

Lösungen 7 : Arbeit und Energie

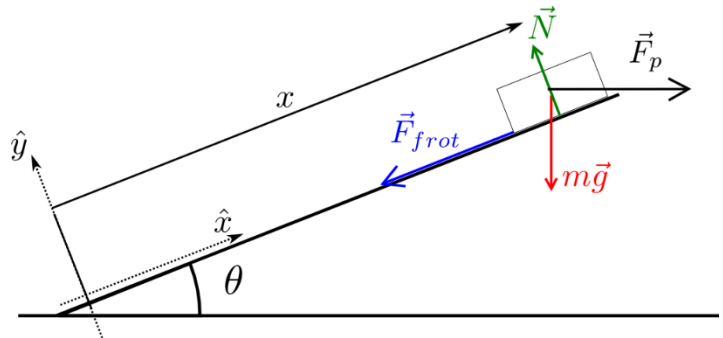
Üb 1. Block auf einer schiefen Ebene

- a) Die Bewegungsgleichungen lauten :

$$\begin{aligned} m\ddot{x} &= F_p \cos \theta - mg \sin \theta \\ m\ddot{y} &= -F_p \sin \theta - mg \cos \theta + N \end{aligned}$$

Gleichgewicht ist erhalten wenn :

$$F_{p,min} = mg \tan \theta = 110 [N] .$$



Für grössere Werte, bewegt sich der Block nach oben ($\ddot{x} > 0$) .

- b) Die Arbeit lautet $W_F = \int \vec{F}_p \cdot \vec{dx} = \int_0^d F_p \cdot \cos(\theta) dx = F_p \cdot \cos(\theta) \cdot d = 640 [J]$ (die Kraft ist konstant).
- c) $W_P = \int m\vec{g} \cdot \vec{dx} = m \cdot \int_0^d -g \cdot \sin(\theta) \cdot dx = -mg \sin(\theta) \cdot d = -470 [J]$
- d) $W_N = 0$ weil $\vec{N}$ und der Bewegungsvektor $\vec{dx}$ senkrecht zu einander stehen.
- e) Man hat : $\frac{1}{2} m(v_f^2 - v_0^2) = W_F + W_P + W_N$. Somit ist die Anfangsgeschwindigkeit gleich Null und man findet :

$$v_f = \left(\frac{2(W_F + W_P)}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = 4.3 [m/s]$$

- f) a) Die erste Gleichung ändert sich. Im statischen Fall:

$$0 = F_p \cos \theta - mg \sin \theta - \mu(F_p \sin \theta + mg \cos \theta).$$

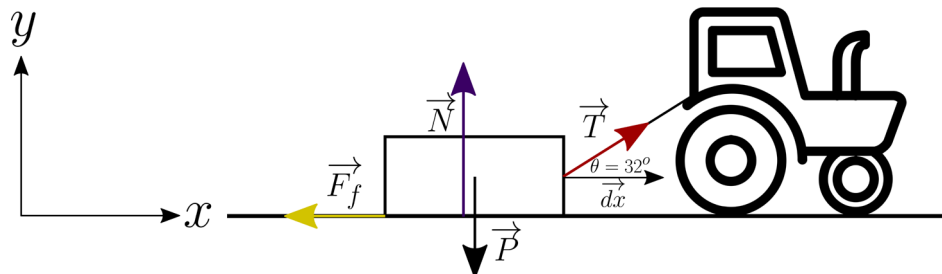
Der Ausdruck in Klammern steht entspricht N , welche als positiv angenommen wird (ansonsten würde sich der Block von der Ebene abheben). Im statischen Fall hat man per Definition: $-\mu_s \leq \mu \leq \mu_s$. Der Block bleibt somit in Ruhe wenn:

$$67 [N] = \frac{mg(\sin \theta - \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta + \mu_s \sin \theta} \leq F_p \leq \frac{mg(\sin \theta + \mu_s \cos \theta)}{\cos \theta - \mu_s \sin \theta} = 166 [N]$$

