

Lösungen #9 : Impuls und Stöße

Üb 1 : Eishockey

a) Das System ist abgeschlossen, es wirken keine Kräfte von aussen ein $\Rightarrow$ Impulserhaltung:

$$\vec{P}_{initial} = \vec{P}_{final} \Leftrightarrow m_1 v_1 - m_2 v_2 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \Rightarrow v_2' = \frac{m_1(v_1 - v_1')}{m_2} - v_2$$

$$\left. \begin{aligned} m_1 &= \frac{756N}{9,8m \cdot s^{-2}} = 77Kg \\ m_2 &= \frac{900N}{9,8m \cdot s^{-2}} = 92Kg \end{aligned} \right\} \Rightarrow v_2' = 3,8m \cdot s^{-1}$$

$$b) \Delta E_c = E_{c_{finale}} - E_{c_{initiale}} = \left(\frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2\right) - \left(\frac{1}{2}m_1 v_1^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2^2\right) = \frac{1}{2}m_1(v_1'^2 - v_1^2) + \frac{1}{2}m_2(v_2'^2 - v_2^2) = -6800J$$

c) i) Die beiden Spieler haben das gleiche Gewicht und die gleiche Geschwindigkeit mit entgegengesetzter Richtung, somit ist der gesamte Impuls: $p = mv_i + m(-v_i) = 0$ und die kinetische Energie $K = mv_i^2$. Bei einem vollkommen elastischen Stoss bleiben Impuls und Energie erhalten, somit bewegen sich beide Spieler mit der gleichen Geschwindigkeit wie vor dem Stoss, aber in entgegengesetzter Richtung: $v_i = -v_f$. Bei einem vollkommen unelastischen Stoss bleibt nur der Impuls erhalten und die beiden Spieler bewegen sich zusammen weiter. Somit würden sie nach dem Zusammenstoss stillstehen und die gesamte kinetische Energie hätte sich in Wärme umgewandelt.

ii) Der gesamte Impuls ist $p = mv_i + 0$, beim elastischen Stoss übernimmt der zweite Spieler die Geschwindigkeit des ersten, der erste bewegt sich nach dem Zusammenstoss nicht mehr. Beim unelastischen Stoss bewegen sich die beiden Spieler nach dem Stoss mit der gemeinsamen Geschwindigkeit $v_f = v_i/2$ weiter.

$\rightarrow$ Siehe slide 8 – Vorlesung 8 oder slide 9 – Vorlesung 9

Üb 2 : Bowling

a) Impulserhaltung :

$$\text{x-Achse : } 0 = -MV' \sin \theta + mv' \sin \alpha \quad (1)$$

$$\text{y-Achse : } MV + 0 = MV' \cos \theta + mv' \cos \alpha \quad (2)$$

Energierhaltung :

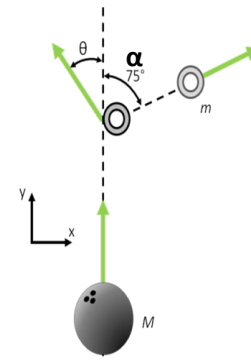
$$\frac{1}{2}MV^2 = \frac{1}{2}MV'^2 + \frac{1}{2}mv'^2 \quad (3)$$

3 Gleichungen mit 3 Unbekannten, V' , v' und $\theta \Rightarrow$ Wir müssen das folgende Gleichungssystem lösen:

$$\begin{cases} -\frac{M}{m}V' \sin \theta + v' \sin \alpha = 0 & (1) \\ \frac{M}{m}V' \cos \theta + v' \cos \alpha - \frac{M}{m}V = 0 & (2) \\ \frac{M}{m}V'^2 + v'^2 - \frac{M}{m}V^2 = 0 & (3) \end{cases}$$

$$\text{Aus (3) folgt : } v'^2 = \frac{M}{m}(V^2 - V'^2) \quad (4)$$

Wir verwenden den folgenden trigonometrischen Zusammenhang: $\cos^2 \theta + \sin^2 \theta = 1 \quad (5)$



