

Vektoren

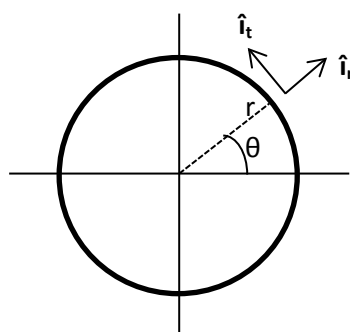
Übungen

Hier sind einige Übungen, mit denen Sie das Rechnen mit Vektoren vertiefen können. Die Aufgaben sind nach Thema geordnet und jeweils in zwei Kategorien eingeteilt: Aufgaben, die nur die Kenntnis der Vektoren voraussetzen, und Aufgaben, die Konzepte und Gesetze der Physik verwenden. Diese Konzepte sollten aus dem Gymnasium bekannt sein, werden aber in der Vorlesung kurz repetiert. Falls es Ihnen nicht gelingt, alle Aufgaben jetzt zu lösen, so befassen Sie sich am besten wieder damit kurz vor der entsprechenden Vorlesung.

Einige Aufgaben stammen aus den folgenden Büchern: Giancoli, *Physics for scientists and engineers, with modern Physics* ; Schaum's outline : *Vector Analysis* ; Das, *Mathematics for Physics*.

1. Komponenten

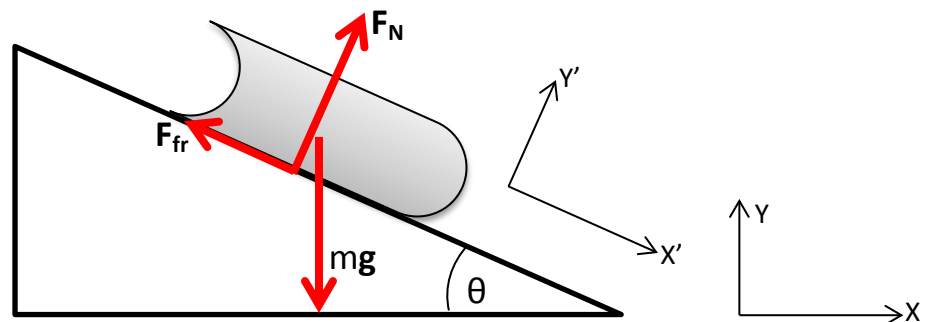
- 1.1) Ein Fahrzeug fährt 225 km gegen Westen und anschliessend 78 km gegen Südwesten (45°). Bestimmen Sie die Entfernung des Fahrzeugs von seinem Startpunkt (Betrag und Richtung), Zeichnen Sie eine Skizze.
- 1.2) Ein Lieferwagen fährt Richtung Norden an 28 Gebäuden vorbei, nachher Richtung Osten an 16 und dann Richtung Süden an 26 Gebäuden. Wie gross ist die Entfernung vom Ausgangspunkt, wenn jedes Gebäude gleich gross ist (Länge und Breite).
- 1.3) Wenn $\mathbf{v}_x = 7.8$ Einheiten und $\mathbf{v}_y = -6.4$ Einheiten, bestimmen Sie den Betrag und die Richtung von $\mathbf{v}$.
- 1.4) Bestimmen Sie die Komponenten x und y der Vektoren : 1. Betrag 9, Richtung 30° mit der positiven x -Richtung; 2. Betrag 11, Richtung -60° mit der positiven x -Achse; 3. Betrag 60 m/s, Richtung 45° über der x -Achse; 4. Betrag 17N, Richtung 115° mit der positiven x -Achse.
- 1.5) Berechnen Sie den Betrag der Vektoren : $\mathbf{a} = (1, 2, -2)$; $\mathbf{b} = (1, 1, 1)$; $\mathbf{c} = (3, 0, -3)$; $\mathbf{d} = (-5, 12, 0)$
- 1.6) Ändert die Multiplikation eines Vektors mit einer positiven Zahl die Richtung ? Und wie ist es bei einer negativen Zahl?
- 1.7) $\hat{\mathbf{i}}_r$ et $\hat{\mathbf{i}}_t$ sind zwei Einheitsvektoren. Erklären Sie, wie man die Komponenten im xy -Achsensystem bestimmt.