- e) Man muss dazu die dynamische Reibungskraft betrachten: $W_f = -\mu_k d(F_p \sin \theta + mg \cos \theta)$. Die Geschwindigkeit zum Schluss ist somit (es ist wichtig, dass Sie wieder W_F berechnen!):

$$v_f = \left(\frac{2(W_F + W_P + W_f)}{m} \right)^{\frac{1}{2}} = 5.3 [m/s]$$

Üb.2 Bauer Johnson



- a) Es wird immer empfohlen, die Vektoren als Spaltenvektor zu bezeichnen. Somit können wir mit unserem Achsensystem die Kräfte und die infinitesimale Bewegung wie folgt beschreiben:

$$\vec{T} = \begin{pmatrix} T \cdot \cos \theta \\ T \cdot \sin \theta \end{pmatrix}; \vec{N} = \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix}; \vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix}; \vec{F}_f = \begin{pmatrix} -F_f \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\vec{dx} = \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix}$$

Auf diese Weise, erhält man die Arbeit jeder Kraft:

$$W_T = \int_0^D \vec{T} \cdot \vec{dx} = \int_0^D \begin{pmatrix} T \cdot \cos \theta \\ T \cdot \sin \theta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^D T \cdot \cos(\theta) \cdot dx = T \cdot \cos(\theta) \cdot D = 8.5 \cdot 10^4 \text{ [J]}$$

$$W_N = \int_0^D \vec{N} \cdot \vec{dx} = \int_0^D \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^D 0 = 0 \text{ [J]}$$

$$W_P = \int_0^D \vec{P} \cdot \vec{dx} = \int_0^D \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^D 0 = 0 \text{ [J]}$$

$$W_{F_f} = \int_0^D \vec{F}_f \cdot \vec{dx} = \int_0^D \begin{pmatrix} -F_f \\ 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} dx \\ 0 \end{pmatrix} = \int_0^D -F_f \cdot dx = -F_f \cdot D = -7 \cdot 10^4 \text{ [J]}$$

Es ist somit offensichtlich, dass $W_N = W_P = 0$ da die Normalkraft und die Gewichtskraft senkrecht zur Bewegung sind. Die gesamte Arbeit ist somit: $W_{tot} = 1.5 \cdot 10^4 \text{ [J]}$.

- b) Benutzt man das zweite Newtonsche Gesetz, erhält man :

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} T \cdot \cos \theta \\ T \cdot \sin \theta \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ N \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ -P \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -F_f \\ 0 \end{pmatrix} = m \cdot \begin{pmatrix} \ddot{x}(t) \\ \ddot{y}(t) \end{pmatrix}$$

Da es nur eine Beschleunigung längs x gibt, erhält man :

$$\ddot{x}(t) = \frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{m} \Rightarrow \dot{x}(t) = \frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{m} \cdot t + A \Rightarrow x(t) = \frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{2 \cdot m} \cdot t^2 + A \cdot t + B$$

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \Rightarrow A = v_0 \\ x(0) = 0 \Rightarrow B = 0 \end{cases}$$

$$x(T_D) = \frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{2 \cdot m} \cdot T_D^2 + v_0 \cdot T_D = D \Rightarrow T_D = \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot \frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{2 \cdot m} \cdot D}}{\frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{m}} = 5.8 \text{ [s]}$$

$$v_f = \dot{x}(T_D) = \sqrt{v_0^2 + 4 \cdot \frac{T \cdot \cos(\theta) - F_f}{2 \cdot m} \cdot D} = 4.9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Es wurde nur die Lösung mit einer positiven Zeit erhalten, da sie die einzige ist, die Sinn macht. Man bemerkt, dass das zweite Newton'sche Gesetz in diesem Beispiel aufwendig ist. Benutzt man die Arbeit und Energie, vereinfacht sich die Berechnung:

$$E_f - E_i = W_{tot} \Rightarrow \frac{m \cdot v_f^2}{2} - \frac{m \cdot v_0^2}{2} = W_{tot} \Rightarrow v_f = \sqrt{v_0^2 + 2 \cdot \frac{W_{tot}}{m}} = 4.9 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$$

Aus diesen Berechnungen ergeben sich mehrere Feststellungen.

