Test der Mathematikkenntnisse

- Das Ziel dieses Tests ist es, Ihnen eine Standortbestimmung Ihrer Mathekenntnisse/-Fähigkeiten zu ermöglichen.
- Die Lösungen können Sie selber runterladen, wir empfehlen Ihnen sehr, diese erst zu konsultieren, nachdem Sie die Probleme selber versucht haben, z. Teil mehrfach.
- Sie führen die Korrektur selbst durch und diskutieren mögliche Fragen/Aktionen mit ihrem Assistenten

---

A. Gleichungen und Gleichungssysteme lösen:

1. Bestimmen Sie F_A und F_B im folgenden Gleichungssystem (z_A, z_B und F sind gegeben):

$$z_A F_A + z_B F_B = 0$$
$$F_A + F_B = F$$

2. Bestimmen Sie die Lösungen $x_{1,2}$ der folgenden Gleichung (F und C sind gegeben):

$$Fx^2 + Cx = 0$$

3. Bestimmen Sie $\Delta y>0$ (D und L sind gegeben):

$$\frac{\Delta y^2}{2} = D(L + \Delta y)$$

4. Lösen sie nach v auf:

$$m_1 g x_1 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2}$$

5. Bestimmten Sie $y(x)$, indem Sie aus $x(t)$ und $y(t)$ die Variable t eliminieren:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2 \quad (1)$$

$$x(t) = v_{0x} t + x_0 \quad (2)$$

6. Bestimmen Sie aus den beiden folgenden Gleichungen ϕ in Funktion von h und d :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{v_0^2 \sin\phi \cos\phi}{g}$$

7. Lösen Sie das Gleichungssystem nach v_0' und v_f' auf (v_0, m und M sind gegeben):

$$M v_0 = M v_0' + m v_f' \quad (1)$$

$$\frac{M v_0^2}{2} = \frac{M v_0'^2}{2} + \frac{m v_f'^2}{2} \quad (2)$$

B. Einheiten umrechnen:

1. 72 km/h = _____ m/s
2. 52 m/s = ______km/h
3. 2400 GWh = ______ J

4. $9\ 10^{16}$ J = _____ GWh
5. 45^0 = ______ rad
6. $\frac{\pi}{3}$ rad = ____ ^{0}
7. 5.25 U/min = _____rad/s (U = Umdrehungen)
8. $\frac{24\,\pi}{6}$ rad/s= _____ U/min

C. Ableitungen von Funktionen bestimmen:

1. $f(x) = \frac{1}{2}kx^2$_______________ 2. $f(t) = \cos\omega t$ _______________ 3. $f(t) = \sin\omega t$_______________

4. $f(x) = \sin^2 x$_______________ 5. $f(x) = 2x$ _______________ 6. $f(x) = 1$ _______________

7. $a(t) = 2$ _______________ 8. $x(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t$____________ 9. $x(\phi) = \cos\phi$________ _______

10. $x(\phi) = \sin\phi$_______________

Leiten Sie zwei Mal ab**:**

1. $x(\phi) = \sin\phi$ _______________ 2. $x(\phi) = \cos\phi$ _______________ 3. $f(t) = \cos\omega t$ _______________

4. $r(t) = \sin\omega t$_______________ 5. $g(y) = 2y$ _______________ 6. $x(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t$ ___________

D. Stammfunktionen bestimmen:

1. $f(x) = 1$_______________ 2. $h(t) = 2t$_______________ 3. $a(t) = 2$ _______________

4. $f(z) = z^2$ _______________ 5. $f(z) = z^3$_______________ 6. $f(x) = \frac{1}{x}$ _______________

7. $f(x) = \cos x$ _______________ 8. $f(x) = \sin x$ _______________ 9. $v(m) = k\frac{1}{m}$_______________

10. $x(\phi) = \cos\phi$_______________ 11. $x(\phi) = \sin\phi$_______________ 12. $f(x) = \sin^2 x$_______________

13. $f(x) = \cos(2x)$ ___________ 14. $h(t) = 3t^2\exp(2t^3)$_________ 15. $j(r) = \frac{-\cos(3r)}{\sin(3r)}$ _____________

Integrieren Sie zwei Mal:

