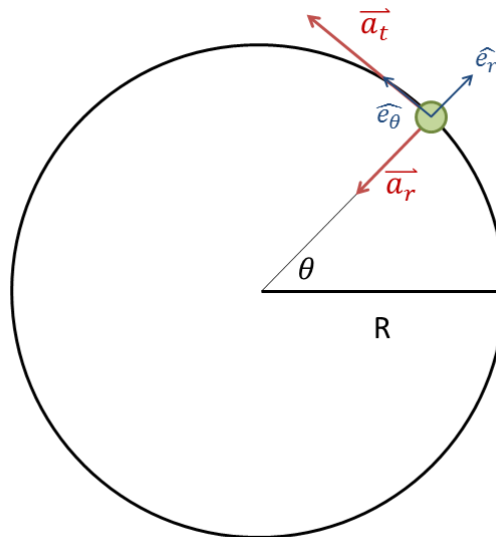


Lösungen 3 : Rotationen

Üb.1 Diskuswerfer

a)



b) Durch Integration der Winkelbeschleunigung findet sich die Winkelgeschwindigkeit und nach erneuter Integration der Winkel als Funktion der Zeit :

$$\begin{aligned}\alpha(t) &= \alpha \\ \Rightarrow \omega(t) &= \int_0^t \alpha(t') dt' = \alpha \cdot t \\ \Rightarrow \theta(t) &= \int_0^t \omega(t') dt' = \frac{\alpha \cdot t^2}{2}.\end{aligned}$$

Nach 3 Umdrehungen ist die lineare Geschwindigkeit des Diskus v_f :

$$\begin{cases} \omega(T) = \alpha \cdot T = \frac{v_f}{R} \\ \theta(T) = \frac{\alpha \cdot T^2}{2} = 3 \cdot 2\pi \end{cases}$$

und somit $\alpha = \frac{v_f^2}{12 \cdot \pi \cdot R^2} = 4.1 \left[\frac{1}{s^2} \right]$.

c) Siehe a).

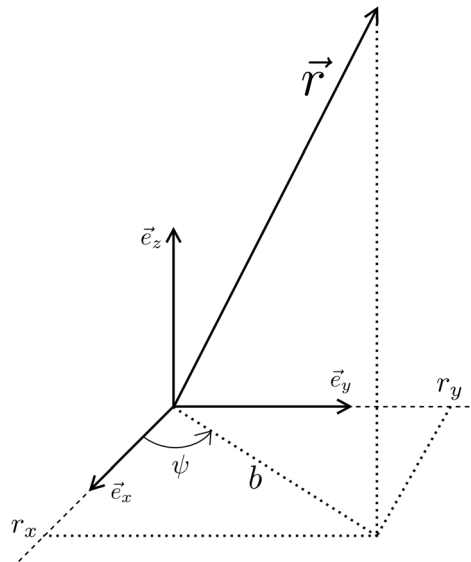
d) Die Normen der 3 Beschleunigungen sind

$$\begin{aligned}a_t(t) &= \alpha(t) \cdot R = \frac{v_f^2}{12 \cdot \pi \cdot R} \\ a_r(t) &= \omega^2(t) \cdot R = \frac{v_f^4}{144 \cdot \pi^2 \cdot R^3} \cdot t^2 \\ a(t) &= \sqrt{a_t(t)^2 + a_r(t)^2} = \frac{v_f^2}{12 \cdot \pi \cdot R} \cdot \left(1 + \frac{v_f^4}{144 \cdot \pi^2 \cdot R^4} \cdot t^4 \right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Somit ist die tangentielle Beschleunigung immer konstant. Die Radiale hingegen nicht, woraus folgt, dass die totale Beschleunigung des Diskus während des Durchlaufens seiner Trajektorie steigt.

Üb.2 Vektorielle Geschwindigkeit und Beschleunigung

- a) Nach Annahme gilt $\vec{r}^2 = r_x^2(t) + r_y^2(t) + r_z^2 = \text{konst.}$ Somit lautet die Gleichung eines Kreisbodens in der x-y-Ebene mit Radius b : $r_x^2(t) + r_y^2(t) = \vec{r}^2 - r_z^2 = \text{kste} = b^2$ und $\psi(t)$ repräsentiert den Winkel zwischen $\vec{e}_x$ und dem Vektor $r_x(t) \cdot \vec{e}_x + r_y(t) \cdot \vec{e}_y$.



