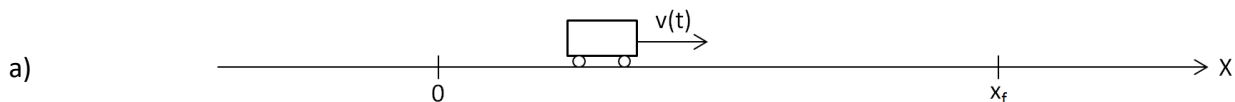


Lösungen 2 : Gleichförmige Bewegung, 2- und 3-dimensionale Bewegung und Wechsel der Bezugssysteme

Üb.1 Gleichförmige Bewegung in einer Dimension



- b) Die Geschwindigkeit ist die Integration der Beschleunigung nach der Zeit. Somit gilt: $v(t) = \frac{a_0}{B} \cdot \exp(B \cdot t) + C$, wobei C eine zu bestimmende Konstante ist. Hierzu werden die Eigenschaften der Trajektorie als Randbedingung gebraucht.

- c) Die Position ist die integrierte Geschwindigkeit (nach der Zeit). Somit findet man

$$x(t) = \frac{a_0}{B^2} \cdot \exp(B \cdot t) + C \cdot t + D.$$

Wiederum wird die Konstante D mithilfe der Eigenschaften der Trajektorie gefunden.

- d) Da die Anfangsposition Null ist, findet sich

$$0 = x(0) = \frac{a_0}{B^2} \cdot \exp(0) + C \cdot 0 + D = \frac{a_0}{B^2} + D \Rightarrow D = -\frac{a_0}{B^2}$$

$$\Rightarrow x(t) = \frac{a_0}{B^2} \cdot (\exp(B \cdot t) - 1) + C \cdot t.$$

Nur C muss noch bestimmt werden. Hierzu wird die vom Messgerät gefundene Geschwindigkeit benutzt

$$v_f = v(T) = \frac{a_0}{B} \cdot \exp(B \cdot T) + C \Rightarrow C = v_f - \frac{a_0}{B} \cdot \exp(B \cdot T).$$

Alle Parameter der Trajektorie wurden somit bestimmt. Das Messgerät befindet sich bei

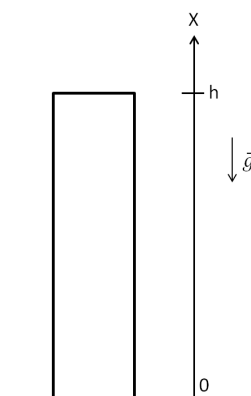
$$x_f = x(T) = \frac{a_0}{B^2} \cdot (\exp(B \cdot T) - 1) + \left(v_f - \frac{a_0}{B} \cdot \exp(B \cdot T) \right) \cdot T = 290[m].$$

Üb.2 Fallhöhe

Die Position wird anhand der Beschleunigung berechnet:

$$a(t) = -g \Rightarrow v(t) = -g \cdot t \Rightarrow x(t) = -\frac{g \cdot t^2}{2} + h$$

Da $x(T) = 0$ kann die Höhe abgeleitet werden: $h = \frac{g \cdot T^2}{2} = 51[m]$.



