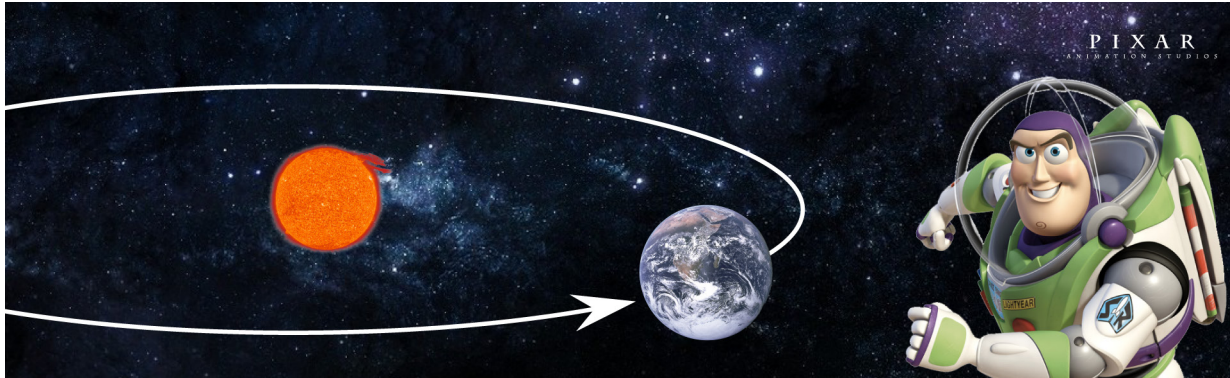


Serie 13: Polarkoordinaten & Kursübersicht

Ziele der Serie :

- 1) Wiederholen der physikalischen Konzepte, die dieses Semesters behandelt wurden.
- 2) Lösen von komplexen kinematischen Aufgaben mit Hilfe der im Kurs erlernten Hilfsmitteln.

Üb. 1. Bis zur Unendlichkeit und noch viel weiter!



Im Kurs wurde bereits erwähnt, dass die Planeten elliptische Bahnen mit dem Massenzentrum des Sonnensystems in einem der Brennpunkte der Ellipse beschreiben. In dieser Aufgabe vernachlässigen wir die gegenseitige Anziehung der Planeten. Der Ursprung unseres polaren Koordinatensystems befindet sich im Massenzentrum des Sonnensystems. Die Bahn eines Planeten kann dann anhand der folgenden elliptischen Gleichung als Funktion der zwei Koordinaten r und θ - der Radius und der Winkel zum Ursprung - ausgedrückt werden:

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e \cos(\theta)}$$

wobei p das Ellipsen-Parameter ist und e die Exzentrizität (positiv definiert).

M_{Sonne}	$1.989 \cdot 10^{30} \text{ kg}$
M_{Erde}	$5.972 \cdot 10^{24} \text{ kg}$
R_{Erde}	6371 km
Winkel zwischen $\vec{\Omega}_{\text{orbital}}$ und $\vec{\omega}_{\text{rotation}}$ der Erde	$23^\circ 26'$

- a) Zeigen Sie, dass für jede zentrale Bewegung der Drehimpuls erhalten bleibt. Eine Bewegung eines Objekts ist zentral zum Zentrum O, wenn zu jedem Zeitpunkt die Kraft, die auf dies Objekt wirkt, parallel zum Positionsvektor $\vec{OP}$ ist.
- b) Drücken Sie den Betrag des Bahndrehimpulses der Erde als Funktion des Radius seiner Umlaufbahn r und der Winkelgeschwindigkeit $\frac{d\theta}{dt}$ (das wir als $\dot{\theta}$ schreiben um die Notation zu vereinfachen) aus. Ist es konstant? Welches astronomische Gesetz beschreibt dies?
- c) Am 6. Juli, befindet sich die Erde ($m = 5,9736 \cdot 10^{24} \text{ kg}$) 152 097 701 km vom Massenzentrum des Sonnensystems entfernt (an einem Extrempunkt des Radius der Umlaufbahn). Die Bahngeschwindigkeit

beträgt 29 291 m/s. Erstellen Sie eine Skizze der Situation. Ist die Erde am weitesten von der Sonne entfernt (Aphel), oder am nächsten (Perihel)?

