

Lösungen 6 : Planetarische Physik

Üb 1: Im Lift

- a) Für das inertielle Bezugssystem folgt aus dem Schema:

$$m\ddot{z} = -mg + F.$$

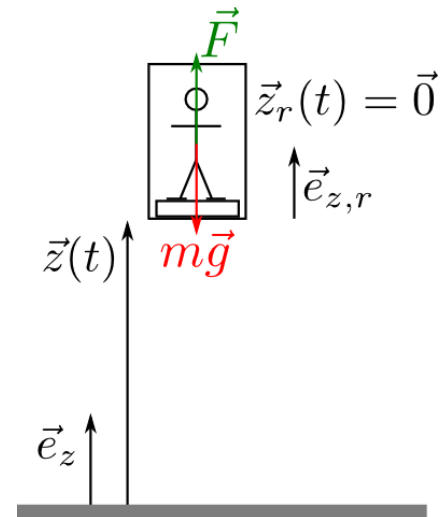
Im Bezugssystem des Lifts, mit dem Index r angezeigt, gibt es keine relative Beschleunigung da z_r konstant ist per Definition. Somit gilt

$$m \cdot \ddot{z}_r = 0 = -mg + F + F_{NI},$$

wobei F_{NI} die nicht-inertialen Kräfte sind. Verbindet man diese zwei Formulierungen, somit erhält man

$$z_r \cdot \vec{e}_z + z_a(t) \cdot \vec{e}_z = z(t) \cdot \vec{e}_z,$$

wobei z_a der Koordinaten des Liftbodens längs z entspricht. Somit entspricht die Analyse im beschleunigten Bezugssystem der Umformung der ersten Gleichung wobei alle Begriffe auf dieselbe Seite gesetzt werden, d.h. $F_{NI} = -m\ddot{z}$.



- b) Die angezeigte Masse m' entspricht $m' = \frac{F}{g}$. Somit ist $m' = m \cdot \left(1 + \frac{\ddot{z}}{g}\right) = 49 \text{ [kg]}$.

- c) Für $m' > m$ beschleunigt der Lift nach oben; für $m' < m$ beschleunigt er nach unten und für $m' = m$ ist seine Geschwindigkeit konstant.

Man hat $\ddot{z} = \left(\frac{m'}{m} - 1\right)g$.

$$\text{Somit gilt } \dot{z}(t) = \begin{cases} at, & 0 \leq t \leq t_1 = 5s \\ at_1, & t_1 \leq t \leq t_2 = 15s \\ \frac{at_1(t_3-t)}{t_3-t_2}, & t_2 \leq t \leq t_3 = 20s \end{cases}.$$

Man stellt $a = g \left(\frac{80}{70} - 1\right)$. Integriert man ein zweites Mal nach der Zeit, erhält man:

$$z(t_3) = 2 \left(\frac{at_1^2}{2} + at_1 \left(\frac{t_3}{2} - t_1 \right) \right) = 105 \text{ [m]} \approx 30 \text{ Stöcke}.$$

Üb.2 Artilleriegeschoss : Rechnung mit Berücksichtigung der Erddrehung

a) Es gilt durch Konstruktion und Aufgabenstellung

$$\dot{\vec{e}}_k = \vec{\Omega} \times \vec{e}_k \quad (1)$$

$$\vec{a}_I = \overrightarrow{O_I \ddot{P}} \quad (2)$$

$$\overrightarrow{O_I P} = \overrightarrow{O_I O} + \overrightarrow{OP} \quad (3)$$

In einem Inertialsystem gilt ausserdem $\dot{\vec{e}}_{k'} = \vec{0}$. Die Koordinaten α_k werden in der Basis des nicht-inertialen Bezugssystems definiert und sind somit zeitabhängig: $\alpha_k = \alpha_k(t)$. Da die Erde als perfekte Kugel angenommen wird, ist die Distanz zwischen den beiden Koordinatensystemen konstant mit der Zeit, somit gilt $\beta_k = cst$. Es folgt

$$\overrightarrow{OP} = \sum_k \alpha_k(t) \vec{e}_k(t), \quad (4)$$

$$\overrightarrow{O_I O} = \sum_k \beta_k \vec{e}_k(t) \quad (5)$$

Durch 2-maliges Ableiten der Gleichung (5) und einsetzen der Gleichung (1) findet man

$$\overrightarrow{O_I \ddot{O}} = \sum_k \beta_k \left(\vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \vec{e}_k(t)) \right) = \Omega \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O_I O}).$$

