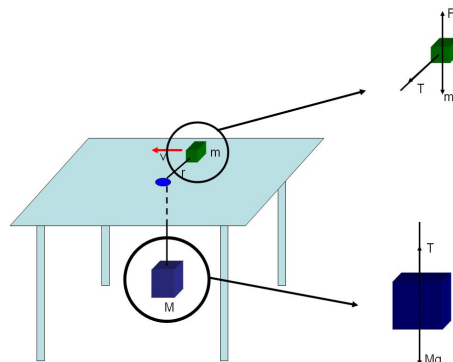


Lösungen 5 : Dynamik der Rotationen

Üb.1 Drehbewegung

a)



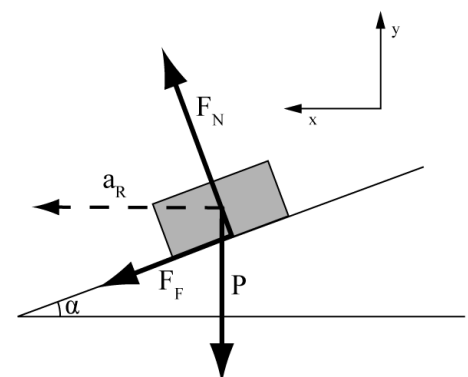
- b) Die grosse Schachtel hat keine vertikale Beschleunigung. Somit ist die Summe der vertikalen Kräfte, die auf ihr laut des zweiten Newtonschen Gesetzes wirken, gleich Null. Somit, $\vec{T} + M \cdot \vec{g} = \vec{0} \Rightarrow T = M \cdot g$. Diese kleine Schachtel folgt einer Drehbewegung mit konstanter Geschwindigkeit. Ihre Beschleunigung ist somit ausschliesslich radial, und ist gleich $a = a_r = \frac{v^2}{r}$. Die einzige radiale auf die kleine Schachtel wirkende Kraft ist die Spannungskraft. Das zweite Newtonsche Gesetz für die kleine Schachtel bedingt: $T = m \cdot a_r = m \cdot \frac{v^2}{r}$. Da die Spannung in allen Punkten der Schnur identisch ist, findet man folgenden Zusammenhang: $m \cdot \frac{v^2}{r} = M \cdot g$
 $\Rightarrow v = \sqrt{\frac{M}{m} \cdot g \cdot r}$.

Üb.2 Der Rundkurs von Nasca

a) Die Kräfte, die auf das Auto wirken sind :

- 1) Die Gewichtskraft, $\vec{P}$
- 2) Die Normalkraft, $\vec{F}_N$
- 3) Die Statische Reibungskraft, $\vec{F}_F$

Die Beschleunigung ist ausschliesslich radial längs der Horizontalen.



Nimmt man die Achsen wie auf der Figur an, erhält man:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_N = \begin{pmatrix} F_N \cdot \sin \alpha \\ F_N \cdot \cos \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{F}_F = \begin{pmatrix} F_F \cdot \cos \alpha \\ -F_F \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} = \vec{a}_R = \begin{pmatrix} v^2 \cdot R^{-1} \\ 0 \end{pmatrix}$$

- b) Die maximale und minimale Geschwindigkeit erhält man wenn man den maximalen Wert der Haftreibungskraftsnorm benutzt: $|F_{F,max}| = \mu_s \cdot F_N$.