Dazu löst man (1) nach $\sin\theta$ und (2) nach $\cos\theta$ auf :

$$\sin\theta = \frac{mv' \sin\alpha}{MV'} \quad (6) \quad \Rightarrow \quad \sin^2\theta = \frac{m^2}{M^2 V'^2} (v'^2 \sin^2\alpha)$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{M}{m}V - v' \cos\alpha}{\frac{M}{m}V'} \quad (7) \quad \Rightarrow \quad \cos^2\theta = \frac{m^2}{M^2 V'^2} \left(\frac{M}{m}V - v' \cos\alpha \right)^2$$

$$\text{Somit gilt (5): } \frac{m^2}{M^2 V'^2} \left[\left(\frac{M}{m}V - v' \cos\alpha \right)^2 + (v'^2 \sin^2\alpha) \right] = 1$$

$$V'^2 = \frac{m^2}{M^2} \left[\left(\frac{M}{m}V - v' \cos\alpha \right)^2 + (v'^2 \sin^2\alpha) \right]$$

Substitution von V'^2 in (4) gibt:

$$v'^2 = \frac{M}{m} \left(V^2 - \frac{m^2}{M^2} \left[\left(\frac{M}{m}V - v' \cos\alpha \right)^2 + (v'^2 \sin^2\alpha) \right] \right) = \left(-\frac{m}{M}v'^2 + 2Vv' \cos\alpha \right)$$

$$\text{Daraus erhält man } \left(1 + \frac{M}{m} \right) v' - 2 \frac{M}{m} V \cos\alpha = 0, \text{ falls } v' \text{ nicht gleich Null ist.}$$

$$\text{Man erhält somit: } v' = \frac{2}{\left(1 + \frac{m}{M} \right)} V \cos\alpha = 5.6 \text{ m.s}^{-1}$$

$$\text{Mit Gleichung (4) und } V = 13 \text{ m/s erhält man: } V' = 12.8 \text{ m.s}^{-1}$$

b) Mit Gleichung (6) oder (7) erhält man : $\theta = 4.9^\circ$

Üb 3 : Ballistisches Pendel

Man teilt den gesamten Vorgang in zwei Phasen auf : (i) Eindringen des Geschosses in den Holzblock und (ii) Bewegung des aufgehängten Blocks nach rechts oben.

(i) Während der ersten Phase dringt das Geschoss so schnell in den Holzblock ein, dass sich dieser nicht bewegen kann. Die Schnüre, an denen der Holzklotz befestigt ist, bleiben in vertikaler Position, von aussen wirken keine horizontalen Kräfte ein, der Impuls in horizontaler Richtung bleibt erhalten. Es sei V die Horizontalkomponente der Geschwindigkeit des Systems Geschoss-Holzblock kurz nach dem Stoss. Impulserhaltung ergibt:

$$mv = (m + M)V \quad \Rightarrow \quad v = \frac{m + M}{m} V \quad (1)$$

Die kinetische Energie des Systems nach dem Zusammenstoss ist:

$$E_c = \frac{1}{2} (m + M) V^2$$

Die Energie hat beim Zusammenstoss abgenommen. Es handelt sich um einen unelastischen Stoss, d.h. während der ersten Phase bleibt der Impuls erhalten, die Energie jedoch nicht.

(ii) Nach dem Zusammenstoß während der zweiten Phase bewegen sich der Holzblock und das Geschoss zusammen weiter. Die einwirkenden Kräfte sind das Gewicht und die Kräfte in den Schnüren. Während dieser Phase bleibt die Energie erhalten, der Impuls jedoch bleibt nicht erhalten, weil von aussen Kräfte einwirken.

Energieerhaltung :

$$\frac{1}{2}(m+M)V^2 = (m+M)gy \Rightarrow V = \sqrt{2gy} \quad (2)$$

Setzt man (2) in (1) ein, so erhalten wir für die Geschwindigkeit v des Geschosses:

$$\text{Da } y = h \text{ (} h = \text{Maximale Höhe) } \Rightarrow v = \frac{m+M}{m} \sqrt{2gh}$$

