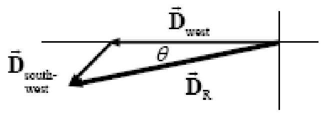
Vektoren

Lösungen der Übungen

1. Komponenten

1.1)

Der Verschiebungsvektor ist **D** = **D**$_{ouest}$ + **D**$_{sud\text{-}ouest}$.



Die Verschiebung nach Westen ist 225km + 78cos45° km = 280.2km und die Verschiebung nach Süden beträgt 78sin45° km = 55.2km.
Die Entfernung vom Startpunkt entspricht dem Betrag des Verschiebungsvektors = $\sqrt{280.2^2 + 55.2^2}$ = 286km.
Die Richtung entspricht dem Winkel θ = $\tan^{-1}$(55.2/280.2) = 11° gemessen von Richtung Westen gegen Süden.

1.2) Der Lieferwagen fährt an 28 + (-26) = 2 Gebäuden Richtung Norden und an 16 Gebäuden Richtung Osten vorbei. Die Resultierende beträgt $\sqrt{2^2 + 16^2}$ = 16.1 Gebäude und hat eine Richtung von $\tan^{-1}$(2/16) = 7° (Abweichung von Norden Richtung Osten).

1.3) Die Resultierende ist $\sqrt{{v_x}^2 + {v_y}^2}$ = $\sqrt{7.80^2 + (-6.40)^2}$ = 10.1 unités. Die Richtung berechnet man mit θ = $\tan^{-1}$(-6.40/7.80) = -39.4°.

1.4) Für einen Vektor **v**, verwendet man die Beziehungen $\mathbf{v}_x$ = ‖**v**‖cos(θ) et $\mathbf{v}_y$ = ‖**v**‖sin(θ)

1. ($9\frac{\sqrt{3}}{2}$, 9/2)
2. ($\frac{11}{2}, -11\frac{\sqrt{3}}{2}$)
3. V = ($\frac{60}{\sqrt{2}}, \frac{60}{\sqrt{2}}$)m/s
4. F = (-7.18, 15.4)N

1.5) ‖**a**‖ = 3 ; ‖**b**‖ = √3 ; ‖**c**‖ = 3√2 ; ‖**d**‖ = 13

1.6) Weder das eine noch das andere ändert den Betrag, bei einer Multiplikation mit einer negativen Zahl wird die Richtung eines Vektors umgekehrt.

1.7) $\hat{\mathbf{i}}_r$ = (cosθ, sinθ) et $\hat{\mathbf{i}}_t$ = (-sinθ, cosθ)

1.8) a, e, f, g, i et j sind vektorielle Grössen ; b, c, d et h sind skalare Grössen.

1.9) Da die x-Komponente negativ ist, befindet sich der Vektor im zweiten Quadranten, d.h. der Winkel ist zwischen 90° und 180°: θ = $\tan^{-1}(F_y/F_x)$ = $\tan^{-1}$(6.0N/-4.0N) = -56.3° (mit Taschenrechner). Der Taschenrechner berechnet den kleinsten Winkel, der im vierten Quadranten ist ; da unser Vektor im zweiten Quadranten ist, ist der richtige Winkel : 180° + (-56.3°) = 123.7°.

Mit Pythagoras berechnet man anschliessend F = $\sqrt{F_x{}^2 + F_y{}^2}$ = $\sqrt{(-4.0N)^2 + (6.0N)^2}$ = 7.2N

1.10) Die Komponente in x-Richtung ist 50.9m/s, die Komponente in y-Richtung ist 31.8m/s

1.11) Zerlegt man die die drei Kräfte in Komponenten, so erhält man :

xy : **mg** = (0, -(‖**mg**‖) = (0, -30)N ;

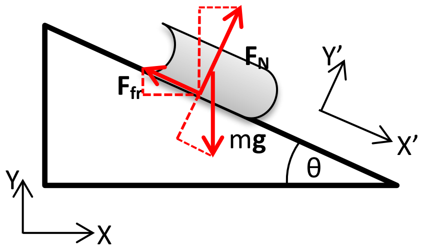
$\mathbf{F_N}$ = (‖$\mathbf{F_N}$‖sinθ, ‖$\mathbf{F_N}$‖cosθ) = (15√3sinθ, 15√3cosθ)N ;

$\mathbf{F_{fr}}$ = (-‖$\mathbf{F_{fr}}$‖cosθ, ‖$\mathbf{F_{fr}}$‖sinθ) = (-15cosθ, 15sinθ)N.

x'y' : **mg** = (‖**mg**‖sinθ, ‖**mg**‖cosθ) = (30sinθ, 30cosθ)N ;

$\mathbf{F_N}$ = (0, ‖$\mathbf{F_N}$‖) = (0, 15√3)N ;

$\mathbf{F_{fr}}$ = (-‖$\mathbf{F_{fr}}$‖, 0) = (-15, 0)N.