- d) Wir möchten die elliptische Umlaufbahn der Erde beschreiben um die Bahngeschwindigkeit am Perihel zu bestimmen (6. Januar). Welche physikalischen Variablen sind nötig um die Umlaufbahn zu beschreiben? Wir erinnern uns, dass die Beschleunigung in Polarkoordinaten entlang der Einheitsvektoren $\hat{e}_r$ und $\hat{e}_\theta$ durch die folgenden Gleichungen gegeben ist:

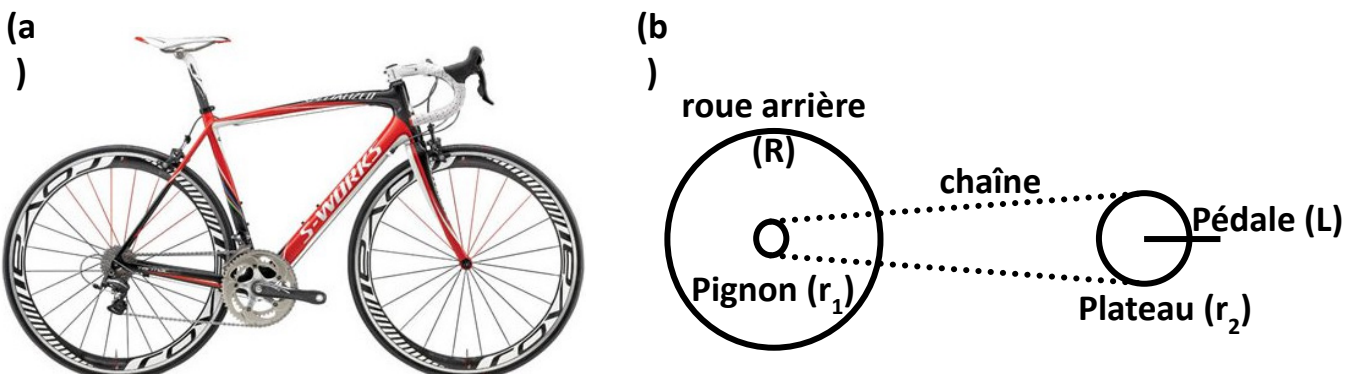
$$\begin{cases} a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 \\ a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} \end{cases}$$

Mit der neu eingeführten Notation $\ddot{x} = \frac{d^2}{dt^2}x$ und $\dot{x} = \frac{d}{dt}x$.

- i) Zeigen Sie zunächst, dass $\dot{r} = -\frac{C}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right)$ wobei C der Bahndrehimpuls der Erde ist und m die Erdmasse. Wir benutzen dazu die Gleichung $\frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt}$.
- ii) Zeigen Sie jetzt, dass $\ddot{r} = -\frac{C^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$

- e) Bestimmen Sie die Bahnbewegungsgleichung der Erde an ihrer Aphel und bestimmen Sie dann die Parameter p und e der elliptischen Bahn der Erde als Funktion der Parameter des Problems.
- f) Bestimmen Sie die Bahngeschwindigkeit der Erde und den Abstand zum Massenzentrum des Sonnensystems am Perihel. (Lösungen für d) und e), $p = 1.4954 \cdot 10^{11} [m]$ und $e = 0.016815$)
- g) Man möchte eine Sonde starten um das Weltall jenseits unseres Sonnensystems zu erkunden. Bestimmen Sie die minimal benötigte Geschwindigkeit damit die Sonde aus dem Sonnensystem fliehen kann.
- h) Um die Kosten zu minimieren möchte man den Start optimieren und die schwächste mögliche Schubkraft benutzen (Gewinn an Größe und Kraftstofftreibmittel). Mit den gegebenen Informationen bestimmen Sie die den geographischen Ort, die Richtung und den Tag und die Stunde an dem der Start am besten ist. Machen Sie eine Skizze und berechnen Sie dann die minimale Geschwindigkeit der Sonde beim Start von der Erde.

Üb. 2. Die Jugend rollt !



Betrachten wir das Fahrrad in Bild a) dessen System Pedal-Kettenblatt-Ritzel-Rad als Modell in (b) abgebildet ist. R , r_1 und r_2 sind die Radien des Hinterrads, des Ritzels (*pignon*) und des Kettenblatts (*plateau*) und L die Länge des Pedals. Nehmen Sie an, dass das Massenzentrum des Fahrrads auf der Ebene der Achse des Kettenblatts situiert ist. Nehmen wir gleichermaßen an, dass die Masse des Fahrrads m_v und des Fahrradfahrers m_p gleich auf beiden Rädern verteilt ist.

$$a = \frac{R \cdot FL \left(\frac{r_1}{r_2} \right)}{2I + MR^2}$$

Wobei I das Trägheitsmoment eines Rades (Vorder- oder Hinterrad) ist und M die gesamte Masse des Fahrrads und Fahrradfahrers ($m_v + m_p$). F ist die Kraft des Fahrradfahrers auf das Pedal, wenn es in der Horizontalen ist. Welche Werte muss man für r_1 und r_2 wählen, damit die Beschleunigung maximal ist?