Mit Konzepten der Physik :

In der Physik werden verschiedene Grössen mit Vektoren beschrieben, in Übung 1.8 lernen Sie einige kennen, die sie in diesem Semester verwenden werden.

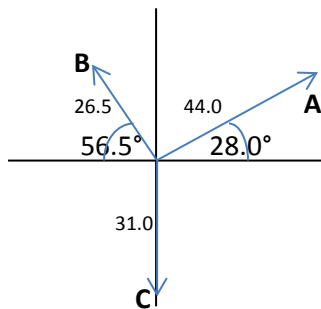
- 1.8) Welche der folgenden Grössen sind skalare Grössen, welches sind vektorielle Grössen :
a) Geschwindigkeit, b) Potentielle Energie, c) Arbeit, d) Frequenz, e) Kraft, f) Drehimpuls, g) Beschleunigung, h) Trägheitsmoment i) Impuls, j) Drehmoment.
- 1.9) Eine Kraft wird mit einem Vektor beschrieben und in Newton (N) angegeben. Die x- und y-Komponenten sind $F_x = -4.0\text{N}$ und $F_y = 6.0\text{N}$. Bestimmen Sie die Grösse und Richtung der Kraft.
- 1.10) Ein Geschoss wird von einem Turm mit einer Geschwindigkeit von 60 m/s und einem Winkel von 32° zur Horizontalen (schräg nach oben) abgeschossen. Bestimmen Sie die Horizontal- und Vertikalkomponente der Abschussgeschwindigkeit.
- 1.11) Ein schweres Buch liegt gemäss Abbildung auf einer schiefen Ebene. Bestimmen Sie die einwirkenden Kräfte in beiden Bezugssystemen. Folgende Grössen sind bekannt: $\|mg\| = 30\text{N}$, $\|F_N\| = 15\sqrt{3}\text{N}$, $\|F_{fr}\| = 15\text{N}$. (« Bonus » : drücken Sie die Vektoren nur in Funktion von mg , μ und θ aus.)



2. Addition und Subtraktion

- 2.1) Ein Briefträger verlässt das Postbüro und geht 200 m in Richtung Norden, dann zweigt er in nordöstlicher Richtung ab (Winkel 30° zur N-Richtung). Bestimmen Sie die Entfernung vom Ausgangspunkt.
- 2.2) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{A} = (1, -2)$ und $\mathbf{B} = (2, -3)$. Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren $\mathbf{A+B}$ und $\mathbf{A-B}$. Bestimmen Sie auch den Betrag und die Richtung von $\mathbf{A+B}$ und $\mathbf{A-B}$.
- 2.3) Berechnen Sie die Resultierende der folgenden Bewegungsvektoren: $\mathbf{A}$: 20km südöstlich (30° zur E-Richtung) ; $\mathbf{B}$: 50km Richtung Westen ; $\mathbf{C}$: 40km nordöstlich (30° zur N-Richtung) ; $\mathbf{D}$: 30km südöstlich (60° zur E-Richtung).
- 2.4) Vereinfachen Sie : $2\mathbf{A} + \mathbf{B} + 3\mathbf{C} - (\mathbf{A} - 2\mathbf{B} - 2(2\mathbf{A} - 3\mathbf{B} - \mathbf{C}))$

