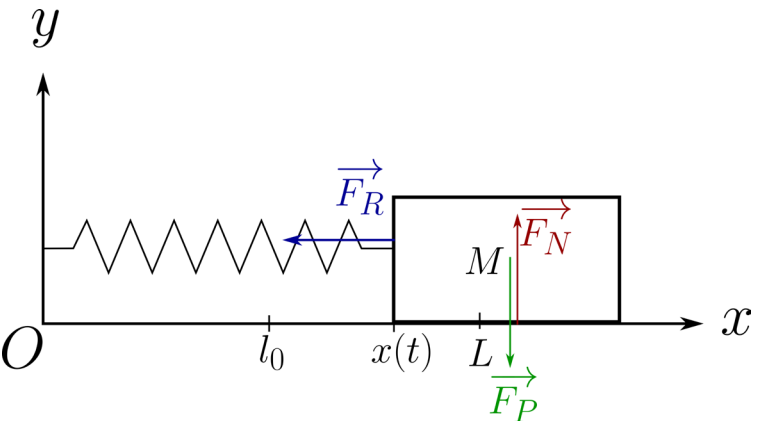


Lösungen 8 : Schwingungen

Üb 1: Schwingender Block

- a) Die drei Kräfte, die auf den Block wirken sind die Gravitationskraft $\vec{F}_P$, die Normalkraft $\vec{F}_N$ und die Federkraft $\vec{F}_R$. Benutzt man das im Schema abgebildete Bezugssystem, erhält man laut des zweiten Newtonschen Gesetzes:

$$\begin{aligned} \sum \vec{F}(t) &= \vec{F}_P + \vec{F}_N + \vec{F}_R \\ &= \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ F_N \end{pmatrix} \\ &\quad + \begin{pmatrix} k(l_0 - x(t)) \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= M \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$


$$\Rightarrow \begin{cases} M \cdot \ddot{x}(t) + k \cdot x(t) = k \cdot l_0 \\ F_N = Mg \end{cases}$$

l_0 entspricht der Länge der Feder im Ruhezustand, und k seiner Federkonstante. Die Lösung der ersten Gleichung ist in der allgemeinen Form: $x(t) = A \cdot \cos(\omega t + B) + C$, wobei die Konstanten A, ω, B und C durch die Anfangsbedingungen bestimmt werden müssen.

Leitet man zwei Mal die Position ab, findet man $\dot{x}(t) = -A\omega \cdot \sin(\omega t + B) \Rightarrow \ddot{x}(t) = -A\omega^2 \cdot \cos(\omega t + B)$. Ersetzt man dies in der Bewegungsgleichung, findet man:

$$-MA\omega^2 \cos(\omega t + B) + kA \cos(\omega t + B) + kC = kl_0$$

Diese Gleichung muss für alle Zeiten gültig sein, somit ist $C = l_0$. Somit, $\omega = \sqrt{\frac{k}{M}}$. Zur Zeit $t = 0$, wenn man den Block loslässt ist die Geschwindigkeit gleich Null, und somit $B = 0$. Wir wissen auch, dass $x(0) = L$, was $A = L - l_0$ einbezieht. Wir haben die vier Bewegungskonstanten bestimmt, und schließlich ist die Position in Abhängigkeit der Zeit: $x(t) = (L - l_0) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M}}t\right) + l_0$. Die Frequenz ist gleich $= \frac{\omega}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \cdot \sqrt{\frac{k}{M}}$.

- b) Nehmen wir an, der Block wird bis zur Distanz L_{max} gezogen. Sie entspricht der maximalen Distanz von der Mauer von welcher man den Block loslassen kann, ohne dass der obere Block während des Experimentes rutscht. Die Bewegungsgleichung des Systems ist nun:

$$x(t) = (L_{max} - l_0) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right) + l_0$$

und die Beschleunigung in Abhängigkeit der Zeit: $\ddot{x}(t) = -\frac{k \cdot (L_{max} - l_0)}{M+m}$.

$\cos\left(\sqrt{\frac{k}{M+m}}t\right)$. Man stellt fest, dass der maximale Wert der Norm der Beschleunigung: $\ddot{x}_{max} = \frac{k \cdot (L_{max} - l_0)}{M+m}$ beträgt. Somit,

$$m \cdot \ddot{x}_{max} = F_f = \mu_s \cdot F_N = \mu_s \cdot mg \Rightarrow \frac{k \cdot (L_{max} - l_0)}{M+m} = \mu_s \cdot g \Rightarrow L_{max} = \frac{\mu_s \cdot g \cdot (M+m)}{k} - l_0$$