Ebenso findet man durch Ableiten der Gleichung (4) und durch Einsetzen der Gleichung (1)

$$\overrightarrow{O \ddot{P}} = \sum_k (\dot{\alpha}_k \vec{e}_k + \alpha_k \dot{\vec{e}}_k) = \vec{v}_T + \sum_k \alpha_k \dot{\vec{e}}_k = \vec{v}_T + \sum_k \alpha_k (\vec{\Omega} \times \vec{e}_k) = \vec{v}_T + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}$$

wobei $\vec{v}_T = \sum_k \dot{\alpha}_k \vec{e}_k$.

Durch erneutes Ableiten folgt

$$\overrightarrow{O \ddot{P}} = \dot{\vec{v}}_T + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}$$

wobei

$$\dot{\vec{v}}_T = \sum_k \ddot{\alpha}_k \vec{e}_k + \sum_k \dot{\alpha}_k \dot{\vec{e}}_k = \sum_k \ddot{\alpha}_k \vec{e}_k + \sum_k \dot{\alpha}_k (\vec{\Omega} \times \vec{e}_k)$$

Mit $\vec{a}_T = \sum_k \ddot{\alpha}_k \vec{e}_k$ folgt

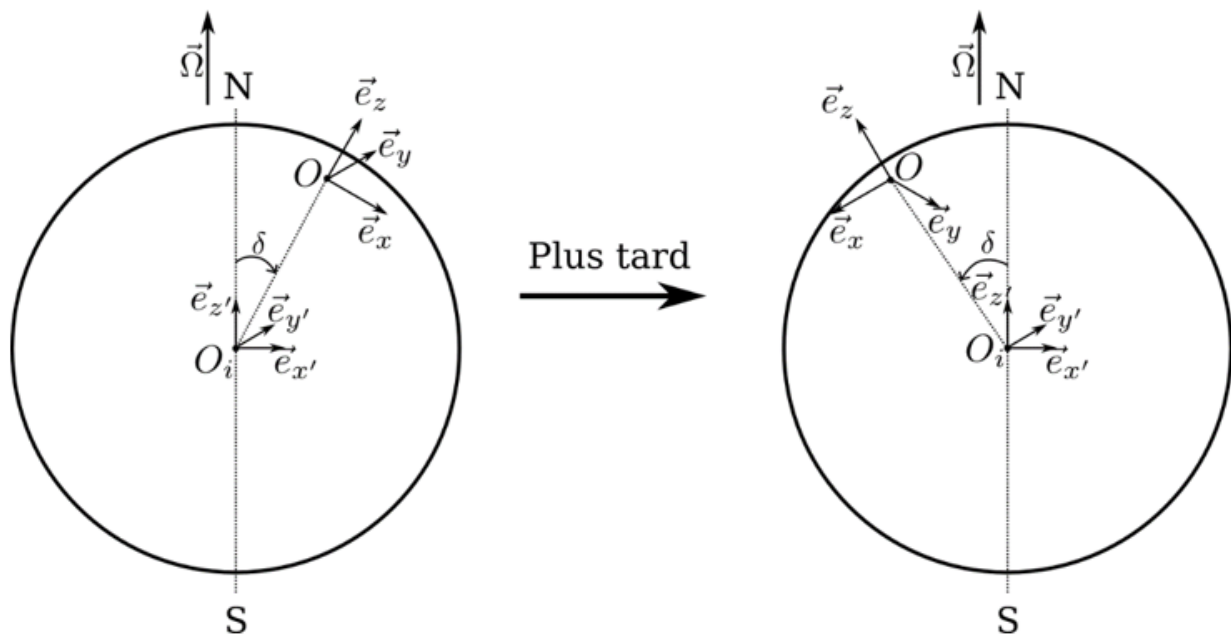
$$\overrightarrow{O \ddot{P}} = \vec{a}_T + \vec{\Omega} \times \vec{v}_T + \vec{\Omega} \times (\vec{v}_T + \vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}) = \vec{a}_T + \vec{\Omega} \times \vec{v}_T + \vec{\Omega} \times \vec{v}_T + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}).$$

Durch Einsetzen von Gleichung (3) mit den Entsprechenden Ableitungen in Gleichung (2) folgt

$$\vec{a}_I = \overrightarrow{O_I \ddot{P}} = \overrightarrow{O_I \ddot{O}} + \overrightarrow{O \ddot{P}} = \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O_I O}) + \vec{a}_T + 2 \cdot \vec{\Omega} \times \vec{v}_T + \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{OP}).$$

$$\vec{a}_T = \vec{a}_I - \vec{\Omega} \times (\vec{\Omega} \times \overrightarrow{O_I P}) - 2\vec{\Omega} \times \vec{v}_T.$$

Man erkennt die Coriolis Beschleunigung und die Zentrifugalbeschleunigung.