- 2.5) Die folgenden Kräfte wirken auf einen Körper ein : $\mathbf{F}_1 = (2, 3, -5)$, $\mathbf{F}_2 = (-5, 1, 3)$, $\mathbf{F}_3 = (1, -2, 4)$, gemessen mit der Einheit Newton. Bestimmen Sie a) die Resultierende, b) den Betrag der Resultierenden.
- 2.6) Geben Sie an, ob die Vektoren linear abhängig oder linear unabhängig sind :
a) $\mathbf{A} = (2, 1, -3)$, $\mathbf{B} = (1, 0, -4)$, $\mathbf{C} = (4, 3, -1)$; b) $\mathbf{A} = (1, -3, 2)$, $\mathbf{B} = (2, -4, -1)$, $\mathbf{C} = (3, 2, -1)$.
- 2.7) Welche Bedingung müssen die beiden Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ erfüllen, damit $\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\| = \|\mathbf{A} - \mathbf{B}\|$?
- 2.8) $\mathbf{V}$ ist ein Vektor mit der Länge 24.8 Einheiten und der Richtung 23.4° zur negativen x-Achse a) Zeichnen Sie den Vektor ; b) Berechnen Sie die Komponenten v_x und v_y ; c) verwenden Sie v_x und v_y und bestimmen Sie daraus den Betrag und die Richtung
- 2.9) Drei Vektoren sind gemäss untenstehender Abbildung gegeben. Die Beträge sind in einer beliebigen Einheit angegeben. 1. Bestimmen Sie die Summe der drei Vektoren, gesucht sind a) die Komponenten, b) Betrag und Winkel zur x-Achse 2. Bestimmen Sie $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} - \mathbf{A}$, vergleichen Sie die Resultate und bestätigen Sie, dass sie entgegengesetzt sind. 3. Bestimmen Sie graphisch $\mathbf{A} - \mathbf{C}$, vergleichen Sie mit den algebraischen Resultaten.



- 2.10) Der Gipfel eines Bergs, 2450m über dem Basislager, wird auf einer Karte mit dem Winkel 32.4° von N Richtung Westen und in einer horizontalen Entfernung von 4580 m vom Basislager gemessen. Welches sind die Komponenten des Verschiebungsvektors vom Basislager zum Gipfel. Wie lang ist dieser Vektor. Die x-Achse zeigt Richtung E, die y-Achse Richtung N und die z-Achse nach oben.
- 2.11) Ein Vektor in der xy-Ebene hat einen Betrag von 90.0 Einheiten und eine y-Komponente von 55 Einheiten. a) Welche beiden Lösungen erhält man für die x-Komponente? b) Wir betrachten die positive Lösung: berechnen Sie den Vektor, den man dazu addieren muss, um einen resultierenden Vektor der Länge 80 Einheiten und in Richtung $-x$ -Achse zu erhalten.

Mit Konzepten der Physik :

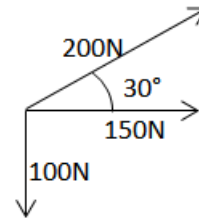
Einige Gesetze der Physik, die hier verwendet werden :

$\mathbf{v} = \Delta \mathbf{x} / \Delta t$ (mittlere Geschwindigkeit, Quotient aus zurückgelegtem Weg und dafür benötigter Zeit)

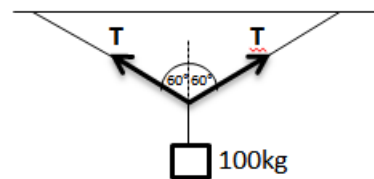
Für ein ruhendes Objekt (oder mit konstanter Geschwindigkeit): $\sum \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (die Summe der Kräfte (Vektoren) die auf das Objekt einwirken ist Null)

- 2.12) Zwei Städte A und B befinden sich direkt gegenüber an den beiden Ufern eines Flusses, dessen Breite 8 km ist und der mit 4 km/h fließt. Ein Bewohner von A möchte innerhalb einer Stunde C erreichen. C befindet sich auf der gleichen Seite wie B 6 km flussaufwärts. Wenn er C in 1 h erreichen will, wie rasch muss sich der Bewohner bewegen und welche Bahn muss er beschreiben?