2. Addition und Subtraktion

2.1) Vektor **A** beschreibt die erste Verschiebung, Vektor **B** die zweite Verschiebung. Die Komponenten von **A** sind : A_x = 0m und A_y = 200m. Die Komponenten von B sind : B_x = 400m·cos(30°) = 346m und B_y = 400m·sin30° = 200m.

Man addiert anschliessend die Vektoren um die Resultierende zu erhalten : **R** = (0m + 346m)**i** + (200m + 200m)**j** = 346m**i** + 400m**j**.

Der Betrag von **R** ist = $\sqrt{R_x{}^2 + R_y{}^2}$ = $\sqrt{(346m)^2 + (400m)^2}$ = 529m und der Winkel = $\tan^{-1}(\frac{400}{346})$ = 49°

2.2) **A** + **B** = (3, – 5) und **A** – **B** = (-1, 1)

2.3) Länge 20.9km, Richtung 21,4° nach Süden (Abweichung von der Ostrichtung – 21,4°)

2.4) 5**A** – 3**B** + **C**

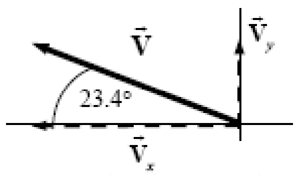
2.5) Die Resultierende ist $\mathbf{F_R}$ = (-2, 2, 2) ; der Betrag dieser Resultierenden ist 2√3N

2.6) a)Linear abhängig ; b)Linear unabhängig

2.7) **A** verläuft senkrecht zu **B**

2.8) b)V_x = -24.8cos(23.4°) = -22.8 , und V_y = 24.8sin(23.4°) = 9.85

c) ‖**V**‖ = $\sqrt{(-22.8)^2 + (9.85)^2} = 24.8$, θ = $\tan^{-1}\frac{9.85}{22.8}$ = 23.4°



2.9) **A** = (44cos(28°) = 38.85, 44sin(28°) = 20.66), **B** = (-26.5cos(56°) = -14.82, 26.5sin(56°) = 21.97), **C** = (31cos(270°) = 0.0, 31sin(270°) = -31.0)

1.a) (**A** + **B** + **C**) = (A_x + B_x + C_x, A_y + B_y + C_y) = (24.0, 11.6)

1.b) ‖**A** + **B** + **C**‖ = $\sqrt{(24.03)^2 + (11.63)^2} = 26.7$, θ = $\tan^{-1}\frac{11.63}{24.03}$ = 25.8°

2. **A** – **B** = (53.7, – 1.31) und **B** – **A** = (- 53.7, 1.31) die Ergebnisse sind entgegengesetzt gerichtet, die Vektoren verlaufen im zweiten und vierten Quadranten.

3. **A** – **C** = (38.8, 51.7), ‖**A** -**C**‖ = 64.6, θ = 5.1°

2.10) Die x-Komponente ist negativ und die y-Komponente ist positiv, da der Gipfel im Nordwesten des Basislagers ist. Bezogen auf die x-Achse beträgt der Winkel 32.4° + 90° = 122.4°. Die Komponenten sind x = 4580cos(122.4°) = -2454m ; y = 4580sin(122.4°) = 3867m ; z = 2450m. Die Verschiebung beträgt somit: **r** = (-2450m, 3870m, 2450)m

||**r**|| = $\sqrt{(-2454m)^2 + (4580m)^2 + (2450m)^2} = 5190m$

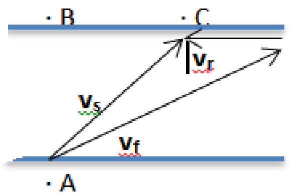
2.11) a) Mit Pythagoras findet man die möglichen Werte: $90.0^2 = x^2 + (-55.0)^2 \rightarrow x^2 = 5075 \rightarrow x = \pm 71.2$

b) Mit den Komponenten von **V** schreibt man :