1. $f(t) = g$ _______________ 2. $f(x) = 2x$ _______________ 3. $f(z) = z^2$ _______________

4. $f(z) = z^3$ _______________ 5. $f(x) = \cos x$_______________ 6. $f(x) = \sin x$_______________

7. $x(\phi) = \cos\phi$_______________ 8. $x(\phi) = \sin\phi$

E. Berechnung von bestimmten Integralen :

1. $\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi$ _______________ 2. $\int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi$ _______________ 3. $\int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi$_______________

4. $\int_{v_1}^{v_2} mvdv$ ____________________ 5. $\int_0^T gtdt$ ______________________ 6. $k\int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{m}dm$ ____________________

7. $\int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi$ _________________ 8. $\int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi$ __________________ 9. $\frac{\int_0^h z^3dz}{\int_0^h z^2dz}$ ______________________

10. $\int_0^R 2rR\sin\phi dr$, wobei $r(\phi) = R\cos(\phi)$

F. Berechnungen am rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck:

1. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit einem rechten Winkel in der Ecke *A*, einem Winkel von 36° in der Ecke *B* und einer Seite *AC* mit der Länge 30 cm.
   Bestimmen Sie den Winkel in der Ecke *C*.
   Bestimmen Sie die Länge der Seite *AB*.
   Bestimmen Sie die Länge der Seite *BC*.

2. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit einem rechten Winkel in der Ecke *A*, einem Winkel von 56° in der Ecke *B* und einer Seite *AC* mit der Länge 34 cm.
   Bestimmen Sie die Länge der Seite *AB*.

3. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck *ABC* mit einem Winkel von 60° in der Ecke von *A* und einer Seite *AB* mit der Länge 5 cm.
   Bestimmen Sie die Längen der Seite *AC* und *BC* sowie die beiden Winkel in den Ecken *B* und *C*.

G.Trigonometrie

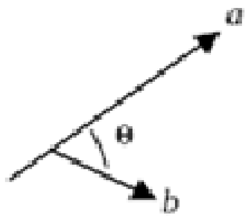
1. Linearisieren Sie: $\cos^2(t) + 2\sin^2(t)$

2. Vereinfachen Sie : $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

3. Ersetzen Sie h durch $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und schreiben Sie den Ausdruck in Funktion von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:
   $\frac{(1-h^2+2h)}{1+h^2}$

H. Vektoroperationen

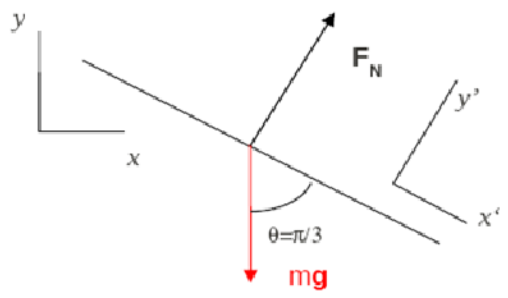
1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Vektoroperationen ($\theta = \frac{\pi}{3}$).



   a) $\vec{a} + \vec{b}$ (nur graphische Lösung) b) $\vec{a} - \vec{b}$ (nur graphische Lösung)

   c) $\vec{a} \times \vec{b}$ d) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e) $\vec{a} \cdot \vec{a}$

2. Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren **mg** und **F_N** im *xy*- und im *x'y'*-Koordinatensystem.



3. Wie gross ist der Betrag des Vektors $\frac{\vec{r}}{r}$?

4. Für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ gilt : $\mathrm{v_1}^2 + \mathrm{v_2}^2 = \mathrm{v_1}^2 + \mathrm{v_2}^2 - 2\mathrm{v_1}\mathrm{v_2}\cos\theta$

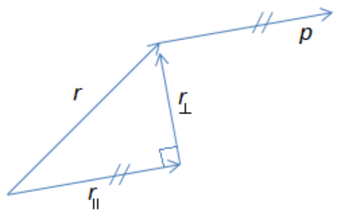
   Welche möglichen Lösungen ergeben sich daraus für $\mathbf{v_1}$ und $\mathbf{v_2}$ und den Winkel θ?