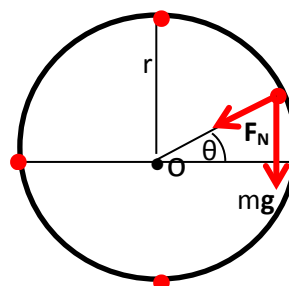
- 2.13) Auf ein Objekt P wirken drei komplanare Kräfte ein (siehe Abbildung). Welche zusätzliche Kraft hält das Ganze im Gleichgewicht?



- 2.14) Eine Masse von 100kg ist gemäss Abbildung an einem Seil aufgehängt. Bestimmen Sie die Spannkraft T



- 2.15) Man misst zu Beginn, d.h. $t = 0$ s, den Positionsvektor eines Käfers: $\mathbf{p} = (2, 3)$. Der Geschwindigkeitsvektor ist: $\mathbf{v} = (t, -\frac{t}{2})$. Wo befindet sich der Käfer zur Zeit $t = 12$ s? Bestimmen Sie den Verschiebungsvektor für die Zeit zwischen $t = 0$ und $t = 12$ s.
- 2.16) Drücken Sie F_N , mg und F_{net} ($=\sum F$) in kartesischen Koordinaten (x, y) und F_N sowie mg in Polarkoordinaten (r, θ) aus für die vier verschiedenen Punkte: (Beachte: $F_N = mv^2/r = mr\omega$ und verläuft rechtwinklig zum Kreis an jedem Punkt, mg zeigt immer gegen unten, die Reibung wird vernachlässigt)



3. Skalarprodukt

- 3.1) Wie gross ist das Skalarprodukt von $\mathbf{A} = (2.0x^2, -4.0x, 5.0)$ und $\mathbf{B} = (11.0, 2.5x, 0)$?
- 3.2) Berechnen Sie den Winkel zwischen den Vektoren $\mathbf{A} = (6.8, -3.4, -6.2)$ und $\mathbf{B} = (8.2, 2.3, -7.0)$.
- 3.3) Der Vektor $\mathbf{V}_1$ zeigt entlang der z-Achse und hat einen Betrag von 75 Einheiten. Der Vektor $\mathbf{V}_2$ liegt in der xy-Ebene, hat einen Betrag von 58 Einheiten und der Winkel zur x-Achse beträgt 48° (er verläuft unterhalb der x-Achse). Wie gross ist das Skalarprodukt $\mathbf{V}_1 \cdot \mathbf{V}_2$?

- 3.4) Geben Sie einen Vektor der senkrecht zu $\mathbf{v} = (3.0, 1.5)$ verläuft.
- 3.5) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{A} = (-4.8, 6.8)$ und $\mathbf{B} = (9.6, 6.7)$, bestimmen Sie den Vektor $\mathbf{C}$ der in der xy -Ebene verläuft, senkrecht zu $\mathbf{B}$ und dessen Skalarprodukt mit $\mathbf{C}$ 20.0 beträgt.
- 3.6) Gegeben ist der Vektor $\mathbf{V} = (20, 22, -14)$: Wie gross sind die Winkel zwischen dem Vektor und den Koordinatenachsen x , y et z ?
- 3.7) Im Bezugssystem $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$, berechnen Sie die Komponenten und den Betrag der Vektoren $\mathbf{x}$ und $\mathbf{y}$, wenn man weiss dass : $\mathbf{x} \cdot \mathbf{i} = 4$, $\mathbf{x} \cdot \mathbf{j} = 7$ et $\mathbf{x} \cdot \mathbf{k} = 7$; $\mathbf{y} \cdot \mathbf{i} = -5$, $\mathbf{y} \cdot \mathbf{j} = 0$ et $\mathbf{y} \cdot \mathbf{k} = 12$
- 3.8) Berechnen Sie den Betrag der senkrechten Projektion eines Vektors $\mathbf{v}$ auf den Vektor $\mathbf{a}$.
 1. $\mathbf{a} = (-3, 4)$, $\mathbf{v} = (-7, -3)$ 2. $\mathbf{a} = (-1, 1)$, $\mathbf{v} = (5, 2)$
- 3.9) Gegeben sind drei Punkte : $C = (-3, 9)$, $D = (2, -3)$, $M = (19, 10)$. Berechnen Sie die Koordinaten der orthogonalen Projektion M' von M auf die Gerade CD , sowie den Spiegelpunkt N von M an der Geraden CD .
- 3.10) Gegeben sind die beiden Punkte $A(-2, -1, 2)$ und $B(-5, 3, 4)$: berechnen Sie die Koordinaten der orthogonalen Projektion von A auf die OB .
- 3.11) Bestimmen Sie den Betrag der Projektion der folgenden Vektoren auf die Abszisse:
 1. Betrag 6, Winkel 53° ; 2. Betrag 12, Winkel $294,53^\circ$; 3. $(-4, 6)$.
- 3.12) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{A} = (2, 0, 6)$ und $\mathbf{B} = (3, -2, 4)$, berechnen Sie die Länge der Projektion von $\mathbf{A}$ auf $\mathbf{B}$.