(71.2, – 55.0) + (V_x, V_y) = (- 80.0, 0.0)

→ V_x = (-80.0 – 71.2) = -151.2 und V_y = 55.0 → **V** = (-151.2, 55.0)

2.12) Um C von A aus zu erreichen wird die Geschwindigkeit $\mathbf{V_S}$ benötigt. Um die Strömung des Flusses zu kompensieren, muss das Boot somit eine Geschwindigkeit $\mathbf{V_f}$ haben.



Es gilt: $\mathbf{V_f} = \mathbf{V_S} - \mathbf{V_r}$

Für $\mathbf{V_S}$ und $\mathbf{V_r}$ gilt: $\mathbf{V_r}$ = -4km/h **i** ; $||\mathbf{V_S}||$ = $\sqrt{(8km/h)^2 + (6km/h)^2}$ = 10km/h, θ = $\tan^{-1}(\frac{8}{6})$ = 53.1°

$\mathbf{V_f}$ = 10cos(53.1°)km/h **i** + 10sin(53.1°)km/h **j** - (-4km/h)**i** = (10, 8)km/h

Für den Betrag gilt : $||\mathbf{V_f}||$ = $\sqrt{(10km/h)^2 + (8km/h)^2}$ = 12.8km/h

Und für die Richtung erhält man : θ = $\tan^{-1}(\frac{8}{10})$ = 38.7°

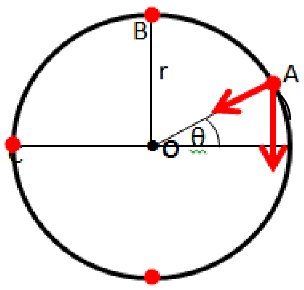
2.13) ∑**F** = 0 → ∑F_x = 0 et ∑F_y = 0 → in x-Richtung : 150N + 200N·cosθ + F_x=0 ; in y-Richtung : 200N·sinθ – 100N + F_y=0 → **F** = (-323, 0)N

2.14) 100kg

2.15) Man weiss dass $\mathbf{p_{12}} = \mathbf{p_0} + \mathbf{v_{12}}$. Um $\mathbf{v_{12}}$ (**v** zur Zeit t = 12s) zu bestimmen, ersetzt man t in den vektoriellen Ausdrücken: $\mathbf{v_{12}}$ = 12**i** – 6**j**. → $\mathbf{p_{12}}$ = (2, 3) + (12, – 6) = (14, – 3).

Der Verschiebungsvektor ist somit **d** = Δ**p** = $\mathbf{p_{12}} - \mathbf{p_0}$ = (14, -3) –(2, 3) = (12, – 6) = $\mathbf{v_{12}}$

2.16) Punkt A: In kartesischen Koordinaten (x, y), hat man immer m**g** = (0, -mg) und $F_{Nx} = -||\mathbf{F_N}||\cos\theta$, $F_{Ny} = -||\mathbf{F_N}||\sin\theta$



→ $\mathbf{F_N}$ = (-mrωcosθ, -mrωsinθ)

$\mathbf{F_{net}}$ = ∑**F** = $\mathbf{F_N}$ + m**g** = (-mrωcosθ, mg - mrωsinθ)

In Polarkoordinaten (R, ϕ), hat man immer m**g** = (mg, -π/2), Für F_N, der Winkel ist = π + θ und R = mrω → F_N = (mrω, π + θ)

Dies kann man auch für die folgenden Punkte verwenden :

Punkt B : Kartesische Koordinaten : m**g** = (0, -mg), $\mathbf{F_N}$ = (0, -mrω),

$\mathbf{F_{net}}$ = (0, -m(g+rω))

Polarkoordinaten : m**g** = (mg, -π/2) et $\mathbf{F_N}$ = (mrω, -π/2)

Punkt C : Kartesische Koordinaten : m**g** = (0, -mg), $\mathbf{F_N}$ = (mrω, 0),

$\mathbf{F}_{net}$ = (mrω, -mg)

Polarkoordinaten: m**g** = (mg, -π/2) et $\mathbf{F}_N$ = (mrω, 0)