- b) Es sei $m \cdot \vec{a}_I = \vec{F}_{ext} = m \cdot \vec{g}$. Man nähert $\overrightarrow{O_I P}$ mit $\overrightarrow{O_I O}$ an da angenommen wird, dass die zurückgelegte Distanz des Geschosses klein ist relativ zum Radius der Erde (d.h. $|\overrightarrow{OP}| \ll R$). Aus der Abbildung folgt

$$\vec{\Omega} = \Omega \cdot (-\sin(\delta) \cdot \vec{e}_x + \cos(\delta) \cdot \vec{e}_z); \overrightarrow{O_I O} = R \cdot \vec{e}_z.$$

Benutzt man die Formeln des ersten Teiles der Übung, findet man die gegebene Gleichungen.

- c) Es gilt $\ddot{y} = -2 \cdot \Omega \cdot (\dot{x} \cdot \cos \delta + \dot{z} \cdot \sin \delta)$. Durch Einsetzen folgt

$$\begin{aligned} \ddot{y}_0 + \Omega \cdot \ddot{y}_1 &= -2 \cdot \Omega \cdot (\dot{x}_0 \cdot \cos \delta + \dot{z}_0 \cdot \sin \delta) + \Omega^2 \cdot (...) \\ &\Rightarrow \begin{cases} \ddot{y}_0 = 0 \\ \ddot{y}_1 = -2 \cdot (\dot{x}_0 \cdot \cos \delta + \dot{z}_0 \cdot \sin \delta) \end{cases} \end{aligned}$$

Die Indizes $_0$ entsprechen der Lösung ohne die fiktiven inertialen Kräfte, d.h. wenn $\Omega = 0$. Somit folgt

$$y_0 = 0; x_0 = v_0 \cdot \cos(\theta) \cdot t; z_0 = v_0 \cdot \sin(\theta) \cdot t - g \cdot \frac{t^2}{2}$$

und

$$\ddot{y}_1(t) = -2 \cdot [v_0 \cdot (\cos \theta \cdot \cos \delta + \sin \theta \cdot \sin \delta) - g \cdot \sin(\delta) \cdot t].$$

Durch Einsetzen der gegebenen Anfangsbedingungen, folgt

$$y_1(t) = g \cdot \sin(\delta) \cdot \frac{t^3}{3} - v_0 \cdot (\cos \theta \cdot \cos \delta + \sin \theta \cdot \sin \delta) \cdot t^2.$$

- d) Die zurückgelegte Distanz wird $\Omega \cdot y_1(T) = -35 [m]$

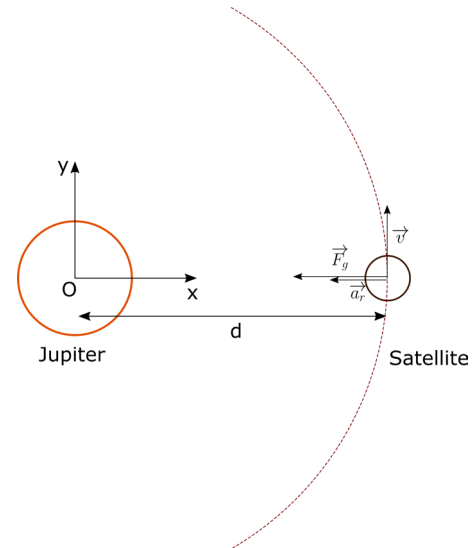
Üb. 3 Die Roche-Grenze

- a) Die einzige anwesende Kraft ist die Gravitationskraft $\vec{F}_G$, die Jupiter auf ihn ausübt. Seine Beschleunigung ist somit in Richtung Jupiter gerichtet. Mit Hilfe des zweiten Newtonschen Gesetzes findet man ihre Norm