Mit Konzepten der Physik :

Die Arbeit (W) einer Kraft (F) längs einer Distanz (d) berechnet man mit dem Skalarprodukt: $W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$

- 3.13) Eine konstante Kraft $\mathbf{F} = (2.0, 4.0)\text{N}$ wirkt auf ein Objekt, das sich längs einer Geraden bewegt. Wenn die Verschiebung des Objektes gleich $\mathbf{d} = (1.0, 5.0)\text{m}$ ist, berechnen Sie die Arbeit von $\mathbf{F}$, indem Sie beide Methoden zur Berechnung des Skalarprodukts verwenden : a) $W = \|\mathbf{F}\| \|\mathbf{d}\| \cos\theta$ und b) $W = F_x d_x + F_y d_y$.
- 3.14) Berechnen Sie die Arbeit bei der Bewegung eines Objekts entlang einer Verbindungsgeraden zwischen den Punkten $(3, 2, -1)$ und $(2, -1, 4)$ mit einer Kraft $\mathbf{F} = (4, -3, 2)$.
- 3.15) Berechnen Sie die Arbeit, um einen Wagen mit einer Kraft von 20N auf einer Länge von 2 m zu bewegen (der Winkel zwischen Bewegungsrichtung und Kraft beträgt 30°).
- 3.16) Zwei Kräfte $\mathbf{F}_1 = (1.2, -0.5, 0.5)\text{N}$ und $\mathbf{F}_2 = (0.9, -1.2)\text{N}$ wirken auf ein Objekt mit einer Masse von 0.1 kg. Der Verschiebungsvektor ist $\mathbf{r} = (4.0, 2.0, 2.0)\text{m}$. Bestimmen Sie die Arbeit, die von den beiden Vektoren ausgeübt wird.