Punkt D : Kartesische Koordinaten : m**g** = (0, -mg), $\mathbf{F}_N$ = (0, mrω),

$\mathbf{F}_{net}$ = (0, m(rω-g))

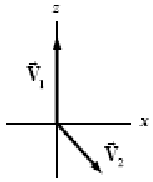
Polarkoordinaten : m**g** = (mg, -π/2) et $\mathbf{F}_N$ = (mrω, π/2)

3. Skalarprodukt

3.1) Um das Skalarprodukt zu bestimmen verwendet man **A** · **B** = $A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z$ = $2.0x^{2}$*11.0 + (-4.0x)*2.5x + 5.0·0 = $12x^2$

3.2) Man verwendet dazu : cosθ = $\frac{\boldsymbol{A\cdot B}}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|}$ → ||**A**|| = 9.81, ||**B**|| = 11.0, **A·B** = 91.34, θ = $\cos^{-1}\frac{91.34}{9.81\cdot 11.0}$ = 32°

3.3) $\mathbf{V_1} \cdot \mathbf{V_2}$ = $\|\mathbf{V_1}\|\|\mathbf{V_2}\|\cos\theta$ = 75*58 cos138° = -3200. Skizze:



3.4) Wenn **A** senkrecht zu **B** verläuft, so gilt **A·B** = 0 → **A·B** = $A_xB_x + A_yB_y$ = $3.0B_x + 1.5B_y$ = 0 → B_y = -$2.0B_x$; jeder Vektor, der diese Gleichung erfüllt, verläuft senkrecht zu **A**, zum Beispiel **B** = (1.5, – 3.0)

3.5) Falls **C** senkrecht zu **B** verläuft, gilt **C·B** = 0, zudem weiss man dass **C** keine Komponente in Richtung z hat und dass **C·A** = 20. Somit erhält man zwei Gleichungen : $C_xB_x + C_yB_y = 9.6C_x + 6.7C_y = 0$ et $-4.8C_x + 6.8C_y = 20.0$ → **C** = (-1.4, 2.0)

3.6) Man verwendet dazu **V·i** = ||**V**||cosθ_x = V_x → $\theta_x = \cos^{-1}\frac{V_x}{\|\boldsymbol{V}\|}$ = 52.5° ; $\theta_y = \cos^{-1}\frac{V_y}{\|\boldsymbol{V}\|}$ = 48.0° ; $\theta_z = \cos^{-1}\frac{V_z}{\|\boldsymbol{V}\|}$ = 115°

3.7) **x** = (4, 7, 7) und ||**x**|| = √114 ; **y** = (-5, 0, 12) und ||**y**|| = 13

3.8) 1. 9/5 ; 2. -3√2/2

3.9) M' = (7, -15) ; N = (-5, -20)

3.10) Man wählt den Vektor **OB** als Richtungsgerade. Um die Projektion von A auf **OB** zu bestimmen, bestimmt man die Länge : $\|\mathbf{OA_p}\|$ = ||**OA**||cos(θ), θ entspricht dem Winkel zwischen **OA** und **OB,** den man mit dem Skalarprodukt bestimmen kann; zudem ist die Richtung von $\mathbf{OA_p}$ bekannt, sie liegt auf der Geraden OB.

→ $\mathbf{OA_p} = \frac{\boldsymbol{OA\cdot OB}}{\|\boldsymbol{OB}\|^2}\boldsymbol{OB}$ = (-3/2, 9/10, 6/5)

3.11) Die Projektion auf die x-Achse ist : ||**p**|| = ||**v**||cos(θ) 1. ||**p**|| = 3, 61 ; 2. ||**p**|| = 4,98 ; 3. ||**p**|| = 4.

3.12) Die Projektion p ist das Skalarprodukt von **A** mit dem Einheitsvektor von **B**. ||**p**|| = 3.71.