- b) Durch Ableiten nach der Zeit findet man

$$\vec{v}(t) = b\dot{\psi}(t) (\cos(\psi(t))\vec{e}_y - \sin(\psi(t))\vec{e}_x),$$

$$\vec{a}(t) = b\ddot{\psi}(t) (\cos(\psi(t))\vec{e}_y - \sin(\psi(t))\vec{e}_x) - b\dot{\psi}^2(t) (\sin(\psi(t))\vec{e}_y + \cos(\psi(t))\vec{e}_x).$$

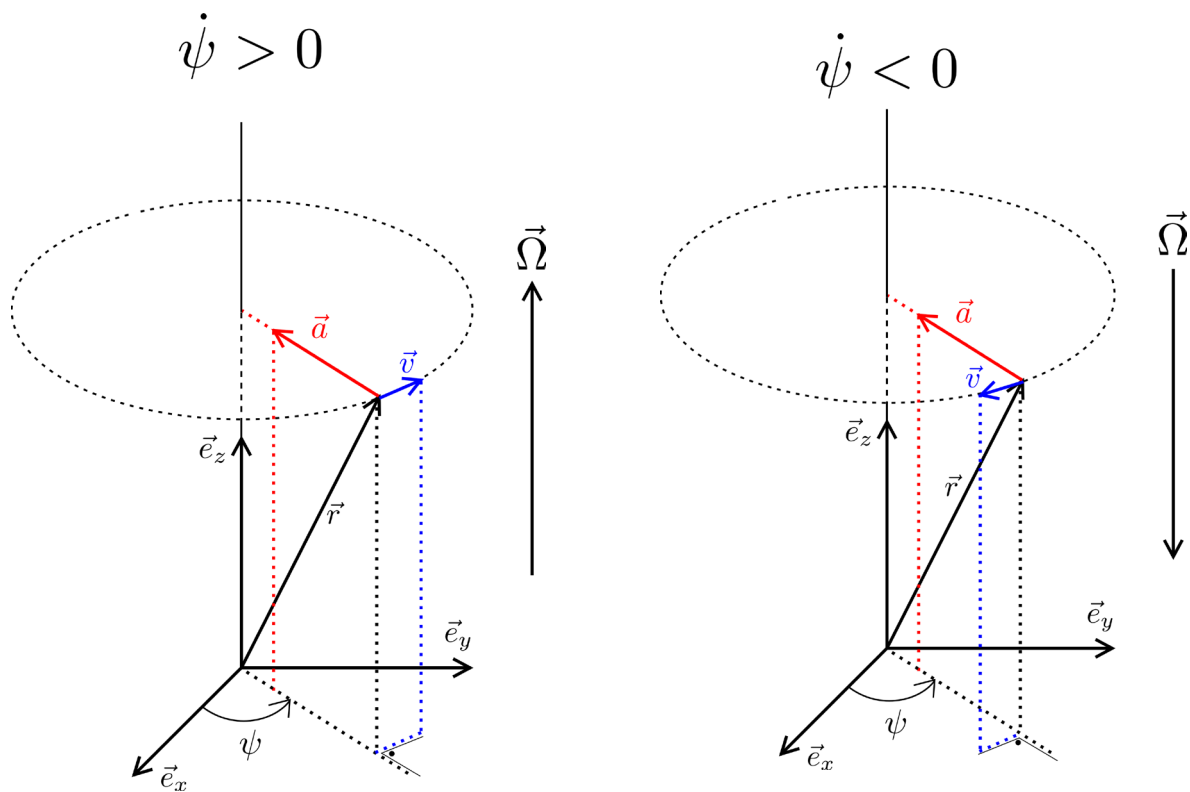
- c) Gesucht ist $\vec{v}(t) = \vec{\Omega}(t) \times \vec{r}(t) = b \begin{pmatrix} \Omega_1 \\ \Omega_2 \\ \Omega_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \cos(\psi) \\ \sin(\psi) \\ r_z/b \end{pmatrix} = b\dot{\psi} \begin{pmatrix} -\sin(\psi) \\ \cos(\psi) \\ 0 \end{pmatrix}$, wonach $\vec{\Omega} = \frac{\Omega_1}{b \cos(\psi)} \begin{pmatrix} b \cos(\psi) \\ b \sin(\psi) \\ r_z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{pmatrix}$.

Der erste Term ist proportional zu $\vec{r}$ und verschwindet für die Wahl von $\Omega_1 = 0$.