4. Vektorprodukt

- 4.1) Gegeben sind $\mathbf{A} = (2, 3, -1)$ und $\mathbf{B} = (1, -2, 3)$, bestimmen Sie $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$. Wie gross ist der Winkel zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$.
- 4.2) Rechte-Hand-Regel: Berechnen Sie in einem linkshändigen orthonormierten Koordinatensystem $(0, \mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k})$ die Vektorprodukte $\mathbf{i} \times \mathbf{j}, \mathbf{i} \times \mathbf{k}, \mathbf{j} \times \mathbf{i}, \mathbf{j} \times \mathbf{k}, \mathbf{k} \times \mathbf{i}, \mathbf{k} \times \mathbf{j}$
- 4.3) Berechnen Sie die folgenden Vektorprodukte : 1. $(1, -2, 5) \times (-1, 3, 2)$; 2. $(7, 3, \frac{1}{2}) \times (-1, 5, a)$
- 4.4) Gemischte Produkte: Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{a}, \mathbf{b}$ und $\mathbf{c}$. Sind die folgenden Operationen möglich und erhält man eine vektorielle oder skalare Grösse? 1. $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$; 2. $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$; 3. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$; 4. $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \cdot \mathbf{d})$; 5. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$; 6. $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} \times \mathbf{d})$
- 4.5) Berechnen Sie $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ falls 1. $\mathbf{A} = (1, 2, 0)$ und $\mathbf{B} = (0, 3, 1)$; 2. $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ und $\mathbf{B} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$; 3. $\mathbf{A} = (t, t^2, t^3)$ et $\mathbf{B} = (1, 2t, 3t^2)$.
- 4.6) Für die Vektoren $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{u}$ und $\mathbf{v}$, gilt: $\mathbf{x} \times \mathbf{y} = (4, -3, 2)$, $\mathbf{u} \times \mathbf{y} = (1, 1, -5)$ und $\mathbf{v} \times \mathbf{y} = (-2, 1.5, -1)$. Bestimmen Sie : 1. $(7\mathbf{x}) \times \mathbf{y}$; 2. $\mathbf{y} \times (\mathbf{u} + \mathbf{v})$; 3. $\mathbf{x} \times (-3\mathbf{y})$; 4. Sind $(\mathbf{x} + \mathbf{v})$ und $\mathbf{y}$ parallel zueinander? 5. Und wie ist es mit $(\mathbf{x} + 2\mathbf{v})$ und $\mathbf{y}$?
- 4.7) Gegeben sind $\mathbf{A} = (2, -1, 2)$ und $\mathbf{B} = (3, 4, -1)$, bestimmen Sie $\mathbf{C}$ so dass $\mathbf{A} \times \mathbf{C} = \mathbf{B}$. Gibt es nur eine Lösung für $\mathbf{C}$?
- 4.8) Gegeben sind die beiden Vektoren $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ mit den Beträgen 12 und 8 und mit dem Zwischenwinkel 30° , wie gross ist der Betrag von $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$? Bei welchem Winkel zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ ist dieser Betrag maximal?
- 4.9) Der Vektor $\mathbf{A}$ zeigt gegen Osten und hat den Betrag 9, $\mathbf{B}$ zeigt gegen Südwesten und hat den Betrag 11, wie gross ist der Betrag von $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ und in welche Richtung zeigt dieser Vektor? Wenn man davon ausgeht, dass der Betrag von $\mathbf{A}$ unbekannt ist, drücken Sie den Betrag von $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ in Funktion von $\mathbf{A}$ aus.
- 4.10) Wenn ein Vektor $\mathbf{A}$ in Richtung der negativen x-Werte und ein zweiter Vektor $\mathbf{B}$ in Richtung der positiven z-Werte zeigt, bestimmen Sie den Betrag und die Richtung von: a) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$; b) $\mathbf{B} \times \mathbf{A}$;
- 4.11) Wie gross ist der Winkel zwischen $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ wenn $\|\mathbf{A} \times \mathbf{B}\| = \mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$?

Mit Konzepten der Physik :

Mehrere physikalische Gesetzmässigkeiten werden mit Hilfe des Vektorprodukts beschrieben. Sie werden das Vektorprodukt während dem ganzen Semester immer wieder benötigen. Hier einige Beispiele:

Das Drehmoment ($\boldsymbol{\tau}$) wird berechnet aus der Kraft ($\mathbf{F}$) und dem Hebelarm ($\mathbf{r}$) : $\boldsymbol{\tau} = \mathbf{r} \times \mathbf{F}$

Die momentane Winkelgeschwindigkeit (ω) berechnet man aus dem Ortsvektor ($\mathbf{r}$) und der Tangentialgeschwindigkeit eines Objekts ($\mathbf{v}$)

Der Drehimpuls $\mathbf{L}$ eines rotierenden Objekts berechnet man aus dem Ortsvektor ($\mathbf{r}$) und dem Impuls ($\mathbf{p} = m\mathbf{v}$): $\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \mathbf{p}$