- iv) Der Fahrradfahrer fährt jetzt mit konstanter Geschwindigkeit. Zeigen Sie, dass die Geschwindigkeit des Pedals v_p und des Fahrrads v_v folgendermaßen ausgedrückt werden kann:

$$\frac{v_p}{v_p} = \frac{r_1}{r_2} \frac{L}{R}$$

Welche Werte muss man für r_1 und r_2 wählen um die konstante Geschwindigkeit des Fahrrads mit der kleinstmöglichen Anstrengung beizubehalten?

- v) Der Fahrradfahrer fährt jetzt mit Geschwindigkeit v und will eine Kurve mit Radius R_v machen und dabei einen Winkel θ annehmen (Winkel zwischen dem Fahrradfahrer und der Vertikalen). Welche Kräfte wirken auf den Fahrradfahrer? Erklären Sie warum die Beziehung $\tan(\theta) = f/F_N$ während der Kurve beibehalten werden muss (f : Reibungskraft; F_N : Stützkraft).

The diagram illustrates a mechanical system with a central mass and two side masses. The central mass is a green oval with a center of mass (CM) and a mass M . It is supported by a horizontal bar of length d that connects to two side masses, represented by gray rectangles. The left side mass has a mass m and a center of mass (CM) at a distance l_x from the central mass. The right side mass has a mass m and a center of mass (CM) at a distance l_x from the central mass. The system is subject to various forces and torques: a horizontal force F_{fg} and a vertical force F_{ng} act on the left side mass; a horizontal force F_{fd} and a vertical force F_{nd} act on the right side mass; a vertical force Mg acts on the central mass. The angular velocities of the system are denoted by ω_x (horizontal rotation) and ω_z (vertical rotation). The angular momentum of the system is given by $L_x = \omega_x I_x$.

Wir möchten die Normalkräfte kennen die auf die linken und rechten Reifen wirken, wenn ein Auto um eine Kurve fährt ohne sich umzudrehen! Die Gesamtmasse des Wagens ist M , die Reifen haben einen Radius R , und jeder Reifen eine Masse m und Trägheitsmoment I_x . Wir nehmen an, dass die Reifen Kontakt mit der Straße haben und an einem Punkt mit Abstand d vom Massenzentrum des Wagens sind, der sich mit Abstand R vom Boden befindet.

- a) Das Auto in der Skizze fährt vorwärts. Sehen wir es von hinten oder vorne? Dreht es nach rechts oder links? Wie groß ist die Geschwindigkeit des Massenzentrums? Drücken Sie die Geschwindigkeit des Massenzentrums als

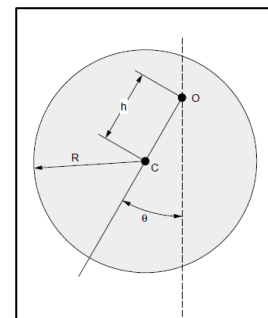
Funktion von ω_x aus. Drücken Sie die Geschwindigkeit des Massenzentrums als Funktion von ω_z und R_v aus (Wir nehmen an, dass ω_x links und rechts gleich ist.)

- Finden Sie die Bewegungsgleichungen des Massenzentrums.
- Evaluieren Sie die präsenten Kräftepaare. Welche Bedingung muss wirken damit sich das Auto nicht lateral überschlägt?
- Jetzt gibt es statische Reibung mit $F_f = \mu F_N$. Berechnen Sie die Normalkräfte auf die Reifen links und rechts als Funktion von v_{CM} und von I_x .
- Für einen gegebenen Radius R_v , bei welcher Maximalgeschwindigkeit v_{CM} dreht sich das Auto lateral um? Gibt es einen Unterschied zwischen Wendungen nach links und rechts?

Gegeben: $M=1000\text{kg}$, $m=70\text{kg}$, $d=1.2\text{m}$, $R=0.6\text{m}$ (gefüllte Scheiben für I_x) $R_v=40\text{m}$ (links und rechts).