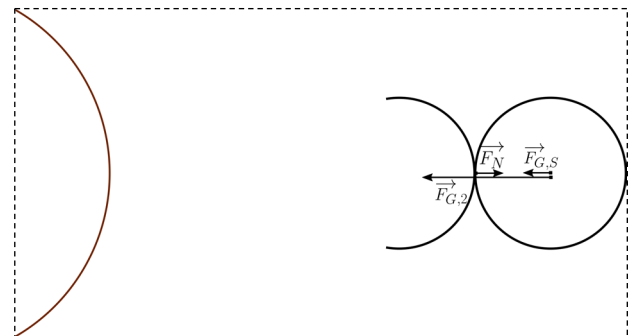
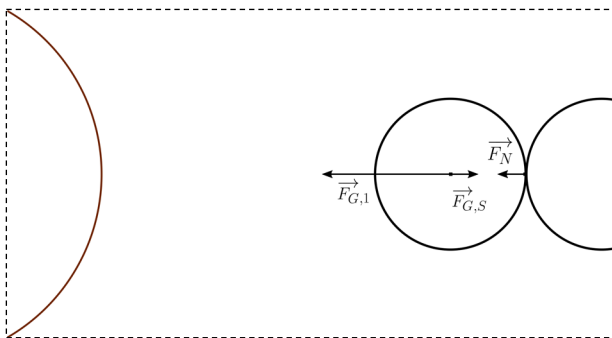
$$|\sum \vec{F}| = 2m \cdot a_r \Rightarrow F_G = G \cdot \frac{M_J \cdot 2m}{d^2} = 2m \cdot a_r \Rightarrow a_r = G \cdot \frac{M_J}{d^2}$$

Da der Satellit sich mit konstanter Geschwindigkeit auf einer Kreisbahn bewegt, gibt es einen Zusammenhang zwischen seiner Beschleunigung, ausschließlich radial, und seiner Geschwindigkeit

$$a_r = \frac{v^2}{d} \Rightarrow v = \sqrt{G \cdot \frac{M_J}{d}} \Rightarrow \omega = \sqrt{G \cdot \frac{M_J}{d^3}}$$



- b) Die Kräfte, die auf jeder Kugel wirken sind auf folgenden Abbildung repräsentiert.



$\vec{F}_{G,1}$ und $\vec{F}_{G,2}$ entsprechen der Gravitationskraft, die von Jupiter auf die erste bzw. die zweite Kugel ausgeübt wird. Der Betrag dieser zwei Kräfte ist nicht derselbe, da sie von der Distanz zu Jupiter, die nicht dieselbe ist, abhängig sind.

$\vec{F}_{G,S}$ ist die Gravitationskraft, die von jeder Kugel auf die andere ausgeübt wird und entspricht der Normalkraft (oder Stützkraft) zwischen den zwei Kugeln. Diese Kraft ist anwesend, wenn die Kugel gegeneinander gedrückt sind.

- c) Seien d , die Distanz zwischen den Massenzentren der zwei Kugeln und dem Zentrum von Jupiter und r der Radius jeder Kugel. Die Distanz zwischen dem Zentrum der ersten Kugel und dem Zentrum Jupiters ist somit $d - r$. Die Distanz zwischen dem Zentrum der zweiten Kugel und dem Zentrum Jupiters ist somit $d + r$. Die Distanz zwischen den zwei Zentren der zwei Kugeln ist dann gleich $2r$. Somit können wir den Betrag der Kräfte als Funktion von d wie folgt ausdrücken:

$$|\vec{F}_{G,1}| = G \cdot \frac{M_J \cdot m}{(d - r)^2}$$

$$|\vec{F}_{G,2}| = G \cdot \frac{M_J \cdot m}{(d + r)^2}$$

$$|\vec{F}_{G,S}| = G \cdot \frac{m^2}{(2r)^2}$$

$$|\vec{F}_N| = F_N$$

Um den Betrag der Normalkraft F_N zu bestimmen, muss man das zweite Newtonsche Gesetz für jede Kugel benutzen. Mit dem selben Achsensystem als bei der ersten Figur, erhält man längs x :

$$\begin{cases} \sum \vec{F}_1 = m \cdot \vec{a}_1 \\ \sum \vec{F}_2 = m \cdot \vec{a}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -G \cdot \frac{M_J \cdot m}{(d-r)^2} + G \cdot \frac{m^2}{(2r)^2} - F_N = m \cdot a_{1,x} \\ -G \cdot \frac{M_J \cdot m}{(d+r)^2} - G \cdot \frac{m^2}{(2r)^2} + F_N = m \cdot a_{2,x} \end{cases}$$