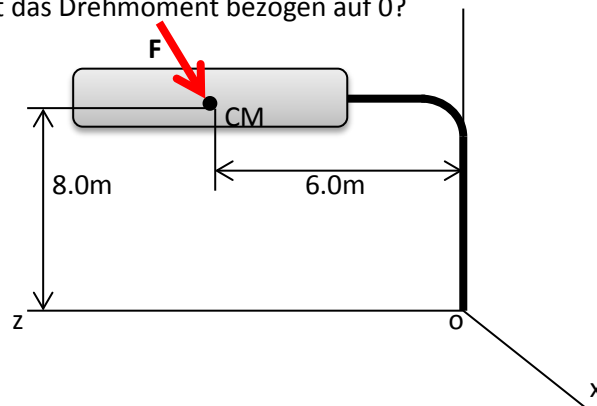
4.12) Ein Teilchen am Ort $\mathbf{r} = (2.0, 1.0, 3.0)\text{m}$ erfährt eine Kraft $\mathbf{F} = (0, 2.0, -1.0)\text{N}$. Bestimmen Sie das Drehmoment.

4.13) Ein Teilchen hat den Impuls $\mathbf{p} = (4, 6, 0) \text{ kg}\cdot\text{m/s}$. Bestimmen Sie den Drehimpuls, wenn es sich um den Ursprung dreht und für den Ortsvektor $\mathbf{r} = (0, 2, 5)\text{m}$ gilt.

4.14) Eine Kraft $\mathbf{F} = (3, 2, -4)\text{N}$ greift am Punkt $(1, -1, 2)$ an. Berechnen Sie das Drehmoment bezogen auf a) $(2, -1, 3)$, b) $(4, -6, 3)$.

4.15) Die Winkelgeschwindigkeit eines sich um eine Achse drehenden Objektes ist gegeben mit $\omega = (4, 1, -2)$. Bestimmen Sie die Tangentialgeschwindigkeit wenn sich das Objekt am Punkt P befindet, dessen Relativposition zur Rotationsachse $(2, -3, 1)$ beträgt.

4.16) Ein Ingenieur geht davon aus, dass bei schlechtem Wetter die gesamte Kraft auf eine Signaltafel auf der Autobahn gleich $\mathbf{F} = (\pm 2.4, -4.1)\text{kN}$ ist (Angriffspunkt der Schwerkraft: Schwerpunkt). Wie gross ist das Drehmoment bezogen auf O?



5. Ableitung von Vektoren

5.1) Gegeben ist der Vektor $\mathbf{R} = (e^{-t}, \ln(t^2 + 1), -\tan(t))$. Bestimmen Sie für den Zeitpunkt $t = 0$:
a) $d\mathbf{R}/dt$, b) $d^2\mathbf{R}/dt^2$, c) $\|d\mathbf{R}/dt\|$, d) $\|d^2\mathbf{R}/dt^2\|$.

5.2) Bestimmen Sie einen Vektor, der tangential zu jedem Punkt der Kurve mit $x = a \cos(\omega t)$, $y = a \sin(\omega t)$, $z = bt$ verläuft, wobei a , b , und ω konstante Werte sind.

5.3) Nehmen wir an, dass $\mathbf{A} = (t^2, -t, (2t + 1))$ und $\mathbf{B} = ((2t - 3), 1, -t)$. Berechnen Sie für $t = 1$:
a) $d(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})/dt$; b) $d(\mathbf{A} \times \mathbf{B})/dt$; c) $d\|\mathbf{A} + \mathbf{B}\|/dt$.

5.4) Gegeben sind die Vektoren $\mathbf{A} = (\sin(u), \cos(u), u)$, $\mathbf{B} = (5u, -4, 1)$ und $\mathbf{C} = (2, 3, -1)$. Bestimmen Sie für $u = 0$ $d(\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C}))/du$.

Mit Konzepten der Physik :

Viele Berechnungen in der Physik werden mit der Differential- und Integralrechnung durchgeführt.