Erstens, erhält man das selbe Ergebnis, wenn man das zweite Newtonsche Gesetz oder die Arbeit/Energie benutzt. Das liegt daran, dass die Definition der Arbeit und der Energie aus dem zweiten Newtonschen Gesetz folgen.

Zweitens, stellt man in diesem bestimmten Fall fest, dass es viel effizienter ist, die Arbeit und Energie zu benutzen anstatt die Bewegungsgleichungen zu lösen.

Im Allgemeinen ist es oft günstiger die Berechnung der Arbeit und Energie zu unternehmen, wenn man den Anfangszustand eines Systems kennt und den Endzustand sucht. So ist es in diesem Fall: Es wird nicht gesucht, was zwischen Anfang- und Endpunkt passiert, sondern nur die Endgeschwindigkeit. Im Gegenteil, wenn man die zeitliche Entwicklung eines Systems beschreiben will, seine Geschwindigkeit als Funktion der Zeit, ist es oft notwendig das zweite Newtonsche Gesetz anzuwenden.

c) Die momentane Leistung des Traktors lautet :

$$P = \vec{T} \cdot \vec{v} = T \cdot \cos(\theta) \cdot v \Rightarrow \begin{cases} P_i = T \cdot \cos(\theta) \cdot v_0 = 8.5 \text{ [kW]} \\ P_f = T \cdot \cos(\theta) \cdot v_f = 21 \text{ [kW]} \end{cases}$$

$$\text{d) } P(t) = \vec{F}(t) \cdot \vec{v}(t) = F_{\parallel}(t) \cdot v(t) = m \cdot a(t) \cdot v(t) = m \cdot \frac{dv}{dt} \cdot v(t) \Rightarrow v \cdot dv = \frac{P(t)}{m} \cdot dt$$

$$\Rightarrow \int_{v_0}^{v_f} v \cdot dv = \int_{T_0}^{T_f} \frac{P(t)}{m} \cdot dt \Rightarrow \frac{v^2}{2} \Big|_{v_0}^{v_f} = \frac{P}{m} \cdot t \Big|_{T_0}^{T_f}$$

$$\text{Stellt man } v_0 = 0 \text{ und } T_0 = 0, \text{ erhält man schliesslich : } v^2(t) = 2 \cdot \frac{P}{m} \cdot t \Rightarrow v(t) = \sqrt{2 \cdot \frac{P}{m} \cdot t} \Rightarrow a(t) = \sqrt{\frac{P}{2 \cdot m \cdot t}}$$

Die Beschleunigung nimmt somit mit der Zeit ab.

Üb 3. Pumpleistung

a) Es sei Q die Massenflussrate in Kilogramm pro Sekunde und v_0 die Austrittsgeschwindigkeit in Meter pro Sekunde des Wasserstrahls. In der Zeitspanne Δt nimmt die Pumpe $Q \cdot \Delta t$ Kilogramm Wasser auf und überträgt ihm eine Geschwindigkeit v . Somit entspricht die von der Pumpe geleistete Arbeit ΔW (in Joules) der gewonnenen kinetischen Energie dieser Wassermasse:

$$\Delta W = Q \cdot \Delta t \cdot \frac{v_0^2}{2}$$

Die momentane Leistung der Pumpe ist somit :

$$P(t) = \frac{d(W(t))}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = Q \cdot \frac{v_0^2}{2} = 770 \text{ [kW]}$$

Um die Höhe des Wasserstrahls zu berechnen, betrachtet man die mechanische Energie jedes Wasserteilchens im Aufstieg als erhalten. Vernachlässigt man die Reibung, somit kann man für ein Wasserteilchen mit Masse dm die kinetische Energie am Austritt des Wasserstrahls und die potentielle Energie am Höhepunkt (da die Geschwindigkeit längs y gleich Null ist) gleich setzen:

$$dm \cdot \frac{v_0^2}{2} = dm \cdot g \cdot h_{\max} \Rightarrow h_{\max} = \frac{v_0^2}{2 \cdot g} = 160 \text{ [m]}$$

