

Lösungen Serie 1 : Einheiten, Dimensionen und Bewegungsgleichung

Üb. 1 Wichtige Einheiten und Grössen

- a) Der tägliche Energieverbrauch pro Familie wird in Watt pro Tag umgerechnet (d.h. [J/s]). 54 MJ in 24 Stunden entsprechen einer Leistung pro Familie von

$$P_{\text{Familie}} = \frac{54 \cdot 10^6 \text{ [J]}}{24 \cdot 60 \cdot 60 \text{ [s]}} = 625 \text{ [W]} .$$

Daher kann der Stausee

$$N = \frac{P_0}{P_{\text{Familie}}} = \frac{100 \cdot 10^6 \text{ [W]}}{625 \text{ [W]}} = 160'000 \text{ Familien}$$

versorgen. Dies entspricht einem Grossteil der Genfer Bevölkerung.

- b) Der relative Fehler berechnet sich anhand

$$\text{Relativer Fehler} = \frac{10 - 9.81}{9.81} \cong 2\% .$$

Es ist somit wenig sinnvoll die Konstante g auf drei Kommastellen genau anzugeben, wenn eine Approximation mit $10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ lediglich eine Abweichung von 2% bedeutet. Somit darf in allen weiteren Übungsaufgaben (und in beinahe allen übrigen Anwendungen) guten Gewissens ein Wert von $10 \left[\frac{\text{m}}{\text{s}^2} \right]$ für die Gravitationskonstante angenommen werden.

- c) Durch Einsetzen der entsprechenden Einheiten erhält man

$$\left[\sqrt{\frac{G h}{c^5}} \right] = \sqrt{\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \left(\frac{\text{m}}{\text{s}} \right)^{-5}} = \sqrt{\frac{\text{m}^3}{\text{kg s}^2} \frac{\text{kg m}^2}{\text{s}} \frac{\text{s}^5}{\text{m}^5}} = \sqrt{\text{s}^2} = \text{s} .$$

Dies entspricht der Einheit einer Zeit in Sekunden.

Üb. 2 Umrechnungen von Einheiten

$$\text{a) } v \left[\frac{\text{km}}{\text{s}} \right] = v \cdot \frac{1 \text{ km}}{1 \text{ s}} = v \cdot \frac{1000 \text{ m}}{\frac{1 \text{ h}}{3600}} = 3.6 \cdot 10^6 \cdot v \left[\frac{\text{m}}{\text{h}} \right] .$$

$$1 \text{ [Gmin]} = 10^9 \text{ [min]} = 60 \cdot 10^9 \text{ [s]} = 60 \cdot 10^9 \cdot 10^9 \text{ [ns]} = 6 \cdot 10^{19} \text{ [ns]} .$$

$$\text{b) } G \left[\frac{\text{m}^3}{\text{kg} \cdot \text{s}^2} \right] = G \cdot \frac{1 \text{ m} \cdot 10^{-3} \text{ km} \cdot 10^9 \text{ nm}}{\frac{1}{1000} \text{ t} \cdot \frac{1}{60} \text{ min} \cdot \frac{1}{3600} \text{ h}} = 216 \cdot G \left[\frac{\text{m} \cdot \text{km} \cdot \text{nm}}{\text{t} \cdot \text{pmin} \cdot \text{Stunde}} \right] .$$

Üb. 3 Rote Blutkörperchen

- a) Sei x die Länge des Beines (in [cm]). Die total vom Blut zurückgelegte Distanz ist (vereinfacht betrachtet) $2x$. Die mittlere Geschwindigkeit eines roten Blutkörperchens beträgt somit

$$v_m = \frac{2x}{(t_{hinab} + t_{hinauf})} \quad (1)$$

Gefragt ist die Geschwindigkeit des nach unten fließenden Blutes v_{hinab} . Die Zeit eines Blutkörperchens um die Venen aufwärts zu fließen beträgt

$$t_{hinauf} = \frac{x}{v_{hinauf}} \quad (2)$$

Ebenso die Zeit um nach unten zu fließen

$$t_{hinab} = \frac{x}{v_{hinab}} \quad (3)$$

(3) und (2) werden in (1) substituiert und man erhält

$$v_m = \frac{2x}{\left(\frac{x}{v_{hinauf}} + \frac{x}{v_{hinab}}\right)} = \frac{2}{\left(\frac{1}{v_{hinab}} + \frac{1}{v_{hinauf}}\right)}.$$

Somit kann nach v_{hinab} aufgelöst werden

$$v_{hinab} = \left(\frac{2}{v_m} - \frac{1}{v_{hinauf}}\right)^{-1} = 6 \left[\frac{cm}{s}\right].$$

NB: Die Länge x muss somit zur Lösung der Aufgabe nicht bekannt sein.

