects
- 3-6 Vector Kinematics

Vorbereitende Übungen *(3)* **vor der Übungssession** zu erledigen **:**
- Giancoli 3-28, 29, 57

Giancoli Kapitel 2-6 bis 3-9

2-1. Wie bestimmt man im allgemeinen die Position ?

$$\underbrace{\boxed{a(t) \equiv dv/dt}}$$

$$\underbrace{\left.\int_0^{t'} dv = v(t') - v(0)\right\}} \quad dv = a(t'')dt'' \quad \underbrace{\left\{\int_0^{t'} a(t'')dt''\right.}$$

$$v \equiv \frac{dx}{dt} \quad \cdots\cdots\rightarrow \quad \underbrace{v(t') = \int_0^{t'} a(t'')dt'' + v(0)}$$

$$\underbrace{\left.\int_0^{t} dx = x(t) - x(0)\right\} \quad dx = v(t')dt'}$$

$$\left\{\begin{array}{l} \int_0^{t} v(0)dt' = v(0)t \\ \int_0^{t} v(t')dt' = \int_0^{t}\left(\int_0^{t'} a(t'')dt''\right)dt' \end{array}\right.$$

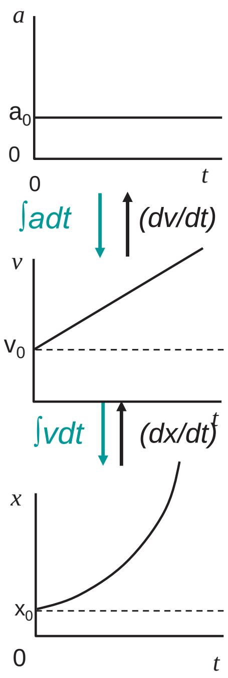
Positionsgleichung :

$$x(t) = \int_0^{t}\left(\int_0^{t'} a(t'')dt''\right)dt' + v(0)t + x(0)$$

Ex.

$a(t'') = a_0$

$x(t) = a_0 \cdot t^2/2 + v_0 t + x_0$



Wie bestimmt man die Beschleunigung und Distanz?

zB. Tesla Roadster: in 3.7s auf 100 km/h!

Beispiel Beschleunigung:
Tesla Roadster

von 0 auf 100 km/h in 3.7s

Mittlere Beschleunigung

v = a T:

a = 100 [km/h]/(3.6 ·3.7 [s])

a = m/s²

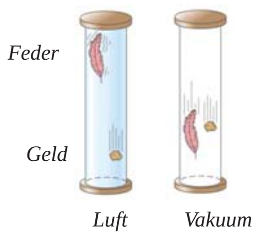
Beispiel Distanz:

1. $a = 7.5\ m/s^2$
2. Geschwindigkeit: $v(t) = \int a(t)dt = at + v_0$

   »$v_0 = v(0)=0$
3. Distanz: $x(t) = \int v(t)dt = \int at\ dt = at^2/2 + x_0$

   »$x_0 = x(0) = 0$

2-2. g-Erdbeschleunigung



Körper, die nur der Erdbeschleunigung ausgesetzt sind, beschleunigen identisch (siehe Lektion 4-6)

$$y=\tfrac{1}{2} gt^2 \;\rightarrow\; g=2y/t^2$$

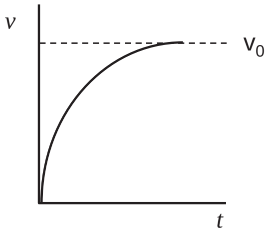
	t [s]	**g** [m/s²]
y_1= 0.1 m		
y_2 = 0.4 m		
y_3 = 1.6 m		

Wie bestimmt man die Position von einer gegebenen Geschwindigkeit ?

Antwort zum Quiz

Situation: Sie beschleunigen derart, dass die Geschwindigkeit wie folgt gegeben ist: $v(t)=v_0 \sin(\pi t/2\tau)$ (τ=3s, v_0=36 km/h).