3.13) Die beiden Vektoren sind im ersten Quadranten, man erhält den Winkel indem man die Differenz der beiden Winkel berechnet :

$\|\mathbf{F}\| = \sqrt{(2.0N)^2 + (4.0N)^2} = \sqrt{20}N$; $\phi_F = \tan^{-1}(\frac{4}{2})$

$\|\mathbf{d}\| = \sqrt{(1.0m)^2 + (5.0N)^2} = \sqrt{26}m$; $\phi_d = \tan^{-1}(\frac{5}{1})$

a) $W = \|F\| \, \|d\| \cos\theta = \sqrt{20}N \cdot \sqrt{26}m \cdot \cos(\tan^{-1}(\frac{5}{1}) - \tan^{-1}(\frac{4}{2})) = 22Nm = 22J$

b) $W = F_x d_x + F_y d_y = (2.0N)(1.0m) + (4.0N)(5.0m) = 22Nm = 22J$

3.14) Der Verschiebungsvektor ist : **d** = (2, -1, 4) – (3, 2, -1)= (-1, -3, 5). Für die Arbeit erhält man: W=**F·d** → $W = F_x d_x + F_y d_y + F_z d_z = (-1)(4) + (-3)(-3) + (5)(2) = 15$

3.15) $W = \|F\| \, \|d\| \cos\theta = 20.0N \cdot 2.0m \cdot \cos(30°) = 34.6Nm = 34.6J$

3.16) $W = \mathbf{F}_{net} \cdot \mathbf{d} = (\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2) \cdot \mathbf{d} = (2.1, -1.7, 0.5)N \cdot (4.0, 2.0, 2.0)m = 6Nm = 6J$

4. Vektorprodukt

4.1) **A** × **B** = (7, – 7, – 7) ; **B** × **A** = (-7, 7, 7) ; mit ‖**A** × **B**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖ |sin(θ)| , $\theta = \sin^{-1}\left(\frac{\|\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}\|}{\|\boldsymbol{A}\|\|\boldsymbol{B}\|}\right) = \sin^{-1}\left(\frac{\sqrt{147}}{\sqrt{14}\sqrt{14}}\right) = \sin^{-1}\frac{\sqrt{3}}{2} = 60°$

4.2) **i** × **j**= -**k**, **i** × **k**=**j**, **j** × **i**=**k**, **j** × **k**= -**i**, **k** × **i**= -**j**, **k** × **j** =**i**

4.3) 1. (-19, -7, 1) ; 2. (3a - 5/2, -1/2 - 7a, 38)

4.4) 1. Möglich, skalare Grösse (weil das Schlussresultat ein Skalarprodukt ist) ; 2. Unmöglich, (b · c) ist eine skalare Grösse, das Vektorprodukt ist nicht möglich 3. Nicht möglich, gleicher Grund wie bei 2. ; 4. Unmöglich, das Vektorprodukt kann nicht aus zwei skalaren Grössen bestimmt werden; 5. Möglich, skalare Grösse ; 6. Möglich, vektorielle Grösse

4.5) 1. (2, -1, 3) ; 2. 2**i** + 13**j** -8**k**; 3. (t^4, $-2t^3$, t^2)

4.6) 1. (28, -21, 14) weil (7**x**) × **y** = 7(**x** × **y**) 2. (1, -2.5, 6) car **y** × (**u** + **v**) = (**y** × **u**) + (**y** × **v**) = -(**u** × **y**) - (**v** × **y**) 3. (-12, 9, -6) car **x** × (-3**y**) = -3(**x** × **y**) 4. Non car (**x** + **v**) × **y** = (**x** × **y**) + (**v** × **y**) /= 0 5. Ja weil (**x** × **y**) + 2(**v** × **y**) = 0

4.7) **C** = (-2b -1, b, -2b -3), il y en a donc une infinité.

4.8) 48 weil ‖**A** × **B**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖ |sin(∝)| ; ‖**A** × **B**‖ wird maximal, wenn sin(∝) maximal ist, d. h. sin(∝) = 1, und somit ∝ = 90° oder 270°

4.9) Man nimmt an dass der Winkel zwischen **A** und **B** gleich -135° ist, somit ‖**A** × **B**‖ = 99/√2 und **A** × **B** zeigt gegen unten weil sin(-135°) < 0. Falls ‖**A**‖ unbekannt ist, ‖**A** × **B**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖ |sin(∝)| = 11‖**A**‖/√2