- b) Das hinabfließende Blutkörperchen ist statisch in einem Referenzsystem R' , welches sich mit einer Geschwindigkeit von 6cm/s nach unten fortbewegt (diese Richtung sei als positiv definiert). Im Referenzsystem des Beines bewegt sich das hinaufsteigende Blutkörperchen mit -1.5 cm/s fort (i.e. entgegen der positiv-definierten Achse). Somit „sieht“ das hinabsteigende das aufsteigende Blutkörperchen vorbeiziehen und zwar mit der Geschwindigkeit

$$[v_{hinauf}]_{R'} = [v_{hinauf}]_R - [v_{hinab}]_R = -1.5 \left[\frac{cm}{s}\right] - 6 \left[\frac{cm}{s}\right] = -7.5 \left[\frac{cm}{s}\right].$$

NB: Wegen des negativen Vorzeichens sieht somit das hinabsteigende Blutkörperchen das hinaufsteigende tatsächlich aufsteigen. Ähnlich finden wir, dass für das hinaufsteigende Blutkörperchen, dass die arterielle Geschwindigkeit

$$[v_{hinab}]_{R'} = 7.5 \left[\frac{cm}{s}\right]$$

beträgt. Somit sieht das venöse Blutkörperchen das arterielle mit 7.5 [cm/s] hinabsteigen.

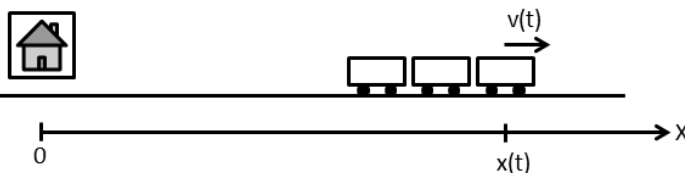
- c) Die Tatsache, dass sich die Blutkörperchen kreuzen hat keinen Einfluss auf ihre relative Geschwindigkeit. Ihre relative Position ändert das Vorzeichen. Somit ist die Position des venösen Blutkörperchen am Beinende zuerst positiv bezüglich des arteriellen Blutkörperchen, welches sich im oberen Teil des Beines befindet, und wird nach dem Kreuzen negativ.

Üb. 4 Gleichförmig Geradlinige Bewegung

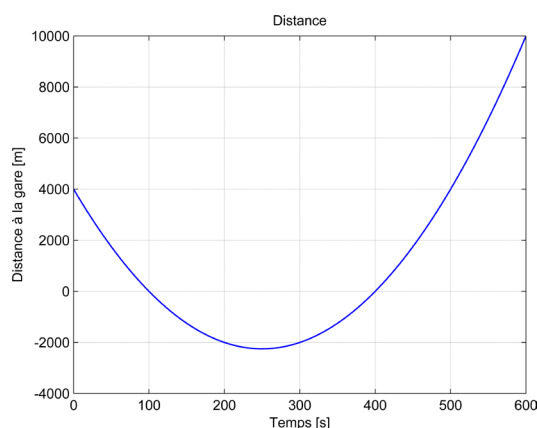
a)

Term	Dimension	Einheit
x	Distanz	$[m]$
c_1	Beschleunigung	$\left[\frac{m}{s^2}\right]$
c_2	Geschwindigkeit	$\left[\frac{m}{s}\right]$
c_3	Distanz	$[m]$

b) Situationsbeschreibung :



Position als Funktion der Zeit:



c) Gesucht wird die Zeit t_B , so dass die Position Null wird

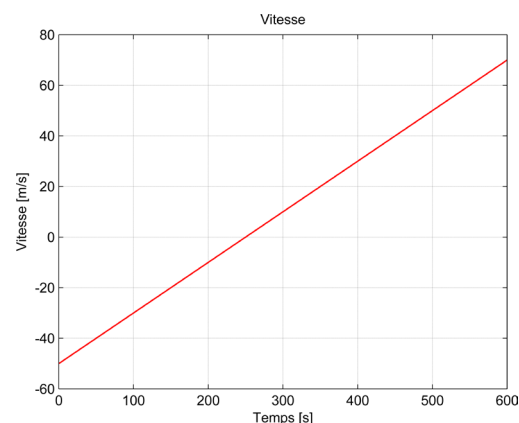
$$x(t_B) = 0 \Rightarrow t_B = \frac{-c_2 \pm \sqrt{c_2^2 - 4 \cdot c_1 \cdot c_3}}{2 \cdot c_1} \Rightarrow \begin{cases} t_B = 100 [s] \text{ oder} \\ t_B = 400 [s] \end{cases}$$

Ja, der Zug fährt 2x am Bahnhof vorbei.

d) Die Geschwindigkeit ist als Ableitung der Position definiert (und somit von der Zeit abhängig)

$$v(t) = 2 \cdot c_1 \cdot t + c_2$$

Geschwindigkeit als Funktion der Zeit :