Legen Sie eine grössere Distanz zurück im Vergleich zu einem Auto, das unter konstanter Beschleunigung die gleiche Geschwindigkeit in derselben Zeit erreicht ?



$$\boxed{v(t) \equiv dx/dt = v_0 \sin(\pi t/2\tau)}$$

$$\underbrace{\left.\int_0^t dx = x(t) - x_0\right\}}\quad \underbrace{dx = v_0 \sin(\pi t/2\tau)\, dt}\quad \left\{\begin{array}{l}\int_0^t v_0 \sin(\pi t'/2\tau)\,dt' \\ = -v_0 \dfrac{2T}{\pi} \cos(\pi t'/2\tau)\Big|_0^t\end{array}\right.$$

Position:

$$x(t) = -v_0 \cdot 2\tau/\pi \cdot \cos(\pi t/2\tau) + v_0 2\tau/\pi + x_0$$

Lösung: τ= 3s, v_0=10m/s

$x(\tau)$ = m.

$$\frac{d^2x}{dt^2} = v_0 \frac{\pi}{2\tau} \cos(\pi t/2\tau)$$

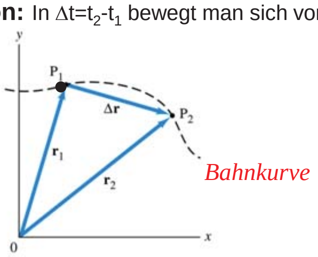
«Bewegungsgleichung» $\dfrac{d^2x}{dt^2} = f(t)$

2-3. Wie kann man die Geschwindigkeit 3D verallgemeinern ?

Position → Trajektorie (Bahnkurve)

Mittelgeschwindigkeit

Situation: In $\Delta t = t_2 - t_1$ bewegt man sich von P_1 nach P_2.



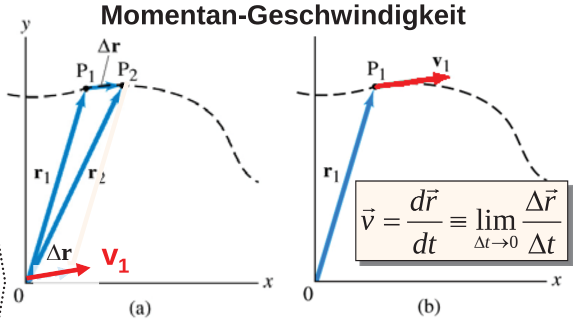
Vektor-definitionen:

r - Positionsvektor

$\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1$ - Vektor der Fortbewegung

$$\Rightarrow \vec{v} = \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} \quad \text{mittlere Geschwindigkeit}$$

Momentan-Geschwindigkeit

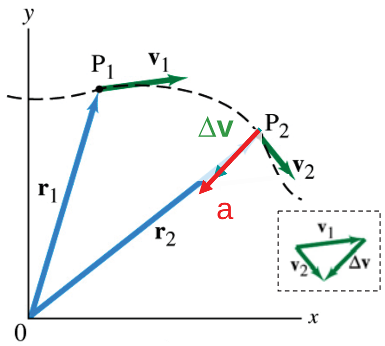


$$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t}$$

Die momentane Geschwindigkeit
ist stets tangential zur Trajektorie

Ist die Beschleunigung kolinear zur Geschwindigkeit ?

a kann irgendeine Richtung einnehmen



$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} \quad \Rightarrow \quad \vec{a} \equiv \frac{d^2\vec{r}}{dt^2}$$

Bewegungsgleichungen (im Allgemeinen):

$$\vec{v}(t) = \frac{d\vec{r}(t)}{dt} \qquad \vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}(t)}{dt}$$

$$\vec{v}(t) = \int_0^t \vec{a}(t')dt' + \vec{v}(0)$$

$$\vec{r}(t) = \int_0^t \vec{v}(t')dt' + \vec{r}(0)$$

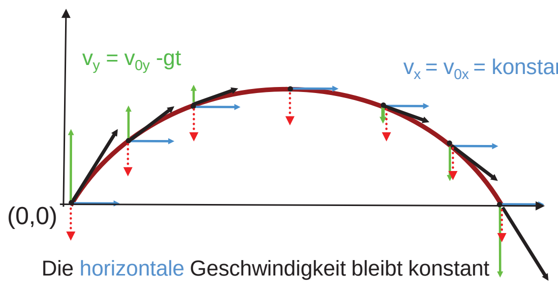
Gleichförmig beschleunigte Bewegung in 3D

Lösungen für jede Komponente (**a**=const), e.g.:

$$\left.\begin{aligned} x &= x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2 \\ y &= y_0 + v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \\ z &= z_0 + v_{0z}t + \frac{1}{2}a_z t^2 \end{aligned}\right\} \vec{x}(t) = \vec{r}_0 + \vec{v}_0 t + \frac{1}{2}\vec{a}t^2$$

Wie kann man die Beschreibung von gleichförmig beschleunigten Bewegungen vereinfachen ?