Üb 4: Raketenantrieb

a) Im Bezugssystem der Rakete ist die

Treibstoffgeschwindigkeit v_{ex} : $v_{fuel} = v_{Rakete} - v_{ex}$

$$\rightarrow v_{ex} = v_{fusée} - v_{fuel}$$

b) Der Impulserhaltungssatz für das System Rakete-ausgestoßenes Gas lautet:

$$\frac{dP}{dt} = 0 \rightarrow P_{Rakete}(t) + P_{fuel}(t) = P_{Rakete}(t+dt) + P_{fuel}(t+dt)$$

$$m_{Rakete} v_{Rakete} + m_{fuel} v_{fuel} = (m+dm)_{Rakete} (v+dv)_{fusée} + m_{fuel} v_{fuel} + dm_{fuel} (v+dv)_{fuel}$$

man benutzt $v_{ex} = v_{Rakete} - v_{fuel}$, $dm_{Rakete} = -dm_{fuel} = dm$ und vereinfacht die Gleichung:

$$M_{Rakete} = -dmv_{ex} - dmdv_{Rakete}$$

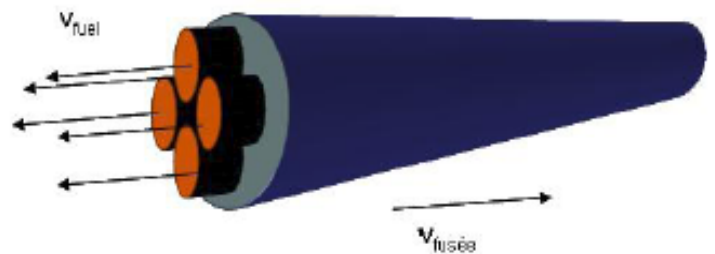
Die Ausdrücke $dmdv_{Rakete}$ und $dmdv_{fuel}$ sind klein im Vergleich zu den beiden anderen, somit kann man sie vernachlässigen. Man erhält:

$$\frac{dv_{Rakete}}{v_{ex}} = -\frac{dm}{m}$$

Durch Integration zwischen (für die Rakete): $v_{Anfang} = 0$ und v_{Ende} sowie m_{Anfang} und m_{Ende} :

$$\frac{1}{v_{ex}} (v_{Ende} - 0) = -(\ln m_{Ende} - \ln m_{Anfang})$$

$$v_{Ende} = 1.08 v_{ex}$$



Ex 5: Starwars

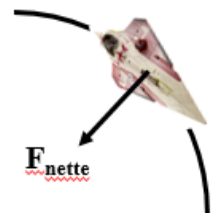
a. Für die Schwerebeschleunigung auf dem Mars erhält man: $g_M = G \cdot M / (R_M^2) \approx 0.35g$.

Der minimale notwendige Gasdurchfluss erhält man mit Newtons zweitem Axiom:

$$m_0 \cdot g_M = dm_{gaz}/dt \cdot v_{rel} \rightarrow dm_{gaz}/dt \approx 6.87 \text{ kg/s}$$

b. Die resultierende Kraft wirkt in Richtung Zentrum des Kreises (siehe Abbildung). Der Betrag lautet: $F_{Nette} = m(t) \cdot v^2 / R$ (Achtung! Die Masse des Starfighters ändert sich im Laufe der Bewegung). Für diese Bewegung benötigt Luke Skywalker die Zeit $t = \pi/2/\omega$ wobei $\omega = v/R \rightarrow t_{op} \approx 15.7s$

c. Laut Newtons zweitem Axiom kann man folgendes schreiben: $-dm/dt \cdot v_{rel} = m(t) \cdot v^2 / R$



(das negative Vorzeichen vor dm/dt entspricht der Abnahme der Masse des Starfighters im Laufe der Zeit

$dm/dt = -dm_{\text{gas}}/dt$). Löst man diese Gleichung auf, somit erhält man: $m(t) = m_0 \cdot e^{-\frac{v^2}{R} \frac{1}{v_{\text{rel}}} t}$

Die Masse des ausgestossenen Gases in der Bahnkurve entspricht $m_0 - m(t_{\text{op}}) \approx 0.27 \cdot m_0 = 2'700\text{kg}$. Die Masse des Fahrzeugs als Funktion der Zeit kann als eine abnehmende Exponentialfunktion betrachtet werden die gleich m_0 ist mit $t=0$ und gleich Null mit $t = \infty$.