Um die maximale Geschwindigkeit des Autos v_{max} (ohne nach aussen zu driften) zu bestimmen, muss man die auf dem Auto wirkende maximale radiale Beschleunigung bestimmen. In diesem Fall ist F_F positiv ($F_{F,max} = \mu_s \cdot F_N$), da die positive Haftreibungskraft in Richtung Zentrum der Kurve dirigiert ist (um eine Bewegung ausserhalb der Kurve zu vermeiden). Wendet man das zweite Newtonsche Gesetz an, erhält man:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} m \cdot v_{max}^2 \cdot R^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_N \cdot \sin \alpha \\ F_N \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mu_s \cdot F_N \cdot \cos \alpha \\ -\mu_s \cdot F_N \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_N = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha - \mu_s \cdot \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow m \cdot v_{max}^2 \cdot R^{-1} = m \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha + \mu_s \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_s \cdot \sin \alpha} \Rightarrow v_{max} = \left(R \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha + \mu_s \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha - \mu_s \cdot \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = 22 \left[\frac{m}{s} \right]$$

Um die minimale Geschwindigkeit des Autos v_{min} zu bestimmen vor dem Abfallen, muss man die auf das Auto wirkende minimale radiale Beschleunigung bestimmen. In diesem Fall ist F_F negativ ($F_{F,min} = -\mu_s \cdot F_N$), da die Haftreibungskraft nach aussen gerichtet ist (um einem Abfallen zu vermeiden). Wendet man das zweite Newtonsche Gesetz an, erhält man:

$$\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} \Rightarrow \begin{pmatrix} m \cdot v_{min}^2 \cdot R^{-1} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -m \cdot g \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} F_N \cdot \sin \alpha \\ F_N \cdot \cos \alpha \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\mu_s \cdot F_N \cdot \cos \alpha \\ \mu_s \cdot F_N \cdot \sin \alpha \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow F_N = \frac{m \cdot g}{\cos \alpha + \mu_s \cdot \sin \alpha}$$

$$\Rightarrow m \cdot v_{min}^2 \cdot R^{-1} = m \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha - \mu_s \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_s \cdot \sin \alpha} \Rightarrow v_{min} = \left(R \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha - \mu_s \cdot \cos \alpha}{\cos \alpha + \mu_s \cdot \sin \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = 7 \left[\frac{m}{s} \right]$$

- c) Wenn die Reibung vernachlässigt wird, gilt $\mu_s = 0$. In diesem Fall sind die maximale und minimale Geschwindigkeiten identisch:

$$v_{min} = v_{max} = \left(R \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha}{\cos \alpha} \right)^{\frac{1}{2}} = 15 \left[\frac{m}{s} \right]$$

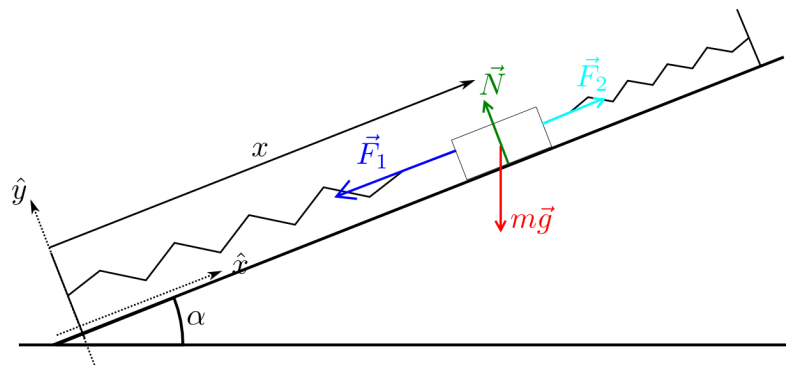
Wenn keine Reibung anwesend ist, für einen bestimmten Kurvenradius und Winkel, gibt es nur eine Geschwindigkeit mit der sich das Auto auf einer Kreisbahn bewegen kann, ohne dass es nach innen oder nach aussen rutscht.

- d) Setzt man $\alpha = 0$, erhält man $v_{max} = (R \cdot g \cdot \mu_s)^{\frac{1}{2}} = 13 \left[\frac{m}{s} \right]$. Wenn man v_{min} berechnen will, kommt man zum Schluss, dass dieser Wert nicht existiert ($v_{min} = (-R \cdot g \cdot \mu_s)^{\frac{1}{2}}$; da die Wurzel einer negativen Zahl eine komplexe Zahl ist). Dies macht Sinn, da die Kurve nicht schräg steht, d.h. man kann sich auf einer Bahnkurve bewegen mit einer Geschwindigkeit, die so klein wie gewünscht ist.