4.10) a) In Richtung der positiven y-Werte. Man verwendet die Rechte-Hand-Regel oder bestimmt die Determinante: **A** × **B** = $\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ -A & 0 & 0 \\ 0 & 0 & B \end{vmatrix}$ = **i**(0·B – 0·0) + **j**(0·0 – (-A)·B) + **k**(-A·0 - 0·0) = AB**j**. b) **B** × **A** zeigt in die entgegengesetzte Richtung von **A** × **B** : in die Richtung der negativen y-Werte
c) ‖**A** × **B**‖ = ‖**B** × **A**‖ = ‖**A**‖ ‖**B**‖sin(90°) = ‖**A**‖ ‖**B**‖

4.11) Mit den Definitionen für das Skalar- und Vektorprodukt hat man : ‖**A** × **B**‖ = **A** · **B** → ‖**A**‖‖**B**‖|sin(θ)| = ‖**A**‖‖**B**‖cos(θ) → |sinθ| = cosθ → θ = ±45°

4.12) **τ** = **r** × **F** = (2.0, 1.0, 3.0)m × (0.0, 2.0, – 1.0)N = (-7.0, 2.0, 4.0)N·m

4.13) **L** = **r** × **p** = (0, 2, 5)m × (4, 6, 0)kg·m/s = (-30, 20, – 8)kg·m^2/s

4.14) **τ** = **r** × **F** → a) **τ** = (2, -1, 3) × (3, 2, -4) = (2, -7, -2) ; b) **τ** = (4, -6, 3) × (3, 2, -4) = -3(6, 5, 7)

4.15) **ω** = **r** × **v** et **ω**, **r**, **v** stehen alle rechtwinklig zueinander → **v** = **ω** × **r** = (4, 1, – 2) × (2, – 3, 1) = (– 5, – 8, – 14)

4.16) **r** = (8.0, 6.0), und **τ** = **r** × **F** = (0.0, 8.0, 6.0)m × (±2.4, -4.1, 0.0)kN = (24.6, ±14.4, ∓19.2)m·kN. Man kann den Betrag dieses Drehmoments bestimmen : $\|\boldsymbol{\tau}\| = \sqrt{24.6^2 + 14.4^2 + 19.2^2}\, m \cdot kN = 3.4 \cdot 10^4 m \cdot N$

5. Ableitung von Vektoren

5.1) **R** = (e^{-t}, ln(t^2 + 1), – tan(t)).

$\frac{d\boldsymbol{R}}{dt} = (-e^{-t}, \frac{2t}{t^2+1}, -\frac{2}{\cos(2t)+1})$

$\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2} = (e^{-t}, \frac{2(1-t^2)}{(t^2+1)^2}, -\frac{4\sin 2t}{(\cos(2t)+1)^2})$

Mit t=0 erhält man : a) $\frac{d\boldsymbol{R}}{dt}(0)$ =(–1, 0, – 1) ; b) $\frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}(0)$ = (1, 2, 0)

c) $\| \frac{d\boldsymbol{R}}{dt}(0) \| = \sqrt{2}$; d) $\| \frac{d^2\boldsymbol{R}}{dt^2}(0) \| = \sqrt{5}$.

5.2) Man leite jede Komponente ab : $\mathbf{v}_t$ = λ(-aωsin(ωt), aωcos(ωt), b)

5.3) a) **A**·**B** = 2t^3 – 5t^2 –2 t → $\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{dt}$ = 6t^2 – 10t – 2, $\frac{d(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})}{dt}(1)$ = – 6

b) **A** × **B** = ((t^2–2t–1), (t^3+4t^2–4t–3), 3(t^2–t)) → $\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{dt}$ = ((2t–2), (3t^2+8t–4), 3(2t–1)) → $\frac{d(\mathbf{A}\times\mathbf{B})}{dt}(1)$ =(0, 7, 3)

c) **A** + **B** = ((t^2 + 2t – 3), (-t + 1), (t + 1)), ‖**A** + **B**‖ = $\sqrt{(t^2+2t-3)^2 + (-t+1)^2 + (t+1)^2}$ = $\sqrt{t^4+4t^3-12t+11}$, → $\frac{d\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|}{dt} = \frac{2(t^3+3t^2-3)}{\sqrt{t^4+4t^3-12t+11}}$ → $\frac{d\|\mathbf{A}+\mathbf{B}\|}{dt}(1)$ = 1

