

Lösungen 4 : Dynamik der Geradlinigen Bewegung

Üb.1 Kraft und Gleichgewicht

- 1) Da der Reifen sich nicht bewegt, ist seine Beschleunigung gleich Null: $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$.

Somit erhält man, durch Projektion längs der Achsen X und Y

$$\begin{cases} -F_A - F_B \cdot \cos \gamma - F_C \cdot \cos \beta = 0 \\ -F_B \cdot \sin \gamma + F_C \cdot \sin \beta = 0 \end{cases}$$

NB: Buchstaben ohne Pfeil entsprechen der Norm der Vektoren.

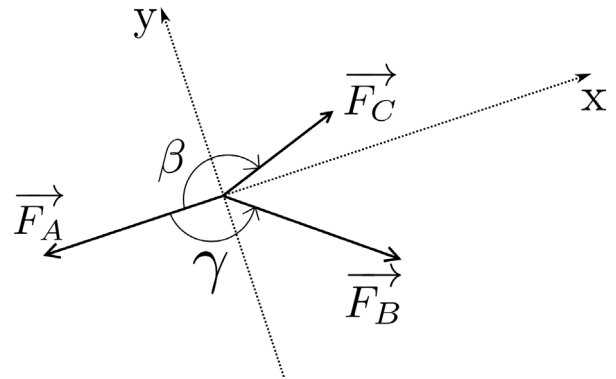
Eliminiert man die Unbekannte β , somit erhält man

$$F_B^2 + 2 \cdot F_A \cdot F_B \cdot \cos \gamma + F_A^2 - F_C^2 = 0.$$

Die Lösungen des Problems sind somit:

$$F_B = -F_A \cdot \cos \gamma \pm \sqrt{F_C^2 - F_A^2 \cdot \sin^2 \gamma}.$$

Die beiden numerischen Lösungen lauten: $F_B = 241 \text{ [N]}$, $\beta = 105^\circ$ und $F_B = 81 \text{ [N]}$, $\beta = 161^\circ$. Wenn sich die Vorzeichen aller Kräfte ändern, ist die Situation immer noch im Gleichgewicht.



- 2) a) Die Summe der Kräfte ist gleich Null

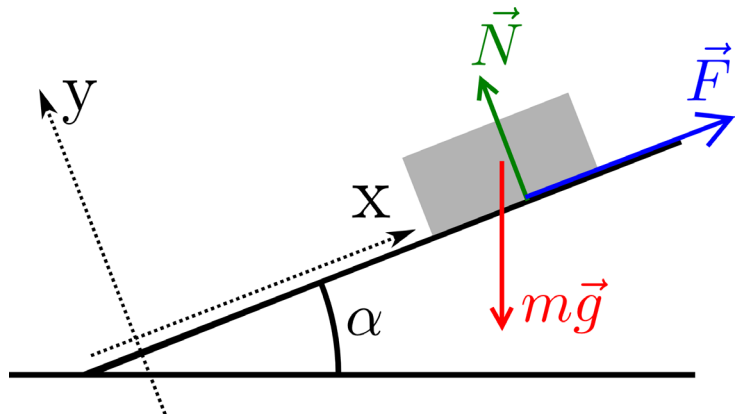
$$\sum \vec{F} = \vec{0}.$$

Die Kräfte entsprechen der Stützkraft (d.h. Reaktion vom Boden, auch Zwangskraft genannt) und der Reibungskraft. Somit erhält man nach der Projektion