Die Geschwindigkeit ist die Ableitung des Ortsvektors nach der Zeit und die Beschleunigung die Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit : $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$, $\mathbf{a} = d\mathbf{v}/dt = d^2\mathbf{r}/dt^2$.

Die Kraft kann berechnet werden mit : $\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt$ wobei $\mathbf{p} = m\mathbf{v}$ weil $\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m(d\mathbf{v}/dt) = (dm\mathbf{v}/dt)$

5.5) Ein Teilchen bewegt sich längs des Bogens $x = 2\sin(3t)$, $y = 2\cos(3t)$, $z = 8t$ für $t > 0$. Bestimmen Sie : a) die Geschwindigkeit und die Beschleunigung des Teilchens, b) den Betrag der Geschwindigkeit und der Beschleunigung.

5.6) Ein Objekt bewegt sich auf einer Bahn, der Ortsvektor kann bestimmt werden mit $\mathbf{r} = ((\sin(t - \frac{\pi}{4}), 2\cos(3t), -2t^2)m$. Welche Kraft wirkt auf dieses Objekt (Masse 5 g) zum Zeitpunkt $t = \frac{\pi}{2}s$.

6. Integration von Vektoren

6.1) Gegeben ist $\mathbf{R}(t) = ((3t^2 - t), (2 - 6t), -4t)$. Bestimmen Sie: a) $\int \mathbf{R}(t) dt$; b) $\int_2^4 \mathbf{R}(t) dt$

6.2) Berechnen Sie $\int_0^{\pi/2} (3 \sin(u), 2 \cos(u)) du$

6.3) Gegeben sind $\mathbf{A}(t) = (t, -t^2, (t - 1))$ und $\mathbf{B}(t) = (2t^2, 0, 6t)$. Bestimmen Sie a) $\int_0^2 (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}) dt$; b) $\int_0^2 (\mathbf{A} \times \mathbf{B}) dt$

Mit Konzepten der Physik :

Aus dem letzten Kapitel kann man schliessen, dass $\mathbf{v} = \int \mathbf{a} dt$ et $\mathbf{r} = \int \mathbf{v} dt$

Die Arbeit einer Kraft kann auch mit einem Integral berechnet werden : $W_{a \rightarrow b} = \int_a^b dW = \int_a^b \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$

6.4) Die Beschleunigung $\mathbf{a}$ eines Objekts ist gegeben mit $\mathbf{a} = (0, -g)$, wobei g eine Konstant ist. Für $t = 0$ gilt $\mathbf{v} = (v_0 \cos \theta_0, v_0 \sin \theta_0)$ und $\mathbf{r} = \mathbf{0}$. Berechnen Sie $\mathbf{v}$ und $\mathbf{r}$ für $t > 0$. (Diese Gleichung beschreibt die Bewegung eines Projektils, das mit einer Kanonen mit dem Startwinkel θ_0 bezogen auf die x-Achse und mit einer Startgeschwindigkeit v_0 abgefeuert wird)

6.5) Die Beschleunigung $\mathbf{a}$ eines Teilchens für $t \geq 0$ ist gegeben mit $\mathbf{a} = (e^{-t}, -6(t + 1), 3\sin(t))$. Für $t = 0$ sind sowohl $\mathbf{v}$ als auch $\mathbf{r}$ gleich $\mathbf{0}$, bestimmen Sie $\mathbf{v}$ und $\mathbf{r}$ für beliebige Werte von t .

6.6) Berechnen Sie die geleistete Arbeit für eine Kraft $\mathbf{F} = ((3x^2 + 6y), -14yz, 20xz^2)$ längs : a) eine Kurve mit $x = t$, $y = t^2$, $z = t^3$, von $(0, 0, 0)$ bis $(1, 1, 1)$; b) zwei Geraden von $(0, 0, 0)$ bis $(1, 0, 0)$ und anschliessend von $(1, 0, 0)$ bis $(1, 1, 1)$.