Üb. 6 : Einführung in den Drehimpuls

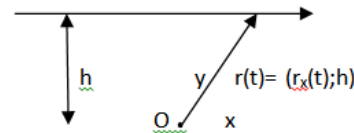
Frei bewegliche Massen:

- a) Man verwendet die Formel für die kinetische Energie einer Punktmasse und die Definition des Drehimpulses:

$$\begin{cases} E_c = \frac{1}{2} m v^2 \\ L = |\vec{L}| = |\vec{r} \times \vec{p}| = r m v \quad (\vec{r} \perp \vec{p} \text{ da es sich um eine Kreisbahn handelt}) \end{cases}$$

Man erhält : $E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} \frac{L^2}{I}$ mit $I = m r^2$

- b) Es ist immer möglich, das Bezugssystem (x,y) so zu wählen, dass die geradlinige Bahn der Punktmasse parallel zur x-Achse verläuft (siehe Skizze). In diesem Bezugssystem gilt für den Drehimpuls:



$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p} = \vec{r}_{\parallel} \times \vec{p} + \vec{r}_{\perp} \times \vec{p} = (0; 0; 0) + (0; h; 0) \times (p; 0; 0) = (0; 0; -hp)$$

Der Drehimpuls bleibt konstant, da er nur von der Komponente senkrecht zur Bewegung h abhängt, die für eine geradlinige Bewegung konstant ist!

Man kann auch mit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{\text{tot}}$ argumentieren. Da keine Kraft und somit kein Drehmoment einwirkt, muss der Drehimpuls konstant bleiben.

- c) Wir bestimmen $\vec{L}$ unter der Voraussetzung, dass gilt: $\vec{p} = \vec{p}_1 = -\vec{p}_2$:

$$\vec{L} = \vec{r}_1 \times \vec{p}_1 + \vec{r}_2 \times \vec{p}_2 = \vec{r}_1 \times \vec{p} - \vec{r}_2 \times \vec{p} = (\vec{r}_1 - \vec{r}_2) \times \vec{p}$$

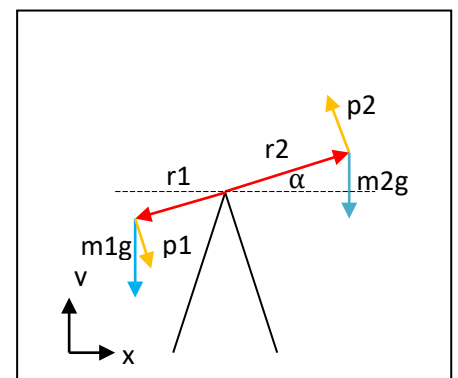
Der Vektor $\vec{r}_1 - \vec{r}_2$ entspricht der Differenz der Positionen der beiden Punktmassen, er und somit auch $\vec{L}$ ist nicht vom Bezugssystem abhängig.

Massen mit einwirkenden Kräften:

- d) Wir berechnen den Drehimpuls der beiden Massen und gehen davon aus, dass die Stange einen Kreis beschreibt und sich die beiden Punktmassen ebenfalls auf einer Kreisbahn bewegen, d.h. $\vec{r} \perp \vec{p}$:

$$\text{Masse } m_1=2m : \quad L_1 = |\vec{L}_1| = |\vec{r}_1 \times \vec{p}_1| = (-r_1) \cdot (-p_1) = \frac{d}{3} 2m \frac{\omega d}{3} = 2m\omega \frac{d^2}{9} \left[\frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}} \right]$$

$$\text{Masse } m_2=m : \quad L_2 = |\vec{L}_2| = |\vec{r}_2 \times \vec{p}_2| = r_2 \cdot p_2 = \frac{2d}{3} m \frac{\omega 2d}{3} = 4m\omega \frac{d^2}{9} \left[\frac{\text{Kg m}^2}{\text{s}} \right]$$



Da $L_1 || L_2$, berechnet man $L_{tot} = L_1 + L_2 = \frac{2}{3} m \omega d^2 \left[\frac{Kg \cdot m^2}{s} \right]$

Wenn die Summe aller einwirkenden Drehmomente gleich Null ist, bleibt der gesamte Drehimpuls erhalten. Gehen wir vom allgemeinen Fall aus, d.h. wir betrachten einen beliebigen Winkel α (Winkel zwischen der Stange und der Horizontalen). Drei Kräfte wirken ein: das Gewicht auf die beiden Massen und die Reaktionskraft auf die Stange im Drehpunkt, wobei nur die Gewichtskräfte einen Beitrag zum gesamten Drehmoment liefern. Da die beiden Gewichtskräfte in der xy-Ebene liegen, haben die Drehmomente nur eine Komponente in z-Richtung. Für den Betrag der beiden Drehmomente gilt (Beachten Sie das Vorzeichen):