5.4) $\mathbf{A} \times (\mathbf{B} \times \mathbf{C})$ = ((cos(u)(15u+8)-u(2+5u)), (u-sin(u)(15u+8)), (sin(u)(2+5u)-cos(u))) → $\frac{d(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))}{du} =$ ([-sin(u)(15u+8)+15cos(u)-(2+10u)], [1-(cos(u)(15u+8)+15sin(u))], [cos(u)(2+5u) +5sin(u)+sin(u)]) → $\frac{d(\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}))}{du}(0)$ = (13, – 7, 2)

5.5) Die Position des Teilchens erhält man mit **r**(t) = (2sin(3t), 2cos(3t), 8t)

Für die Geschwindigkeit bekommt man : **v** = $\frac{dr}{dt}$ = (6cos(3t), – 6sin(3t), 8)

Die Beschleunigung ist somit : **a** = $\frac{dv}{dt}$ = (-18sin(3t), -18cos(3t), 0)

Betrag der Geschwindigkeit : $\|\mathbf{v}\| = \sqrt{(6\cos(3t))^2 + (-6\sin(3t))^2 + 8^2} = 18$

Betrag der Beschleunigung : $\|\mathbf{a}\| = \sqrt{(-18\cos(3t))^2 + (-18\sin(3t))^2} = 18$

5.6) Man weiss dass **F** = m**a** = m($\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$).

Für die Position des Objekts erhält man **r** = (sin(t– $\frac{\pi}{4}$), 2cos(3t), – 2t^2)m → **v** = (cos(t – $\frac{\pi}{4}$), – 6sin(3t), – 4t)$\frac{m}{s}$ et **a** =(–sin(t – $\frac{\pi}{4}$), – 18cos(3t), – 4)$\frac{m}{s^2}$

F = m($\frac{d^2\boldsymbol{r}}{dt^2}$) = m(–sin(t – $\frac{\pi}{4}$), – 18cos(3t), – 4)N

Für t = $\frac{\pi}{2}$ s, **F** = 5·10^{-3}(–sin($\frac{\pi}{4}$), – 18cos($\frac{3\pi}{2}$), – 4)N = 5·10^{-3}(–$\frac{1}{\sqrt{2}}$, 0, – 4)N

Der Betrag von **F** ist: 5·10^{-3}$\sqrt{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 + 4^2}$ N =5·10^{-3}$\sqrt{\frac{33}{2}}$ N ≅ 2·10^{-2}N

6. Integration von Vektoren

6.1) Um $\int \boldsymbol{R}(t)dt$ zu bestimmen, integriert man komponentenweise :

R(t) = ((3t^2 – t), (2 – 6t), – 4t)

$\int \boldsymbol{R}(t)dt$ = ($\int (3t^2 - t)dt$), ($\int (2-6t)dt$), – ($\int 4dt$)) = ((t^3 – $\frac{1}{2}$t), (2t – 3t^2), – (2t^2)) + **c**^{ste}

b) $\int_2^4 \boldsymbol{R}(t)dt$ = [(t^3 – $\frac{1}{2}$t), (2t – 3t^2), – (2t^2)] $|_2^4$ = (50, – 32, – 24)

6.2) Integriert man jede Komponente einzeln :

$\int_0^{\pi/2}(3\sin(u), 2\cos(u))du = \left(\left(\int_0^{\pi/2} 3\sin u\, du\right), \left(\int_0^{\pi/2} 2\cos u\, du\right)\right) =$

$\left((-3\cos u)|_0^{\frac{\pi}{2}}, (2\sin u)|_0^{\frac{\pi}{2}}\right)$ = (3, 2)

6.3) a)$\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B}$ = 2t^3 + 6t^2 – 6t → $\int_0^2(\boldsymbol{A}\cdot\boldsymbol{B})dt = \int_0^2(2t^3 + 6t^2 - 6t)dt = \left(\frac{1}{2}t^4 + 2t^3 - 3t^2\right)|_0^2 = 12$

b) $\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B}$ = (– 6t^3, (2t^3 – 8t^2), 2t^4) → $\int_0^2(\boldsymbol{A}\times\boldsymbol{B})dt = \int_0^2(-6t^3,\ (2t^3 - 8t^2),\ 2t^4)dt =$ $\left(-\frac{3}{2}t^4,\ \left(\frac{1}{2}t^4 - \frac{8}{3}t^3\right),\ \frac{2}{5}t^5\right)|_0^2 = \left(-24,\ -\frac{40}{3},\ \frac{64}{5}\right)$