Üb 2: Buckelpiste

- a) Das Profil $H(x)$ der Strasse ist von der Form (siehe Abbildung),

$$H(x) = \frac{H}{2} \left(1 - \cos\left(\frac{2\pi x}{L}\right) \right)$$

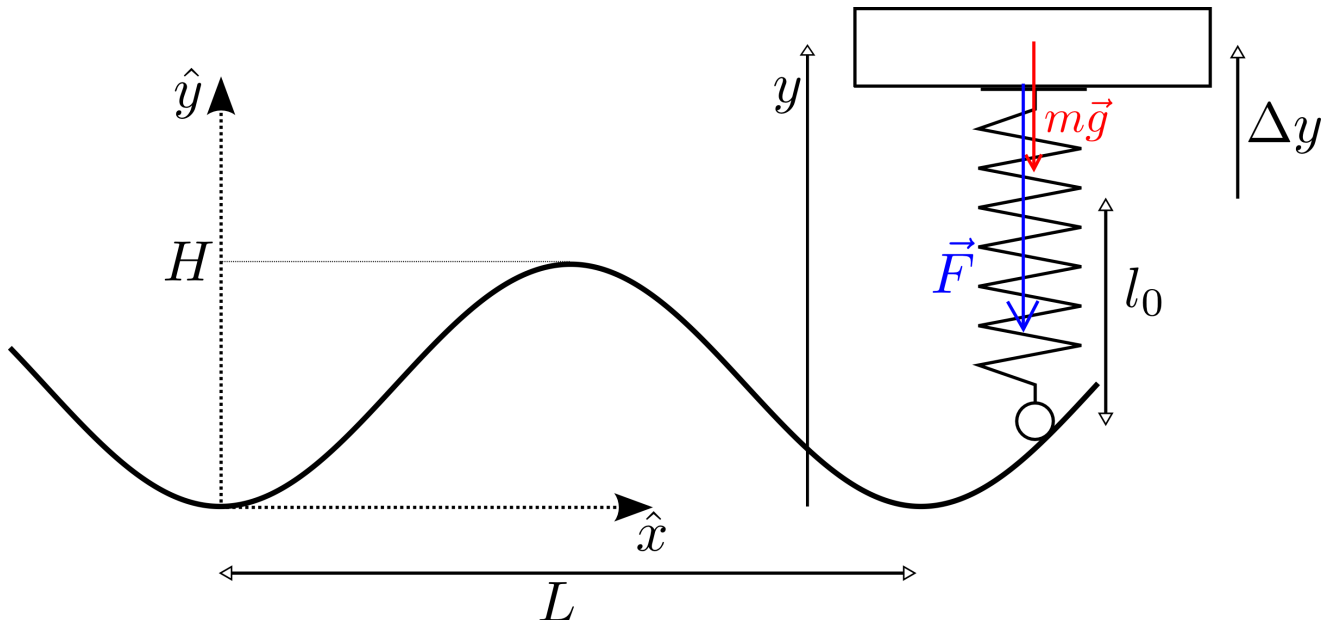
Da der Kontaktpunkt zwischen des Rads und der Strasse sich mit konstanter horizontaler Geschwindigkeit v bewegt, ist die horizontale Position dieses Punktes $x = vt$. Somit ist die Bewegungsgleichung dieses Punktes $H(t)$ von der Form

$$H(t) = \frac{H}{2} (1 - \cos(\omega_R t))$$

mit $\omega_R = 2\pi v/L$.

- b) Die zwei anwesenden Kräfte sind das Gewicht und die Federkraft. Man schreibt Δy für die Verlängerung der Feder und y für die Position der Masse längs der Achse y . Somit (siehe Abbildung)

$$\Delta y(t) = y(t) - (H(t) + l_0)$$



Das zweite Newtonsche Gesetz ergibt $m\ddot{y} = -mg - k\Delta y$.

Somit

$$\ddot{\Delta y} = -g - \omega_0^2 \Delta y - \dot{H} = -g - \omega_0^2 \Delta y + \omega_R^2 \frac{H}{2} \cos(\omega_R t)$$

mit $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$.

Mit Hilfe der Variablenänderung $u = \Delta y + \frac{mg}{k} \Rightarrow \ddot{u} = \ddot{\Delta y}$, kann man die Differenzialgleichung umschreiben

$$\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_R^2 \frac{H}{2} \cos(\omega_R t).$$

Der Statischen Fall ($v = 0$), $u = 0$ entspricht der Position der Masse im Gleichgewicht. Man erkennt die Bewegung (relativ zur Strasse) eines erzwungenen Oszillators.

- c) Die Lösung dieser letzten Gleichung ist von der Form $u(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + \frac{H}{2} \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2 - \omega_R^2} \cos(\omega_R t)$ wie in der Aufgabenstellung angegeben. Die Anfangsbedingungen ergeben

i) für die Bewegung $\Delta y(0) = -\frac{mg}{k} \Rightarrow u(0) = 0 \Rightarrow A = -\frac{H}{2} \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2 - \omega_R^2} :$

ii) für die Geschwindigkeit $\dot{y}(0) = 0 \Rightarrow \dot{u}(0) = -\dot{H}(0) = 0 \Rightarrow B = 0.$

Somit ist die Bewegung in der Vertikalen

$$u(t) = \frac{H}{2} \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2 - \omega_R^2} (\cos(\omega_R t) - \cos(\omega_0 t)).$$

Die Amplitude entspricht $H \frac{\omega_R^2}{\omega_0^2 - \omega_R^2}$. Sie ist durch die Hälfte des y Abstands zwischen Hoch- und Tiefpunkt gegeben.