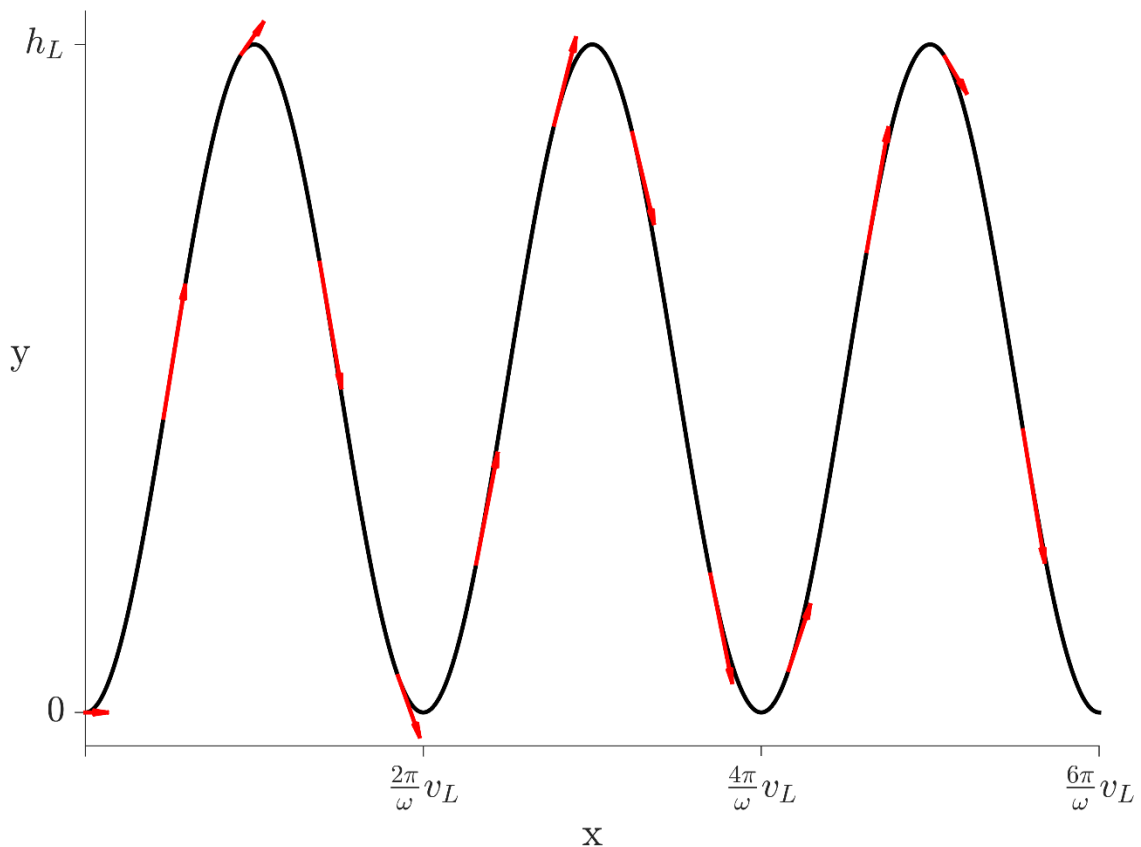
Üb. 3 Falke vs. Hase

a) Durch Ableiten der Positionen nach der Zeit ergeben sich die Geschwindigkeiten

$$\vec{v}_F(t) = \begin{pmatrix} v_F \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{v}_H(t) = \begin{pmatrix} v_H \\ \frac{h_H}{2} \omega_H \sin(\omega_H t) \end{pmatrix}.$$

Daraus folgen durch erneutes Ableiten die Beschleunigungen

$$\vec{a}_F(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad , \quad \vec{a}_H(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{h_H}{2} \omega_H^2 \cos(\omega_H t) \end{pmatrix}.$$



Trajektorie (schwarz) und Geschwindigkeit (rot) des Hasens, gegeben in der XY-Ebene.

b) Der Falke fängt den Hasen zur Zeit t , falls gilt

$$\vec{r}_F(t) = \vec{r}_H(t),$$

somit folgt
$$\begin{cases} \omega_H \cdot t = \frac{\pi}{2} + k\pi, & k \in \mathbb{N} \\ t = \frac{x_{0,F}}{v_F - v_H} \end{cases}.$$

Ein Fangen impliziert zudem, dass $v_F = v_H + \frac{x_{0,F} \cdot \omega_H}{\frac{\pi}{2} + k\pi}$.

Ein Sprung dauert $\frac{2\pi}{\omega_H}$. Der Hase erreicht seinen Bau nach $n_s \cdot \frac{2\pi}{\omega_H}$.

Daraus folgt für Geschwindigkeiten mit k zwischen 0 und $(2n_s - 1)$ holt der Falke den Hasen ein.

Üb.4 Beschleunigung in 3D

- a) Durch Integration findet sich $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) \\ \frac{a}{\omega} \cos(\omega t) \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix}$. Die Integrationskonstanten c_k sind gegeben durch die Randbedingung $\vec{v}(0) = \vec{v}_0$. Somit ist $\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} -\frac{a}{\omega} \sin(\omega t) + v_{0,1} \\ \frac{a}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) + v_{0,2} \\ v_{0,3} \end{pmatrix}$.