6.4) Man bestimmt zuerst **v**. Mit $\mathbf{v} = \int \mathbf{a}dt$ und **a** = (0, -g, 0), erhält man :

$\mathbf{v} = -\int(0, g, 0)dt = (0, -gt, 0) + \boldsymbol{c}$, **c** entspricht der Integrationskonstante. Gegeben ist v(t=0) = ($v_0\cos\theta_0$, $v_0\sin\theta_0$), woraus wir die Integrationskonstante bestimmen

→ **v** = ($v_0\cos\theta_0$, ($v_0\sin\theta_0$ – gt))

Um **r** zu bestimmen, integriert man noch einmal $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt$ → $\mathbf{r} = \int\left(v_0\cos\theta_0, (v_0\sin\theta_0 - gt)\right)dt = \left((v_0\cos\theta_0 t), \left(v_0\sin\theta_0\, t - \frac{1}{2}gt^2\right)\right) + \boldsymbol{c}$; weil **r**(t = 0) = 0, c = 0

→ **r**= ($v_0\cos(\theta_0)t$, ($v_0\sin(\theta_0)t - gt^2/2$))

6.5) Mit $\mathbf{v} = \int \mathbf{a}dt$ et que **a** = (e^{-t}, – 6(t + 1), 3sin(t)), erhält man:
$\mathbf{v} = -\int\left(e^{-t}, -6(t\ +\ 1), 3\sin(t)\right)dt = (-e^{-t}, -(3t^2+6t), -3\cos t) + \boldsymbol{c}$, c ist die Integrationskonstante. Gegeben ist **v**(t = 0) = 0, somit ergibt sich c = (1, 0, – 3)
→ $\mathbf{v} = \left((1-e^{-t}), -(3t^2+6t), (3-3\cos t)\right)$
Um **r** zu bestimmen, integriert man noch einmal $\mathbf{r} = \int \mathbf{v}dt$ → $\mathbf{r} = \int\left((1-e^{-t}), -(3t^2+6t), -(3-3\cos t)\right)dt = \left((t+e^{-t}), -(t^3+3t^2), (3t-3\sin t)\right) + \boldsymbol{c}$; gegeben ist **r**(t=0) = 0, somit c = (–1, 0, 0)
→ $\mathbf{r} = \left((t-1+e^{-t}), -(t^3+3t^2), (3t-3\sin t)\right)$

6.6) Mit $W_{a\to b} = \int_a^b \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$, hat man $W_{(0,0,0)\to(1,1,1)} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}[(3x^2+6y), -14yz, 20xz^2]\cdot(dx, dy, dz) = \int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)}[(3x^2+6y)dx - 14yzdy + 20xz^2dz]$

a) Wenn x = t, y = t^2 et z = t^3, so erhält man für t=0 und t=1 die Punkte (0, 0, 0) und (1, 1, 1), somit:
$\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} = \int_0^1(3t^2+6t^2)dt - 14(t^2)(t^3)d(t^2) + 20t(t^3)^2d(t^3) = \int_0^1 9t^2dt - 28t^6dt + 60t^9dt = [3t^3 - 4t^7 + 6t^{10}]\,_0^1 = 5$

b) Entlang der Geraden von (0, 0, 0) bis (1, 0, 0), y = 0, z = 0, dy = 0, dz = 0 währenddem x von 0 bis 1 variiert. Für das Integral $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ erhält man :
$\int_{(0,0,0)}^{(1,0,0)}\left[\left(3x^2+6(0)\right)dx - 14(0)(0)(0) + 20x(0)^2(0)\right] = \int_{x=0}^{1} 3x^2dx = x^3|\,_0^1 = 1$
Von (1, 1, 0) bis (1, 1, 1), x = 1, y = 1, dx = 0, dy = 0 währenddem z von 0 bis 1 variiert.
Für das Integral $\int_{(0,0,0)}^{(1,1,1)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r}$ erhält man :
$\int_{(1,1,0)}^{(1,1,1)}\left[\left(3(1)^2+6(1)\right)0 - 14(1)z(0) + 20(1)z^2dz\right] = \int_0^1 20z^2dz = \frac{20z^3}{3}|\,_0^1 = \frac{20}{3}$