Parabelwurf



Die horizontale Geschwindigkeit bleibt konstant da die Beschleunigung nur in y wirkt und daher nur die vertikale Komponente der Geschwindigkeit ändern kann.

$$\left.\begin{aligned} x &= v_{0x}t \;\rightarrow\; t = x / v_{0x} \\ y &= v_{0y}t + \frac{1}{2}a_y t^2 \end{aligned}\right\} \boxed{y(x) = \frac{v_{0y}}{v_{0x}}x + \frac{1}{2}\frac{a_y}{v_{0x}^{\;2}}x^2}$$

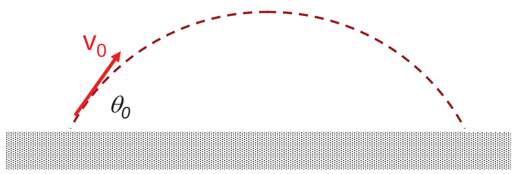
Gleichförmig beschleunigte Bewegung:

- Die Trajektorie entspricht stets der eines Parabelwurfes
- Unabhängig von der Wahl der Inertialsystems (RI)
- Eine gute Wahl des RI kann die Analyse enorm vereinfachen …

Wie optimiert man die Wurfdistanz ?

ZB. Fütterung des Tigers

Situation: Zur Fütterung wirft man ein Stück Fleisch in Richtung des Tigers, möchte aber dies aus einer maximalen Entfernung tun. Man kann das Fleisch mit einer Geschwindigkeit v_0 werfen.

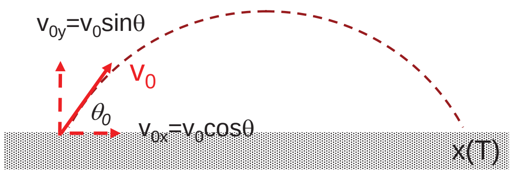


Frage: Welcher Wurfwinkel θ_0 ergibt die grösste Distanz ?

1. 30^0
2. 60^0
3. 45^0

Beweis: Optimaler Wurfwinkel

Das Fleisch landet beim Tiger nach T s (noch unbekannt).
Mit einer Anfangsgeschwindigkeit von v_0, bewegt sich das Fleisch entlang x



$$x(T) = v_{0x}T$$

T: Flugzeit des Fleisches

$$y(T) = v_{0y}T - \frac{gT^2}{2} = 0 \qquad T = \frac{2v_{0y}}{g}$$

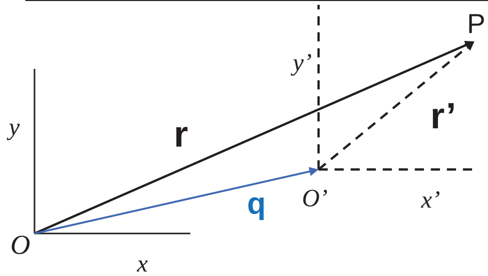
$$x(T) = \frac{2v_{0x}v_{0y}}{g}$$

$$x(\theta_0) = v_0{}^2\,\frac{2\sin\theta_0\cos\theta_0}{g}$$

$$x = \frac{v_0{}^2\sin 2\theta_0}{g} = \max$$

2-4. Wie ändert sich die Beschreibung einer Bewegung in einem anderen Bezugssystem ?

Beispiel: Regentropfen vom Zug aus gesehen



Ein Bezugssystem - **x',y',z'** – bewegt sich bezüglich einem anderen - **x,y,z**

P ein Massenpunkt **(r, r')**

q=(OO')

Position: $\vec{r} = \vec{q}(t) + \vec{r}\,'$

Geschwindigkeit: $\frac{d\vec{r}}{dt} \equiv \vec{v} = \vec{v}_q + \vec{v}\,'$

(Beschleunigung): $\frac{d\vec{v}}{dt} \equiv \vec{a} = \vec{a}_q + \vec{a}\,'$

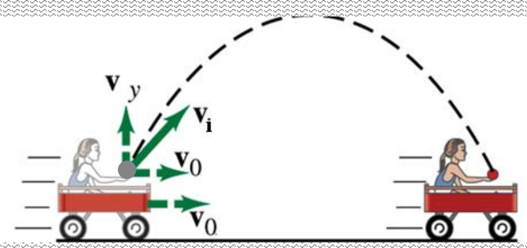
$$\vec{r}\,' = \vec{r} - \vec{q}(t)$$
$$\vec{v}\,' = \vec{v} - \vec{v}_q$$
$$\vec{a}\,' = \vec{a} - \vec{a}_q$$

Immer die Bewegung des Referenzpunktes des neuen Bezugssystemes subtrahieren !

Beispiel: Wurf eines Balles von einem bewegten Wagen

Relativbewegung

a) Bezugssystem des Wagens



b) Bezugssystem der Strasse

a) **Bezugssystem Wagen:**

b) **Bezugssystem Strasse:**