Masse $m_1=2m$: $M_1 = |\vec{M}_1| = |\vec{r}_1 \times \vec{m}_1 \vec{g}| = (-r_1) \cdot (-m_1 g) \cos \alpha = \frac{d}{3} 2mg \cos \alpha \text{ [mN]}$

Masse $m_2=m$: $M_2 = |\vec{M}_2| = |\vec{r}_2 \times \vec{m}_2 \vec{g}| = r_2 \cdot (-m_2 g) \cos \alpha = -\frac{2d}{3} mg \cos \alpha \text{ [mN]}$

Somit $M_{tot} = M_1 + M_2 = 0$

Verwendet man das zweite Axiom von Newton :

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{tot}$$

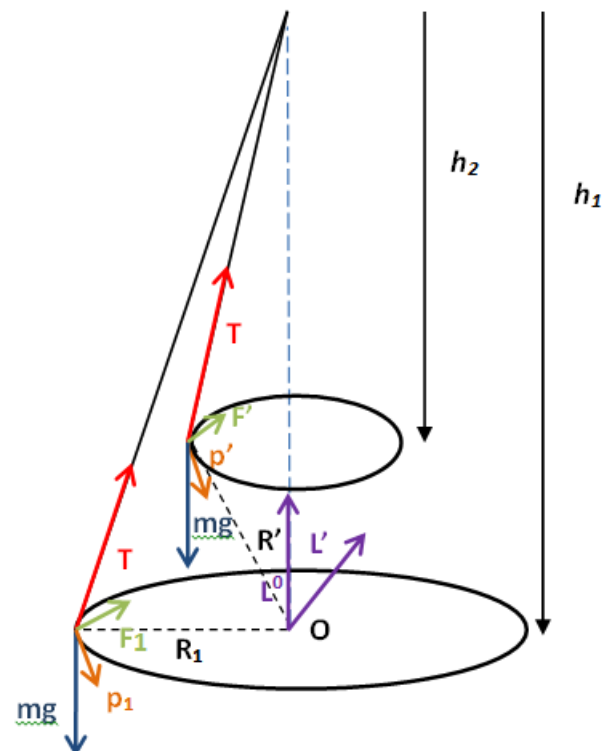
Somit $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{tot} = 0$, L bleibt erhalten !

Üb. 7 : Drehimpuls eines konischen Pendels

- a) Der Drehimpuls bleibt erhalten, weil das Drehmoment immer senkrecht zum Drehimpuls zeigt. Dies folgt aus der folgenden Gleichung, mit der man zeigt, dass der Betrag des Drehimpulses konstant bleibt:

$$\frac{d(\vec{L}^2)}{dt} = 2\vec{L} \cdot \frac{d\vec{L}}{dt} = 2\vec{L} \cdot \vec{\tau} = 0 \Leftrightarrow \vec{L}^2 \text{ cste}$$

Das Rotationszentrum befindet sich bei O. Zu Beginn (Position 1) ist die resultierende Kraft $\vec{F} = \vec{T} + m\vec{g}$ und befindet sich in einer Ebene, die senkrecht zur Kreisbahn verläuft und durch den Punkt O geht. Somit zeigt das Drehmoment $\vec{\tau}_1 = \vec{R}_1 \times \vec{F}$ senkrecht zu $\vec{R}_1$ und $\vec{F}$ (beide liegen ebenfalls in dieser Ebene durch O). $\vec{\tau}_1$ verläuft somit tangential zur Kreisbahn. Zudem gilt: $\vec{L} = \vec{R}_1 \times \vec{p}$. Somit gilt: $\vec{\tau}_1 \parallel \vec{p}$ und $\vec{L}_0 \perp \vec{p} \Rightarrow \vec{L} \perp \vec{\tau}_1 \Rightarrow \vec{L}_0^2 \text{ cste}$.