- b) Die Überlegung ist identisch: In der Zeitspanne Δt nimmt die Pumpe $Q \cdot \Delta t$ Kilogramm Wasser auf und überträgt dem Wasser eine Geschwindigkeit v und eine Höhe h . Um die Geschwindigkeit v des Wassers im Rohr zu bestimmen, benutzt man folgenden Zusammenhang:

$$Q = \rho_{\text{Wasser}} \cdot v \cdot \pi \cdot \left(\frac{\phi}{2}\right)^2 = 10 \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}}\right] \Rightarrow v = \frac{4 \cdot Q}{\rho_{\text{Wasser}} \cdot \pi \cdot \phi^2} = 1.3 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}}\right]$$

Die von der Pumpe geleistete Arbeit ΔW (in Joules) entspricht der gewonnenen kinetischen und potentiellen Energie dieser Wassermasse in diese Zeitspanne Δt :

$$\Delta W = Q \cdot \Delta t \cdot \frac{v^2}{2} + Q \cdot \Delta t \cdot g \cdot h$$

Die momentane Leistung der Pumpe ist somit :

$$P(t) = \frac{d(W(t))}{dt} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta W}{\Delta t} = Q \cdot \left(\frac{v^2}{2} + g \cdot h\right) = 2 \text{ [kW]}$$

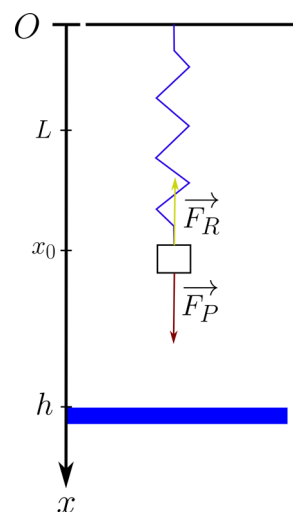
Üb 4: Bungee-Jumping von einer Brücke

- a) Um diese Übung zu lösen, muss man zunächst den Energieerhaltungssatz während des ersten Abstiegs benutzen, um die Federkonstante des elastischen Seiles zu bestimmen. Danach muss man feststellen, dass am Gleichgewichtspunkt (am Punkt x_0), die Summe der Kräfte gleich Null ist (da die Beschleunigung gleich Null ist). Um das System zu beschreiben, setzt man die Achse x nach unten gerichtet und den Ursprung auf die Brücke. Man legt ebenso das Nullniveau der potentiellen Energie der Gravitation auf der Brücke fest. Es sei noch L die Länge des Seils im Ruhezustand und h die Distanz zwischen Brücke und Fluss. Die Anfangsenergie des Springers ist gleich Null (keine kinetische Energie und potentielle Energie der Gravitation oder der Feder). Am Punkt h ist die kinetische Energie gleich Null und die gesamte Energie lautet somit:

$$E = E_0 = 0 = E_h = -m \cdot g \cdot h + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (h - L)^2 \Rightarrow k = \frac{2 \cdot m \cdot g \cdot h}{(h - L)^2} = 9.9 \left[\frac{\text{N}}{\text{m}}\right]$$

Mit dieser Federkonstante kann man jetzt die Gleichgewichtsposition berechnen. In x_0 gilt

$$\vec{a} = \vec{0} \Rightarrow \sum \vec{F} = m \cdot g \cdot \hat{e}_x - k \cdot (x_0 - L) \cdot \hat{e}_x = \vec{0} \Rightarrow x_0 = L + \frac{m \cdot g}{k} = L + \frac{(h - L)^2}{2 \cdot h} = 99 \text{ [m]}$$