$$N_x = 0 \quad N_y = mg \cdot \cos \alpha$$

und

$$F_x = mg \cdot \sin \alpha \quad F_y = 0.$$

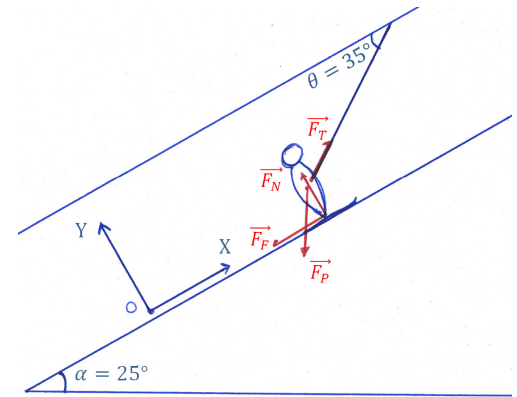


- b) Es gilt $F_x = \mu |\vec{N}|$ mit $\mu = \tan \alpha$. Da der maximale Wert von μ per Definition μ_s ist, ist der maximale Winkel, mit dem die Situation statisch sein kann $\alpha_m = \tan^{-1} \mu_s$. Interpretation: $-\mu_s$ entspricht einer negativen maximalen Steigung (hinab) und μ_s einer positiven maximalen Steigung (hinauf), wobei $\mu = 0$ für $\alpha = 0$. μ kann Werte zwischen $-\mu_s$ und μ_s annehmen, so dass sich das System stets im Gleichgewicht befindet.

Üb.2 Schlepplift

a) Die Kräfte, die auf den Skifahrer wirken sind

- 1) Die Spannungskraft der Stange, $\vec{F}_T$
- 2) Die Gewichtskraft, $\vec{F}_P$
- 3) Die Normalkraft, $\vec{F}_N$
- 4) Die Gleitreibungskraft, $\vec{F}_F$.



b) Setzt man die Achsen X und Y wie auf der Abbildung, gilt

$$\vec{F}_T = \begin{pmatrix} F_T \cdot \cos \theta \\ F_T \cdot \sin \theta \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_P = \begin{pmatrix} -m \cdot g \cdot \sin \alpha \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_N = \begin{pmatrix} 0 \\ F_N \end{pmatrix},$$

$$\vec{F}_F = \begin{pmatrix} -F_F \\ 0 \end{pmatrix}.$$

c) Da der Skifahrer mit konstanter Geschwindigkeit bergauf fährt, ist $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a} = \vec{0}$ und somit gilt

$$\begin{cases} F_T \cdot \cos \theta - m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_F = 0 \\ F_T \cdot \sin \theta - m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_N = 0 \end{cases}$$

Benutzt man die Beziehung zwischen Normalkraft und Gleitreibungskraft $F_F = F_N \cdot \mu_c$, findet man :

$$F_T = m \cdot g \cdot \frac{\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha}{\cos \theta + \mu_c \cdot \sin \theta} = 424 \text{ [N]}.$$

d) Nachdem die Stange losgelassen wurde, verschwindet die Spannungskraft und die Beschleunigung in X ist nicht mehr gleich Null

$$\begin{cases} -m \cdot g \cdot \sin \alpha - F_F = m \cdot \ddot{x}(t) \\ -m \cdot g \cdot \cos \alpha + F_N = 0 \end{cases}$$

Daraus folgt $\ddot{x}(t) = -g \cdot (\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha) \Rightarrow \dot{x}(t) = -g \cdot t \cdot (\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha) + v_0$

$\Rightarrow x(t) = -g \cdot \frac{t^2}{2} \cdot (\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha) + v_0 \cdot t + x_0$. Wobei T_f die notwendige Zeit bezeichnet, um eine

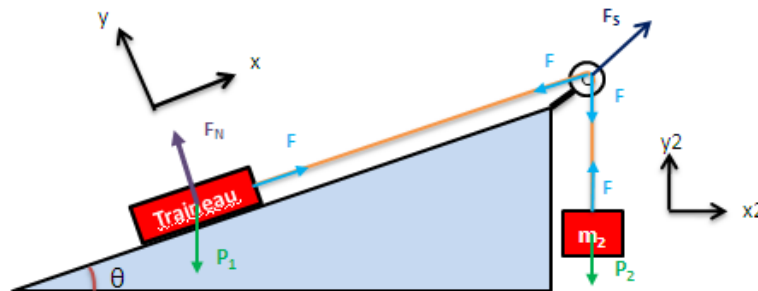
verschwindende Geschwindigkeit zu erreichen. Man erhält somit: $\dot{x}(T_f) = -g \cdot T_f \cdot (\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha) + v_0 =$