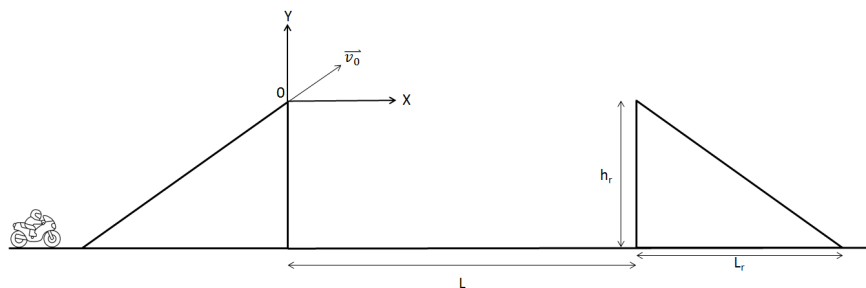
Durch erneutes Integrieren und mit Einsetzen der Anfangsposition $\vec{x}(0) = \vec{x}_0$ folgt

$$\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\omega^2} (\cos(\omega t) - 1) + v_{0,1}t + x_{0,1} \\ \frac{a}{\omega^2} \sin(\omega t) + (v_{0,2} - \frac{a}{\omega})t + x_{0,2} \\ v_{0,3}t + x_{0,3} \end{pmatrix}.$$

- b) Mit Hilfe der gegebenen Anfangsbedingungen erhalten wir $\vec{x}(t) = \begin{pmatrix} \frac{a}{\omega^2} \cos(\omega t) \\ \frac{a}{\omega^2} \sin(\omega t) \\ v_{0,3}t \end{pmatrix}$.

Die Trajektorie beschreibt eine sich um die Z Achse drehende Helix mit Radius $\frac{a}{\omega^2}$ in der XY Ebene und Schrittweite $\frac{2\pi}{\omega} \cdot v_{0,3}$ entlang Z.

Üb.5 Motorrad Stuntman



- a) Sei der Ursprung des Koordinatensystems auf dem Gipfel der ersten Rampe gewählt. In diesem System gilt

$$\vec{r}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \vec{v}_0 = v_0 \cdot \begin{pmatrix} L_r \\ h_r \end{pmatrix} \cdot (L_r^2 + h_r^2)^{-\frac{1}{2}}, a(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ -g \end{pmatrix}.$$

Die Fluggeschwindigkeit lautet

$$\vec{v}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot L_r \cdot (L_r^2 + h_r^2)^{-\frac{1}{2}} \\ -g \cdot t + v_0 \cdot h_r \cdot (L_r^2 + h_r^2)^{-\frac{1}{2}} \end{pmatrix}$$

und die Position als Funktion der Zeit während des Fluges ist somit

$$\vec{r}(t) = \begin{pmatrix} v_0 \cdot L_r \cdot (L_r^2 + h_r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot t \\ -\frac{g \cdot t^2}{2} + v_0 \cdot h_r \cdot (L_r^2 + h_r^2)^{-\frac{1}{2}} \cdot t \end{pmatrix}.$$

Um am höchsten Punkt der zweiten Rampe zur Zeit T aufzutreffen, muss gelten:

$$\vec{r}(T) = \begin{pmatrix} L \\ 0 \end{pmatrix} \rightarrow v_0 = \left(\frac{L \cdot g}{2 \cdot L_r \cdot h_r} \cdot (L_r^2 + h_r^2) \right)^{\frac{1}{2}} = 10 \left[\frac{m}{s} \right] \quad \text{mit} \quad \left(\frac{2 \cdot L \cdot h_r}{g \cdot L_r} \right)^{\frac{1}{2}} = 1.2[s].$$