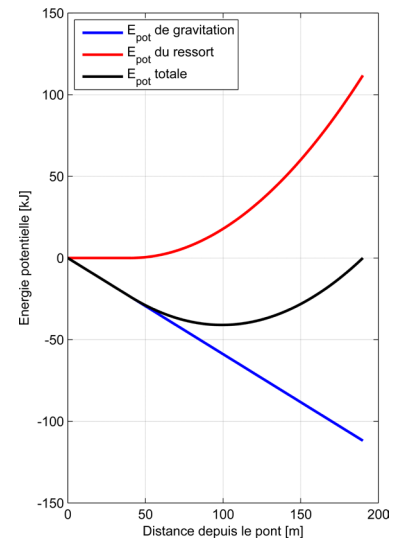


- b) Die maximale Geschwindigkeit ist erhalten, wenn die Beschleunigung gleich Null ist, d.h. wenn die zuvor bestimmte Gleichgewichtsposition erreicht ist. Um die Geschwindigkeit an diesem Punkt zu bestimmen, muss man die kinetische Energie des Springers an diesem Punkt finden. Da die Energie im ersten Sprung erhalten ist, erhält man:

$$E = E_0 = 0 = E_{x_0} = -m \cdot g \cdot x_0 + \frac{1}{2} \cdot k \cdot (x_0 - L)^2 + \frac{1}{2} \cdot m \cdot v_{max}^2$$

$$\Rightarrow v_{max} = \sqrt{2gL + \frac{g}{h} \cdot (h - L)^2 - \frac{k}{m} \cdot \frac{(h - L)^4}{4 \cdot h^2}} = 37 \left[\frac{m}{s} \right]$$

- c) Die potenzielle Energie wird von der schwarzen Kurve auf der nebenstehenden Abbildung beschrieben. Sie entspricht der Summe der potentiellen Energie der Gravitation und der Feder. Man stellt mit diesen Graphik fest, dass das Gravitationspotential den Springer von der Brücke entfernt wobei das Federpotential ihn wieder auf die Brücke zurück bringt. Das gesamte potentielle Energieminimum entspricht der Gleichgewichtsposition. Der Springer schwingt somit um dieser Position. Die Reibung ermöglicht einen Energieverlust, der die Amplitude der Schwingungen verringert, und schliesslich den Springer zur Position x_0 bringt.



Üb.5 Der Skate-Park

- a) Die potentielle Energie lautet: $E_{pot} = mgy = mgh \left(1 - \exp\left(-\frac{x^2}{a^2}\right) \right)$.

- b) Durch Energieerhaltung, erhält man:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + E_{pot}(0) = \frac{1}{2}mv_f^2 + E_{pot}(\infty)$$

$$v_f^2 > 0 \Rightarrow \frac{1}{2}mv_0^2 - mgh > 0 \Rightarrow v_0 > \sqrt{2gh}$$

- c) Sowie in b), erhält man

$$\frac{1}{2}mv_0^2 + E_{pot}(0) = E_{pot}(x_{max})$$

woher

$$x_{max} = a \cdot \sqrt{-\ln\left(1 - \frac{v_0^2}{2gh}\right)} = a \cdot \sqrt{\ln(2)}$$

- d) Man bezeichnet mit $x(t)$ die Position nach der Ausfahrt der Rampe. Man erhält:

$$m \cdot \ddot{x}(t) = -b \cdot \dot{x}(t) - \mu_k \cdot m \cdot g$$

Eine direkte Berechnung zeigt, dass die vorgeschlagene Lösung eine Lösung dieser Bewegungsgleichung ist mit Anfangsbedingung $\dot{x}(0) = v_0$.

- e) Man möchte, dass $\dot{x}(t_A) = 0$, was impliziert, dass $t_A = \tau \cdot \ln(1 + v_0/v_l)$. Man bemerkt, dass $\dot{x}(t) < 0$ für $t > t_A$, d.h. dass der Skater wieder zurückkehrt! Die Aberration besteht darin, dass die Bewegungsgleichung sich ändert, wenn der Skater zum Stillstand kommt. Die dynamische Reibungskraft verschwindet und es bleibt nur noch das Gewicht und die Normalkraft.