Jetzt zeigen wir, dass dies immer noch gilt für Position 2, dabei soll es sich um einen beliebigen Punkt zwischen dem Anfang und dem Ende des Ziehens an der Schnur handeln. Auch wenn sich der Winkel bei $\vec{T}$ ändert, so liegt die resultierende Kraft $\vec{F}'$ immer noch in einer Ebene, die senkrecht zur Kreisbahn verläuft und durch den Punkt O geht. Zudem zeigt $\vec{\tau}' = \vec{R}' \times \vec{F}'$ senkrecht zu $\vec{R}'$ und $\vec{F}'$, beide liegen wieder in der

gleichen Ebene durch O. $\vec{\tau}'$ verläuft wieder tangential zur Kreisbahn und $\vec{L}' = \vec{R}' \times \vec{p}'$, d.h. $\vec{L}'$ liegt in einer Ebene, die senkrecht zur Kreisbahnebene verläuft. Somit folgt: $\vec{\tau}' \parallel \vec{p}'$ und $\vec{L}' \perp \vec{p}' \Rightarrow \vec{L}' \perp \vec{\tau}' \Rightarrow \vec{L}'^2 \text{ cste}$.

Da Position 2 ein beliebiger Punkt ist, bleibt der Drehimpuls für jeden Zeitpunkt erhalten.

- b) Nehmen wir an, dass der Radius der Kreisbahn gleich R_2 ist, wenn man aufhört an der Schnur zu ziehen. Es gilt: $R_2 < R_1$. Mit dem Drehimpulserhaltungssatz erhält man:

$$|\vec{R}_1 \times \vec{p}_1| = |\vec{R}_2 \times \vec{p}_2| \Leftrightarrow R_1 p_1 = R_2 p_2$$

Und somit: $p_1 < p_2$, und $\omega_1 = \frac{v_1}{R_1} < \omega_2 = \frac{v_2}{R_2}$.

- c) Da $p_2 > p_1 \Rightarrow E_{c2} > E_{c1}$. Diejenigen Kräfte, die einen Beitrag zur geleisteten Arbeit liefern, sind das Gewicht und die Kraft in der Schnur (T). Man berechnet diese Arbeit A, indem man die gesamte Energieänderung bestimmt: $A = \Delta E_c + \Delta E_p = \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) - mg (h_2 - h_1)$

α ist der Winkel zwischen T und der Vertikalen, h die Vertikaldistanz zwischen dem Befestigungspunkt der Schnur und der Kreisbahn der Kugel, r der Radius der Kreisbahn. Man stellt fest, dass die Geschwindigkeit, der Radius, der Winkel und der Betrag der Kraft T von der Höhe abhängig sind. Um die Geschwindigkeit als Funktion der Höhe zu bestimmen, benutzt man die Bewegungsgleichungen in der Vertikalen und in der Rotationsebene:

$$\begin{cases} T \cos \alpha = mg \\ T \sin \alpha = m a_R = \frac{mv^2}{R} \end{cases}$$

Was ergibt, durch Division:

$$\tan \alpha = \frac{v^2}{gR}$$

Das Verhältnis zwischen dem Winkel α , der Höhe h und dem Radius R kann geschrieben werden als:

$$\tan \alpha = \frac{R}{h}$$

Es folgt daraus, dass $R^2 = \frac{h}{g} v^2$. Wir wissen ebenfalls, dass die z-Komponente des Drehimpulses erhalten ist. Somit ist $L_z = mRv = \text{Kste}$. Kombiniert man diese zwei Ausdrücke, somit erhält man:

$$v^4 = \frac{L_z^2 g}{m^2} \frac{1}{h}$$

Man findet den Betrag der z-Komponente des Drehimpulses mit Hilfe der Geschwindigkeit und der Höhe des Pendels am Anfang des Experimentes:

$$L_z = mR_1 v_1 = m v_1^2 \sqrt{\frac{h_1}{g}}$$

Schliesslich, lautet die Arbeit A :

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} m (v_2^2 - v_1^2) - mg (h_2 - h_1) = \frac{L_Z}{2} \left(\sqrt{\frac{g}{h_2}} - \sqrt{\frac{g}{h_1}} \right) - mg (h_2 - h_1) \\ &= m \frac{v_1^2}{2} \left(\sqrt{\frac{h_1}{h_2}} - 1 \right) - mg (h_2 - h_1) \end{aligned}$$