5. Was gilt für die beiden Vektoren, die die folgende Gleichung erfüllen : $(\vec{a} \times \vec{b}) = (\vec{b} \times \vec{a})$

6. Berechnen Sie den folgenden Ausdruck: $\vec{a} \cdot (\vec{a} \times \vec{b})$

7. Zeigen Sie: $(\vec{r} \times \vec{p}) = (\vec{r}_\perp \times \vec{p})$

   Beachten Sie : $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$



8. Was kann man über den Betrag eines Vektors sagen, für den der folgende Ausdruck gilt: $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \vec{\omega} \times \vec{r}$ (ω ist konstant)

   (Idee : bestimmen Sie dazu die Ableitung von r^2)

9. Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{dt}^2} \cdot \frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}$ unter Berücksichtigung des Ausdrucks in Aufgabe 8

10. Gegeben sind im 3 dim-Raum die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ mit $\vec{v}$ =(-1, 2, 3) ; $\vec{w}$ = (2, -2, 3) ; $\vec{z}$ = (2, 1, -5)

    a) Berechnen Sie die beiden Skalarprodukte:
    $\vec{v} \cdot \vec{w}\ et\ \vec{z} \cdot \vec{v}$
    b) Berechnen Sie die beiden Vektorprodukte:
    $\vec{v} \times \vec{w}\ et\ \vec{z} \times \vec{v}$

11. Gegeben sind im 3 dim-Raum die beiden Vektoren $\vec{p}$ = (-1t+3,2t,3) ; $\vec{m}$ = (2t,0,3t)

a) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{z} = \vec{p} \times \vec{m}$.
b) Berechnen Sie für $t = 5$ die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Vektors $\vec{z}$ sowie die Schnelligkeit (Betrag von $\vec{v}$)
c) Berechnen Sie die Beschleunigung für $t = 5$.

12. Gegeben sind die drei Einheitsvektoren im 3-dim Raum : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$
    a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene verläuft, die von $\vec{a} = (2\,, -6\ \,, -3\,)$ und $\vec{b} = (4\,, 3\,, -1)$ aufgespannt wird.
    b) Normieren Sie den Vektor $\vec{n}$.

13. Gegeben ist der Vektor der Beschleunigung eines Objekts: $\vec{A} = (2\,\mathrm{t}\,, 3, 0)$. Bestimmen Sie daraus den Ortsvektor.

I. Verschiedene fortgeschrittene Themen

1. Umrechnung Polarkoordinaten – kartesische Koordinaten

Vektor	Polarkoordinaten (r,θ)	Kartesische Koordinaten (x,y)
$\vec{v}$	4, $\pi/3$	__ , __
$\vec{w}$	__ , __	5, 6
$\vec{z}$	-2, 6 π	__ , __
$\vec{x}$	__ , __	-4, -9

2. Ableitungen von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{A} = 5t^2\,\vec{\imath} + t\,\vec{\jmath} - t^3\,\vec{k}$ und $\vec{B} = \sin(t)\,\vec{\imath} - \cos(t)\,\vec{\jmath}$

a) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$

b) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{A})$

c) Berechnen Sie die Ableitung $\vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt}$ der Komponenten des Vektors $\vec{z} = (3t^2+2, -4t, \cos(2t))$.

3. Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die Funktion y, Lösung der folgenden Differentialgleichung:

a) $y'\cos(2x^3) = 3yx^2\sin(2x^3)$

b) $y'\exp(x^4) = yx^3\exp(x^4)$

4. Integrale von Vektoren

Bestimmen Sie den Ortsvektor, wenn der Beschleunigungsvektor gegeben ist : $\vec{A} = (3t, 2t^2, 0)$

5. Umformungen und Vereinfachungen

a) Formen Sie den folgenden Ausdruck um und vereinfachen Sie ihn für $R/d \ll 1$: $\frac{1}{(d+R)^2} - \frac{1}{d^2}$

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für v_1, ausgehend von der Gleichung: $\frac{c-v_1}{c+v_1} = \frac{(c-v_1^*)\times(c-v_0)}{(c+v_1^*)\times(c+v_0)}$

c) Wir betrachten die Näherung $sin\alpha = \alpha$, bei welchem Winkel α (in Radian und in Grad) ist der relative Fehler der Näherung grösser als 5 %, bei welchem Winkel ist er grösser als 10 %.
Skizzieren Sie α, $\sin\alpha$ und den relativen Fehler.