- d) Durch Ableiten der Gleichung aus c) und mit Hilfe der Produktregel für Ableitungen folgt

$$\vec{a}(t) = \dot{\vec{v}} = \dot{\vec{\Omega}}(t) \times \vec{r}(t) + \vec{\Omega}(t) \times [\vec{\Omega}(t) \times \vec{r}(t)].$$

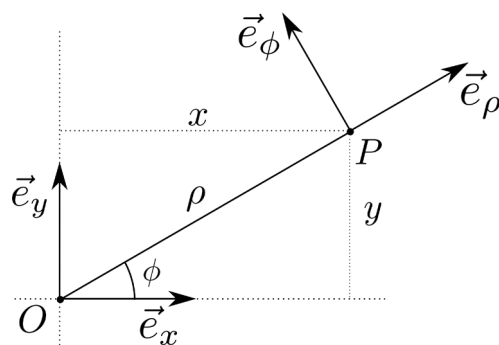
e)



Üb.3 Zylinderkoordinaten

a) Die Skizze liefert

$$\vec{OP} = \rho \cdot \cos(\phi) \cdot \vec{e}_x + \rho \cdot \sin(\phi) \cdot \vec{e}_y + z \cdot \vec{e}_z = \rho \cdot \vec{e}_\rho + z \cdot \vec{e}_z.$$



b) Die Änderung der Basisvektoren als Funktion der Zeit lauten

$$\frac{d\vec{e}_\rho}{dt} = \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{e}_\phi, \quad \frac{d\vec{e}_\phi}{dt} = -\frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{e}_\rho.$$

$$\rightarrow \vec{v}_P = \frac{d\vec{OP}}{dt} = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \frac{d\vec{e}_\rho}{dt} + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{e}_z = \frac{d\rho}{dt} \cdot \vec{e}_\rho + \rho \cdot \frac{d\phi}{dt} \cdot \vec{e}_\phi + \frac{dz}{dt} \cdot \vec{e}_z.$$

Ebenso findet sich für die Geschwindigkeit

$$\vec{a}_P = \frac{d\vec{v}_P}{dt} = \left(\frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \cdot \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \right) \cdot \vec{e}_\rho + \left(2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\phi}{dt} + \rho \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2} \right) \cdot \vec{e}_\phi + \frac{d^2z}{dt^2} \cdot \vec{e}_z.$$

Somit sind radiale bzw. tangentielle Beschleunigungen gegeben durch

$$a_r = \frac{d^2\rho}{dt^2} - \rho \cdot \left(\frac{d\phi}{dt} \right)^2 \text{ und}$$

$$a_t = 2 \cdot \frac{d\rho}{dt} \cdot \frac{d\phi}{dt} + \rho \cdot \frac{d^2\phi}{dt^2}.$$

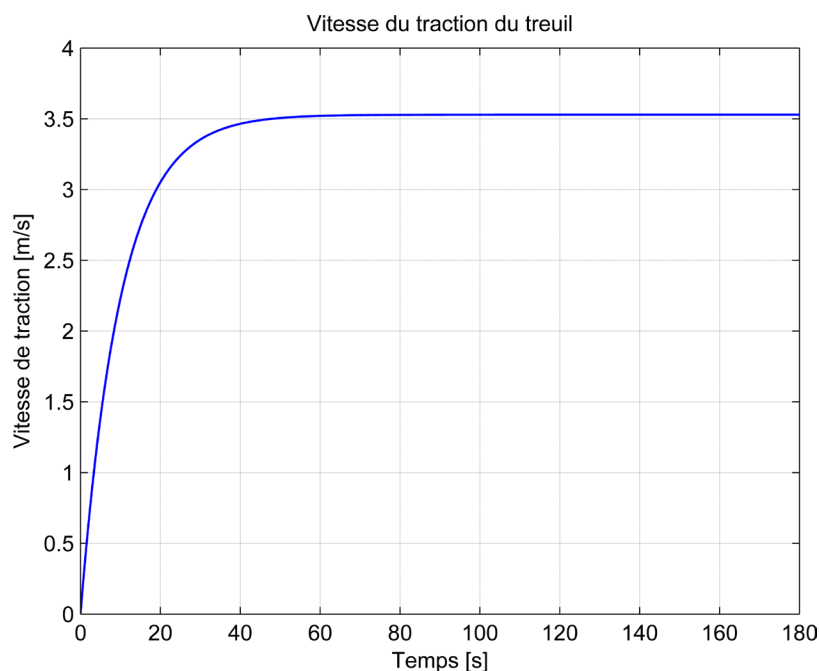
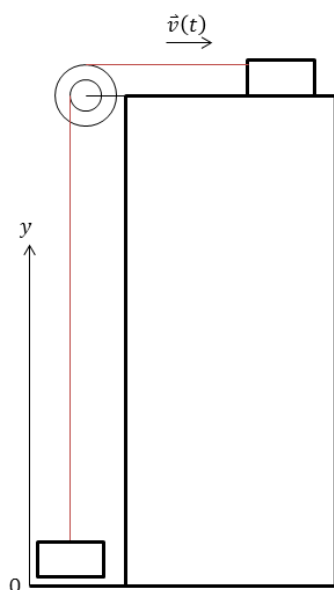
- c) Seien R der Radius des Karussells, v_r die Norm der konstanten radialen Geschwindigkeit und $\phi(t) = \phi_0 + \omega \cdot t$, mit Anfangswinkel ϕ_0 . Die Trajektorie des Mannes in Zylinderkoordinaten ist