Üb. 4. Eine Scheibe und gedämpfte Schwingungen

Eine Scheibe mit Radius $R = 20\text{ cm}$ und Masse $m = 400\text{ g}$ hängt an einer Achse die durch den Punkt O geht. Die Entfernung zwischen O und dem Zentrum der Scheibe C ist gleich $h = 3R/4$. Wir nehmen zunächst an dass die Scheibe ohne Reibung schwingen kann (i.e. ohne Dämpfung) um die Achse die durch O geht.



- Berechnen Sie (mit vier signifikanten Stellen) die Eigenfrequenz ω_0 und die Schwingungsperiode T_0 des Pendels für Schwingungen um die Achse durch den Punkt O .

Wir nehmen jetzt an dass die Schwingungen der Scheibe gedämpft sind wegen der Reibungskraft der Scheibe und der Achse. Wir stoßen die Scheibe an, sodass OC am Anfang einen Winkel $\theta_0 = 16^\circ$ mit der Vertikalen formt. Die Scheibe schwingt frei und nach $\Delta t = 10\text{ s}$, hat sich die Schwingungsamplitude auf 6° verkleinert. Die Dämpfungskraft ist proportional zu $\frac{d\theta}{dt}$ und die Evolution des Winkels θ ist geschrieben durch $\theta(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega' t)$.

- Finde die Dämpfungskonstante α .
- Berechnen Sie die Pulsation ω' sowie die Periode T_0 , wenn es angenommen wird, dass $T_0 \approx \text{Konstante}$.
- Finden Sie die Zeit die notwendig ist damit die Schwingungsamplitude (i.e. $\theta_0 e^{-\alpha t}$) 10 mal kleiner ist als am Anfang.

Tip: Benutzen Sie den Steinerschen Satz $I_0 = I_C + md^2$ um den Trägheitsmoment I_0 zu berechnen.

Weihnachts-Special: «Ein Butterbrot landet immer auf der Butterseite»

Murphy's Law: zuerst formuliert in 1949 von Edward A. Murphy Jr., Captain der U.S. Air Force:

„If it can go wrong, it will go wrong.“

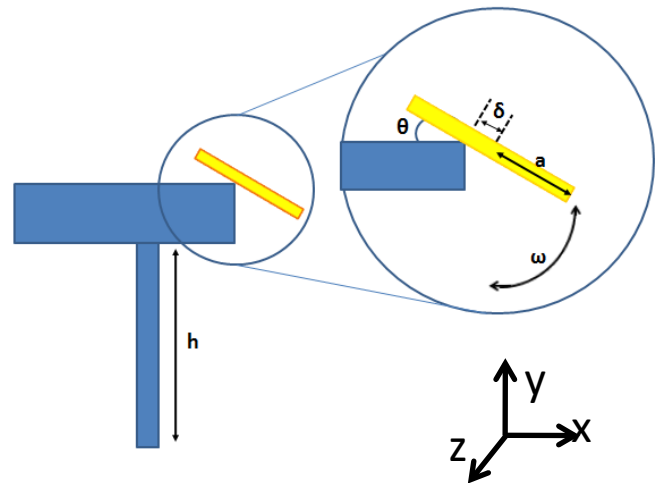
Eine der bekanntesten Fälle ist das Butterbrot-Gesetz:

Wenn ein Butterbrot hinfällt, landet es immer auf der Butterseite.

Betrachten wir die folgende Situation (siehe links) mit einem Butterbrot (von einer Seite mit Butter beschmiert), das am Rand des Tisches im Gleichgewicht ist. Wir ignorieren wie das Butterbrot in diese üble Situation geraten ist und nehmen an, dass es keine horizontale Bewegung gibt.

Das Butterbrot hat eine Länge von 10cm.

- 1) Welche Kräfte wirken auf dem Butterbrot. Was ist die Reibungskraft. Bestimmen Sie die Rotationsgleichung.
- 2) Finden Sie eine Gleichung für die Winkelgeschwindigkeit. Wir definieren $\eta = a/\delta$ (Tipp: Multiplizieren Sie mit 2ω und integrieren Sie über t um die Differentialgleichung zu lösen).
- 3) Stellen Sie die Bedingung auf, damit das Brot auf die nicht beschmierte Seite fällt. Wir betrachten den Fall wo das Butterbrot nicht fällt es sei denn $\theta = \pi/2$. Berechnen Sie die minimale Höhe wo das Brot nicht auf die Butterseite fällt. Stimmt Murphy's law?



In Experimenten wurde gezeigt dass $\eta=0.015$ für ein Butterbrot.