Hier entspricht $\vec{a}_i$ der Beschleunigung der i -ten Kugel und $\sum \vec{F}_i$ der Summe der Kräfte die auf ihr wirken. Da die Kugel sich auf einer Kreisbahn mit konstanter Geschwindigkeit bewegen und da sie immer mit Jupiter ausgerichtet sind, erhält man:

$$\begin{cases} a_{1,x} = -\omega^2 \cdot (d-r) \\ a_{2,x} = -\omega^2 \cdot (d+r) \end{cases}$$

ω wurde am Anfang der Übung bestimmt, wobei der Satellit als ein einzelnes Objekt betrachtet wurde. Kombiniert man diese zwei Gleichungen, erhält man ein System zweier Gleichungen mit einer Unbekannten (F_N). Das Gleichungssystem ist somit überbestimmt. Um eine Lösung zu finden betrachtet man einfach eine der zwei Gleichungen:

$$\begin{aligned} -G \cdot \frac{M_J \cdot m}{(d-r)^2} + G \cdot \frac{m^2}{(2r)^2} - F_N &= -m \cdot G \cdot \frac{M_J}{d^3} \cdot (d-r) \\ \Rightarrow F_N &= m \cdot G \cdot \left(\frac{m}{(2r)^2} + \frac{M_J}{d^3} \cdot (d-r) - \frac{M_J}{(d-r)^2} \right) \end{aligned}$$

- d) Umso näher die Kugel zu Jupiter kommen, desto kleiner wird die Normalkraft. Am Punkt wo die zwei Kugeln sich trennen wird die Normalkraft gleich Null. Dies passiert an einer Distanz d_R des Zentrum Jupiters:

$$F_N(d_R) = 0 \Rightarrow m \cdot G \cdot \left(\frac{m}{(2r)^2} + \frac{M_J}{d_R^3} \cdot (d_R - r) - \frac{M_J}{(d_R - r)^2} \right) = 0$$

Um diese Gleichung zu lösen benutzt man eine gängige Annäherung in der Physik:

$$x \ll 1 \Rightarrow (1+x)^n \approx 1 + n \cdot x.$$

Diese Annäherung hat eine zentrale Bedeutung und sollte auswendig gelernt werden. Sie wird in den folgenden Übungen wieder nützlich sein.

In dieser Übung bemerkt man, dass die Distanz d_R zwischen dem Satelliten und Jupiter ist viel grösser als der Radius r einer der Kugeln ($r \ll d_R$). Somit gilt $\frac{r}{d_R} \ll 1$. Daher ist eine Annäherung möglich um den letzten Ausdruck der obigen Gleichung zu vereinfachen:

$$\frac{M_J}{(d_R - r)^2} = \frac{M_J}{d_R^2 \cdot \left(1 - \frac{r}{d_R}\right)^2} = \frac{M_J}{d_R^2} \cdot \left(1 - \frac{r}{d_R}\right)^{-2} \approx \frac{M_J}{d_R^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{r}{d_R}\right).$$

Man kann somit d_R bestimmen

$$\begin{aligned} 0 &= \frac{m}{(2r)^2} + \frac{M_J}{d_R^3} \cdot (d_R - r) - \frac{M_J}{(d_R - r)^2} \approx \frac{m}{(2r)^2} + \frac{M_J}{d_R^3} \cdot (d_R - r) - \frac{M_J}{d_R^2} \cdot \left(1 + 2 \cdot \frac{r}{d_R}\right) \\ \Rightarrow d_R &= r \cdot \left(12 \cdot \frac{M_J}{m}\right)^{\frac{1}{3}} \end{aligned}$$

Dazu kennt man die Dichte des Satellits:

$$\rho_S = \frac{m}{\frac{4}{3} \cdot \pi \cdot r^3} \Rightarrow d_R = \left(\frac{9 \cdot M_J}{\pi \cdot \rho_S} \right)^{\frac{1}{3}} = 1.8 \cdot 10^8 [m]$$

Diese Distanz ist Roche-Grenze genannt.