$$\rho(t) = R - v_r \cdot t.$$

Daraus folgt die Beschleunigung $\vec{a}_P = -\rho(t) \cdot \omega^2 \cdot \vec{e}_\rho - 2 \cdot v_r \cdot \omega \cdot \vec{e}_\phi$. Eine tangentielle Beschleunigung ist folglich unabdingbar in diesem Bezugssystem, damit der Rotation entgegengewirkt werden kann und die gewünschte Trajektorie beigehalten wird.

Üb.4 Seilzug und Laufrolle

a)



- b) $\omega(t) = \frac{v_T}{R} \cdot (1 - \exp(-A \cdot t))$; $\alpha(t) = \frac{d(\omega(t))}{dt} = \frac{v_T}{R} \cdot A \cdot \exp(-A \cdot t)$. Da die beiden Zylinder konzentrisch sind, finden wir dieselben $\omega(t)$ und $\alpha(t)$ für beide Zylinder.

- c) Die Höhe der Babywanne als Funktion der Zeit ist gegeben durch:

$$y(t) = \frac{v_T}{A} \cdot \frac{r}{R} \cdot (A \cdot t + \exp(-A \cdot t) - 1) \Rightarrow v_T = A \cdot H \cdot \frac{R}{r} \cdot \frac{1}{A \cdot T + \exp(-A \cdot T) - 1} = 3.5 \left[\frac{m}{s} \right].$$

- d) Die Beschleunigung der Wanne als Funktion der Zeit lautet

$$a(t) = \frac{d^2(y(t))}{dt^2} = v_T \cdot \frac{r}{R} \cdot A \cdot \exp(-A \cdot t)$$

und ist maximal für $t = 0[s]$ mit $a_{max} = v_T \cdot \frac{r}{R} \cdot A = 8.8 \cdot 10^{-2} \left[\frac{m}{s^2} \right]$.

- e) Die Rolle dreht sich $n = \frac{H}{2\pi r} = 477$ mal.

Üb.5 Uhr

- e) Die beiden Zeiger liegen übereinander falls ihre Winkel bezüglich der Semi-Vertikalen (definiert als Linie zwischen Uhrmittelpunkt und 12 :00h) gleich sind. Somit muss gelten

$$\theta_h(t) = \omega_h \cdot t = \frac{2\pi}{T_h} \cdot t, \quad \theta_m(t) = \omega_m \cdot t = \frac{2\pi}{T_m} \cdot t,$$

wobei $T_h = 43200s$ und $T_m = 3600s$. Falls die Zeiger zur Zeit t_k übereinanderliegen, gilt

$$\frac{2\pi}{T_m} \cdot t_k = \frac{2\pi}{T_h} \cdot t_k + k \cdot 2\pi \quad \Rightarrow \quad t_k = k \cdot \frac{T_h \cdot T_m}{T_h - T_m}$$

wobei k die Anzahl Umdrehungen des Minutenzeigers bezeichnet. Die Zeiger liegen erstmals $t_1 = 3927s = 1h 5'27''$ übereinander. Nach 11 Umdrehungen überlagern sie mittags. Somit überlagern sie 22 Mal täglich.

- f) Ähnlich müssen nun die ganzen Zahlen k_1 und k_2 gefunden werden, so dass

$$\frac{2\pi}{T_s} \cdot t = \frac{2\pi}{T_m} \cdot t + k_1 \cdot 2\pi = \frac{2\pi}{T_h} \cdot t + k_2 \cdot 2\pi.$$

Es folgt $\frac{k_2}{k_1} = \frac{719}{708}$, was $43200s$, also einem halben Tag entspricht. Die drei Zeiger sind also nur 2 Mal täglich deckend (mittags und mitternachts).