Üb.3 Schrägstehende Feder

- a) Die Kräfte sind die Normalkraft des Bodens, das Gewicht, und die zwei Federkräfte. Im Bezugssystem des Schemas findet man für das dritte Newtonsche Gesetz:

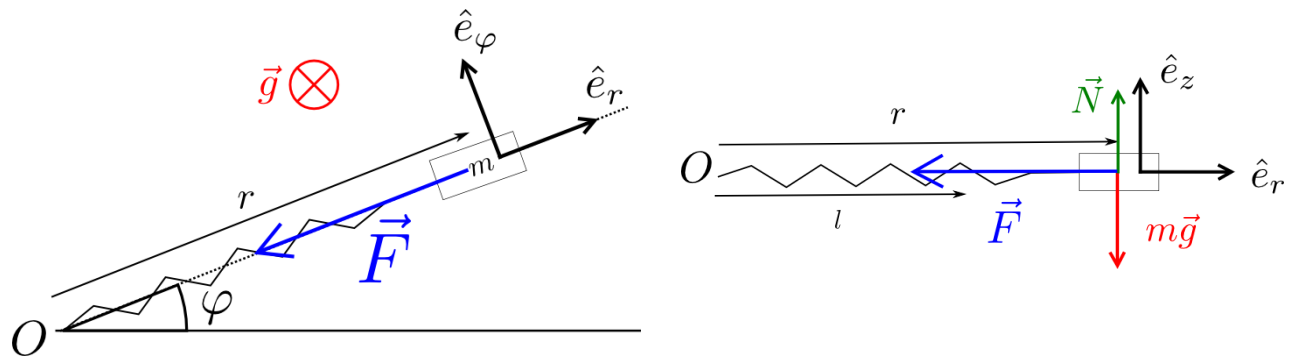
$$\begin{cases} m\ddot{x} = -k_1(x - l_1) + k_2(L - x - l_2) - mg \sin \alpha \\ m\ddot{y} = N_y - mg \cos \alpha = 0 \end{cases}$$



- b) Im Gleichgewicht ist die Beschleunigung gleich Null, und somit $x_e = \frac{1}{k_1 + k_2} [k_1 l_1 + k_2 (L - l_2) - mg \sin \alpha]$. Die Bedingungen $x_e > 0$ und $x_e < L$ einbezogen, ergeben $-\frac{kL}{mg} < \sin \alpha < \frac{kL}{mg}$. Die Symmetrie dieser Bedingung entspricht dem Umtauschen der Federn, wenn der Winkel sein Vorzeichen ändert. Mit den gegebenen Werten, findet man $m_{max} = \frac{kL}{g \sin \alpha} = 500 [kg]$.
- c) Man hat $m\ddot{x} = -(k_1 + k_2)(x - x_e)$, welche, wenn man $\omega^2 = \frac{k_1 + k_2}{m}$ definiert, die gewünschte Form ergibt.

Üb.4 Feder auf dem Tisch

a)



b) Längs der radialen Richtung : $m(\ddot{r} - r\dot{\varphi}^2) = -k(r - l)$

$N_z - mg = 0$ längs z.

$m(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi}) = 0$ bezüglich φ .

c) $\dot{L} = mr(r\ddot{\varphi} + 2\dot{r}\dot{\varphi})$, welche gleich Null ist laut dem zweiten Newtonschen Gesetz (keine Tangentialkraft).
Natürlich entsprechen die zwei Symbole, $\dot{\varphi}$ und ω derselben Grösse.

d) Die Gleichung längs r ergibt $r_e = \frac{l}{1 - \frac{m\dot{\varphi}^2}{k}}$.