- b) Die Geschwindigkeit ist parallel zur Rampe beim Auftreffen, falls $\vec{v}(T)$ kollinear zu $\begin{pmatrix} L_r \\ -h_r \end{pmatrix}$ ist. Durch Einsetzen der Ausdrücke aus a) findet sich

$$\vec{v}(T) = \begin{pmatrix} \left(\frac{g \cdot L \cdot L_r}{2 \cdot h_r} \right)^{\frac{1}{2}} \\ - \left(\frac{g \cdot L \cdot h_r}{2 \cdot L_r} \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} = \left(\frac{g \cdot L}{2} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} \left(\frac{L_r}{h_r} \right)^{\frac{1}{2}} \\ - \left(\frac{h_r}{L_r} \right)^{\frac{1}{2}} \end{pmatrix} \cdot \frac{(L_r \cdot h_r)^{\frac{1}{2}}}{(L_r \cdot h_r)^{\frac{1}{2}}} = \left(\frac{g \cdot L}{2 \cdot L_r \cdot h_r} \right)^{\frac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix} L_r \\ -h_r \end{pmatrix}.$$

Die Auftreffgeschwindigkeit ist somit tatsächlich parallel zur Rampe.

Üb.6 Relative Bezugssysteme

Es wird immer die Position eines Objektes bezüglich eines beliebig gewählten Punktes O gewählt. Ein sich bei O' befindender Beobachter bewegt sich bezüglich O , so dass $\vec{OO'} = \vec{d}(t)$.

- a) Für einen Punkt A gilt für seine Position: $\vec{O'A}(t) = \vec{OA}(t) - \vec{OO'}(t)$, für die Geschwindigkeit bezüglich O' : $\dot{\vec{O'A}}(t) = \dot{\vec{OA}}(t) - \dot{\vec{OO'}}(t)$ und für seine Beschleunigung bezüglich O' : $\ddot{\vec{O'A}}(t) = \ddot{\vec{OA}}(t) - \ddot{\vec{OO'}}(t)$.
- b) In diesem Fall ist $\vec{O'A}$ konstant. $\vec{OO'}(t) = \vec{z}(t)$, wobei $\dot{\vec{OA}}(t) = v_0 \vec{e}_z$ und $\ddot{\vec{OA}}(t) = 0$.
- c) Die Position des Falken bezüglich des Hasens ist: $\vec{r_{HF}}(t) = \vec{r_F}(t) - \vec{r_H}(t)$. Somit gilt

$$\vec{v_{HF}}(t) = \vec{v_F}(t) - \vec{v_H}(t) = \begin{pmatrix} v_F - v_H \\ -\frac{h_H}{2} \omega_H \sin(\omega_H t) \end{pmatrix}.$$

Ebenso $\vec{a_{HF}}(t) = \vec{a_F}(t) - \vec{a_H}(t) = -\vec{a_H}(t)$.

Um die relative Geschwindigkeit in der Basis $\{\hat{v}, \hat{v}_\perp\}$ auszudrücken (d.h. als ob der Hase immer in Richtung seiner Bewegung schauen würde), genügt es $\vec{v_F}(t)$ in dieser neuen Basis auszudrücken. Für einen Einheitsvektor $\hat{v} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ folgt $\hat{v}_\perp = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. $\vec{v_F} = v_F \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = v_F (a\hat{v} - b\hat{v}_\perp)$. Sei $|\vec{v_L}|$ die Norm von $\vec{v_L}$. Dann folgt

$$\vec{v_{HF}}(t) = v_F \left(\frac{v_H}{|\vec{v_H}|} \hat{v} - \frac{\frac{h_H}{2} \omega_H \sin(\omega_H t)}{|\vec{v_H}|} \hat{v}_\perp \right) - |\vec{v_H}| \hat{v}.$$

- d) Die Norm von $\vec{v_{HF}}$ ist maximal für $\omega_H t = \frac{\pi}{2} + k\pi$, $k \in \mathbb{N}$. Bei einer Kollision ist die relative Geschwindigkeit maximal. Ein Inertialsystem ist nach Definition eine Idealisierung. Für ein Inertialsystem R ist R' ebenfalls ein Inertialsystem falls gilt: $\vec{RR'}(t) = \vec{v}t + \vec{d}$ (d.h. R' wird mit konstanter Geschwindigkeit bezüglich R bewegt). Wird das Bezugssystem in welchem der Boden in Ruhe ist als Inertialsystem angenommen, dann sind die Bezugssysteme des Aufzugs und des Falken Inertialsysteme, nicht jedoch dasjenige des Hasen.