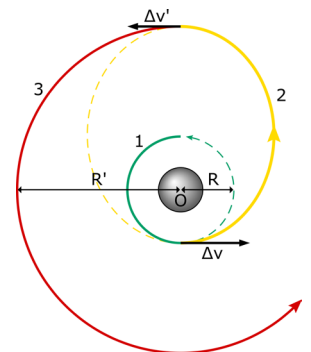
Üb.4 Sonde auf Mars

a) $T_T = 365 \cdot 86400 [s] \Rightarrow \omega_T = \frac{2\pi}{T_T} = 2 \cdot 10^{-7} \left[\frac{rad}{s} \right] \Rightarrow v_T = \omega_T \cdot d_T = 3 \cdot 10^4 \left[\frac{m}{s} \right]$

$$\frac{T_T^2}{d_T^3} = \frac{T_M^2}{d_M^3} \Rightarrow T_M = T_T \cdot \left(\frac{d_M}{d_T} \right)^{\frac{3}{2}} = 5.7 \cdot 10^7 [s] \Rightarrow \omega_M = \frac{2 \cdot \pi}{T_M} = 1.1 \cdot 10^{-7} \left[\frac{rad}{s} \right]$$

$$\Rightarrow v_M = \omega_M \cdot d_M = 2.4 \cdot 10^4 \left[\frac{m}{s} \right]$$

- b) Der Orbit des Satelliten um die Sonne wird eine Ellipse. Sein Perigäum befindet sich in der Nähe wo er sein Motor eingeschaltet hat und das Apogäum befindet sich am entgegengesetzten Punkt auf der anderen Seite der Sonne. Der Orbit des Satelliten umschliesst die kreisförmige Bahn der Erde vollständig.
- c) Eine besonders treibstoffsparende Möglichkeit besteht aus dem Hohmann-Transfer, der erlaubt von einer kreisförmigen Bahn zu einer anderen kreisförmigen Bahn mit anderen Radius überzugehen. Dazu werden die Reaktoren während einer kurzen Zeit eingeschaltet um einen Geschwindigkeitssprung Δv_i durchzuführen. Er befindet sich somit auf einem elliptischen Orbit. Wenn der Satellit sich am Apogäum seiner Trajektorie, gegenüber seiner Anfangsposition, befindet schaltet er seine Reaktoren noch mal ein um einen zweiten Geschwindigkeitssprung durchzuführen Δv_f . Benutzt man den mechanischen Energieerhaltungssatz, kann man den Wert der Geschwindigkeitssprünge als Funktion der Orbitradien und der Masse des Zentralkörpers (d.h. der Sonne) bestimmen.
- d) Sei $\theta_T(t)$ die zurückgelegte Winkeldistanz der Erde während t Sekunden nach dem Übereinanderliegen (bzw. $\theta_M(t)$ für Mars). Sei t_l die Zeit zwischen dem Übereinanderliegen der Planeten mit der Sonne und dem Satellitenstart. Sei $T_{ellipse}$ die Periode des Satelliten auf seiner elliptischen Transfer-Orbit. Damit ein Hohmann-Transfer Mars zu erreichen ermöglicht, muss der Satellit Mars treffen und zwar in dem Moment in dem er auf den Orbit des Mars ankommt. Es wurde festgestellt, dass sich das Apogäum gegenüber des Anfangspunktes befindet. Mathematisch bedeutet dies, dass:



$$\theta_T(t_l) + \pi = \theta_M \left(t_l + \frac{T_{ellipse}}{2} \right) + k \cdot 2\pi$$

Man findet $T_{ellipse}$ mit Hilfe des dritten Keplerschen Gesetzes

$$\frac{T_{ellipse}^2}{a^3} = \frac{T_T^2}{d_T^3}; \text{ avec } a = \frac{d_T + d_M}{2}.$$

Da $\theta_T(t) = \omega_T \cdot t$ und $\theta_M(t) = \omega_M \cdot t$, erhält man:

$$\omega_T \cdot t_l + \pi = \omega_M \cdot t_l + \frac{\omega_M \cdot T_{ellipse}}{2} + k \cdot 2\pi.$$

Die kleinste positive Zeit erhält man für $k = 1$ und beträgt $t_l = 6 \cdot 10^7 [s]$. Der Satellitenstart kann somit am frühesten am 18. April 2018 stattfinden.