$0 \Rightarrow T_f = \frac{v_0}{g \cdot (\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha)}$. Die zurückgelegte Distanz d während der Bremsung lautet somit:

$$d = x(T_f) - x(0) = \frac{v_0^2}{2 \cdot g \cdot (\sin \alpha + \mu_c \cdot \cos \alpha)} = 1 \text{ [m]}.$$

Üb.3 Ein Schlitten, eine Masse und eine Rolle

a)



$$b) \quad a(t) = \frac{m_2 - m_1 \cdot \sin \theta}{m_1 + m_2} \cdot g$$

$$c) \quad a(t) = 2.5 \left[\frac{m}{s^2} \right]; F(t) = m_2 \cdot (g - a(t)) = 375 [N]$$

$$d) \quad m_2 = m_1 \cdot \sin \theta = 25 [kg]$$

Üb 6. Kugel im Öl

- Die zwei Kräfte, die auf der Kugel wirken sind die laminare Reibungskraft $\vec{F}_f = -b \cdot \vec{v}$ und die Gewichtskraft $\vec{F}_p = m \cdot \vec{g}$.
- Die Gleichung $\sum \vec{F} = m \cdot \vec{a}$ längst der Achse X lautet: $m \cdot \ddot{x}(t) = -b \cdot \dot{x}(t) + m \cdot g$. Um diese Gleichung zu lösen, setzt man $\dot{x}(t) = v(t)$. Somit kann man die Bewegungsgleichung umschreiben: $\dot{v}(t) = -\frac{b}{m} v(t) + g$.

Eine Lösung dieser Differenzialgleichung ist von der Form $v(t) = A \cdot \exp(\omega \cdot t) + B$. Die erste Ableitung hiervon lautet $\dot{v}(t) = A \cdot \omega \cdot \exp(\omega \cdot t)$. Setzt man diese zwei Formeln in die Bewegungsgleichung ein findet man

$$A \cdot \omega \cdot \exp(\omega \cdot t) = -\frac{b}{m} \cdot A \cdot \exp(\omega \cdot t) - \frac{b}{m} \cdot B + g.$$

Damit diese Gleichung für jede Zeit t gilt, muss gelten: $B = \frac{m}{b} \cdot g$ und $\omega = -\frac{b}{m}$.

Man findet A mit Hilfe der Anfangsbedingung $v(0) = A \cdot \exp(0) + B = 0$ und somit, $A = -B = -\frac{m}{b} \cdot g$.

Man erhält schließlich $v(t) = \frac{g \cdot m}{b} \cdot \left(1 - \exp\left(-\frac{b}{m} \cdot t\right) \right)$.

Integriert man einmal diese Gleichung, findet man die Position in Abhängigkeit der Zeit:

$$x(t) = \frac{g \cdot m}{b} \cdot \left(t + \frac{m}{b} \cdot \exp\left(-\frac{b}{m} \cdot t\right) \right) + C.$$

Man findet C mit Hilfe folgender Bedingung: $x(0) = 0 = \frac{g \cdot m}{b} \cdot \left(0 + \frac{m}{b} \cdot \exp(0) \right) + C \Rightarrow C = -\frac{g \cdot m^2}{b^2}$.

$$x(t) = \frac{g \cdot m}{b} \cdot \left(t + \frac{m}{b} \cdot \left(\exp\left(-\frac{b}{m} \cdot t\right) - 1 \right) \right)$$

3. Benutzt man die gegebene Viskosität und Dichte Werte, findet sich: $b = 6\pi\eta r = 9.4 \cdot 10^{-4}$ und $m = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho = 5.9 \cdot 10^{-4} [kg]$. Setzt man diese Werte in die Gleichung der Trajektorie zur Zeit $t = 10s$, findet man eine Tiefe des Zylinders von

$$x(10) = \frac{g \cdot m}{b} \left(10 + \frac{m}{b} \cdot \left(\exp\left(-\frac{b}{m} \cdot 10\right) - 1 \right) \right) = 0.61 [m].$$