d) Man definiert die dimensionslosen Variablen z und δ durch $z = \omega_0 t$ und $\frac{\omega_R}{\omega_0} = 1 + \delta$. Somit

$$h = \text{Konstante} + \frac{H}{2} \left(-1 + \frac{1}{1 - (1 + \delta)^2} \right) (\cos((1 + \delta)z) - \cos(z))$$

Mit den Grenzwert $\delta \rightarrow 0$

$$h = \text{Konstante} - \frac{H}{2} \left(1 + \frac{1}{\delta(2 + \delta)} \right) (-\sin(z)\delta z + \dots)$$

Dieser Ausdruck ist nicht entartet für $\delta = 0$. Man findet

$$h(t) = \text{Konstante} + \frac{H}{4} \sin(\omega_0 t) \omega_0 t$$

Bei Resonanz steigt somit die Amplitude der Bewegung gegen Unendlich. Man stellt fest, dass diese Lösung folgendem Ausdruck entspricht

$$u(t) = \frac{H}{4} \sin(\omega_0 t) \omega_0 t$$

Dies ist tatsächlich eine Lösung von $\ddot{u} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 \frac{H}{2} \cos(\omega_0 t)$ unter angegebenen Anfangsbedingungen.

Üb 3: Gedämpfte Vibrationen

a) $T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} = 0.29 \text{ [s]}$

- b) Die zusätzliche Kräfte ist die viskose Reibungskraft $\vec{F}_f = -6\pi\eta r \vec{v}$ (die Kraft, die aus dem Archimedischen Prinzip stammt wird vernachlässigt $\vec{F}_A = -\rho V \vec{g}$) (siehe Abbildung). Somit lautet das zweite Newtonsche Gesetz:

$$m\ddot{x}(t) = mg - k(x(t) - l_0) - 6\pi\eta r \dot{x}(t)$$

Dies entspricht der Differenzialgleichung eines gedämpften Oszillators. Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist von der Form:

$$x(t) = A \cdot \exp(Bt) \cdot \cos(\omega t) + C$$

$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A \cdot \exp(Bt) \cdot [B \cdot \cos(\omega t) - \omega \cdot \sin(\omega t)]$$

$$\Rightarrow \ddot{x}(t) = A \cdot \exp(Bt) \cdot [(B^2 - \omega^2) \cdot \cos(\omega t) - 2B\omega \cdot \sin(\omega t)]$$

Somit lautet die Bewegungsgleichung:

$$\begin{aligned} Ck - kl_0 - mg + A \cdot \exp(Bt) \cdot (k + mB^2 + 6B\pi\eta r - m\omega^2) \cdot \cos(\omega t) \\ = 2A\omega \cdot \exp(Bt) \cdot (mB + 3\pi\eta r) \cdot \sin(\omega t) \end{aligned}$$

Damit diese Gleichung für jede Zeit gültig ist, muss der konstante Ausdruck gleich Null sein. Zusätzlich müssen auch sämtliche Sinus- und Cosinus-Terme gleichgesetzt werden:

$$\begin{cases} Ck - kl_0 - mg = 0 \\ k + mB^2 + 6B\pi\eta r - m\omega^2 = 0 \\ mB + 3\pi\eta r = 0 \end{cases}$$

Um unsere vier Variablen zu bestimmen, fehlt uns eine Gleichung, die wir mit Hilfe der Anfangsbedingung finden:

$$x(0) = A + C = L$$

Man löst dieses Systems um die Trajektorie des Objektes zu finden:

$$\begin{cases} C = l_0 + \frac{mg}{k} = 0.12 \text{ [m]} \\ B = -3 \cdot \frac{\pi\eta r}{m} = -0.36 \text{ [Hz]} \\ A = L - l_0 - \frac{mg}{k} = 0.029 \text{ [m]} \\ \omega = \sqrt{\frac{k}{m} - \frac{(3\pi\eta r)^2}{m^2}} = 22 \text{ [rad/s]} \end{cases}$$

Somit lautet die Trajektorie in Abhängigkeit der Zeit:

$$x(t) = \left(L - l_0 - \frac{mg}{k}\right) \cdot \exp\left(-3 \cdot \frac{\pi\eta r}{m} t\right) \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{(3\pi\eta r)^2}{m^2}} \cdot t\right) + l_0 + \frac{mg}{k}$$

Man stellt mit dieser Gleichung fest, dass die Frequenz ein wenig abgenommen hat.

c) $A \cdot \exp(B \cdot t_{0.5}) = \frac{A}{2} \Rightarrow t_{0.5} = \frac{\ln(0.5)}{B} = 1.9 \text{ [s]}$

- d) Man bestimmt die Viskosität auf zwei verschiedene Weisen. Man kann $t_{0.5}$ messen oder die Periodendifferenz:

$$\begin{cases} \eta = -\frac{\ln(0.5) \cdot m}{3\pi r \cdot t_{0.5}} \\ \eta = \frac{\sqrt{k \cdot m \cdot \left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)}}{3\pi r} \end{cases}$$