Die Geschwindigkeit wird Null wenn

$$v(t_s) = 0 \Rightarrow t_s = \frac{-c_2}{2 \cdot c_1} = 250 \text{ [s]} .$$

- e) Mithilfe der Ausdrücke aus c) kann die Geschwindigkeit des Zuges bei seiner Durchfahrt des Bahnhofs ermittelt werden

$$v(t_B) = 2 \cdot c_1 \cdot t_B + c_2 = \pm \sqrt{c_2^2 - 4 \cdot c_1 \cdot c_3} \Rightarrow \begin{cases} v(t_B) = -30 \left[\frac{m}{s} \right] \text{ oder} \\ v(t_B) = 30 \left[\frac{m}{s} \right] \end{cases} .$$

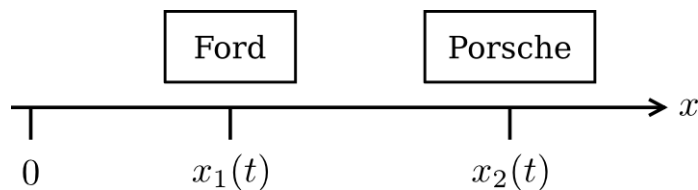
- f) Die Beschleunigung ist definiert als Ableitung der Geschwindigkeit nach der Zeit

$$a(t) = 2 \cdot c_1 = \frac{1}{5} \left[\frac{m}{s^2} \right] .$$

Somit ist die Beschleunigung positiv und konstant.

Üb. 5 Stuntmänner

- a)



Positionen, Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der beiden Fahrzeuge betragen zur Zeit $t=0$

- Ford Mustang: $x_1(0)=0$; $v_1(0)=0$; $a_1(0)=a$;
- Porsche: $x_2(0)=D$; $v_2(0)=-v_0$; $a_2(0)=0$;

Bei einer Kollision gilt

$$x_1(t) = x_2(t) .$$

Mithilfe der Bewegungsgeichungen $x_1(t) = \frac{1}{2}at^2$ und $x_2(t) = -v_0t + D$

finden wir

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a \cdot t^2 &= -v_0 \cdot t + D \\ \Rightarrow t &= \frac{-v_0 \pm \sqrt{v_0^2 + 2aD}}{a} . \end{aligned}$$

Da a und D positiv sein müssen, existieren 2 Lösungen für eine Kollisionszeit: eine positive und eine negative. Physikalisch sinnvoll ist die positive Lösung (da die negative einer Kollision in der Vergangenheit entspricht)

$$t_K = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}}{a}.$$

b) Zur Zeit der Kollision $t_K = \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}}{a}$ beträgt die Geschwindigkeit des Mustangs

$$v_1(t_K) = a \cdot t_K + v_1(0).$$

Durch Substitution findet man

$$v_1(t_K) = a \frac{-v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}}{a} = -v_0 + \sqrt{v_0^2 + 2aD}$$

$$v_1(t_K) = v_0 \left(\sqrt{1 + \frac{2aD}{v_0^2}} - 1 \right).$$

Die Geschwindigkeit zur Zeit des Aufpralls des Ford Mustang hängt von seiner Beschleunigung, der Geschwindigkeit des Porsches und der anfänglichen Distanz der beiden Autos ab.

c) Der Mustang ist mindestens doppelt so schnell wie der Porsche wenn

$$v_1(t_K) \geq 2v_0$$

$$v_0 \left(\sqrt{1 + \frac{2aD}{v_0^2}} - 1 \right) \geq 2v_0$$

$$\sqrt{1 + \frac{2aD}{v_0^2}} \geq 3 \rightarrow \frac{2aD}{v_0^2} \geq 8 \rightarrow aD \geq 4v_0^2$$

Die minimale Distanz (nach Einsetzen von $a = 2 \left[\frac{m}{s^2} \right]$ und $v_0 = 16.7 \left[\frac{m}{s} \right]$) beträgt

$$D \geq \frac{4v_0^2}{a} = \frac{\left(2 * 16.7 \frac{m}{s} \right)^2}{2 \frac{m}{s^2}} = 556 [m].$$

Üb. 6 Mathematik

- a) Die Approximationen der kleinen Winkel sind nur gültig, wenn die Winkel in Radian ausgedrückt werden (wie viele andere trigonometrische Relationen). Deshalb ist es empfehlenswert immer mit Radian zu rechnen. Somit stellt sich die Frage nach dem relativen Fehler der Approximationen für die Winkel $\frac{\pi}{18}$ [rad], $\frac{\pi}{9}$ [rad], $\frac{\pi}{6}$ [rad], und $\frac{\pi}{4}$ [rad]. Die Definition des relativen Fehlers ist

$$\text{relativer Fehler} = \frac{\text{Abschätzung} - \text{exakter Wert}}{\text{exakter Wert}}$$

θ [°]	θ [rad]	$\sin \theta$	relativer Fehler [%]
10	$\frac{\pi}{18} = 0.17$	0.17	0.51
20	$\frac{\pi}{9} = 0.35$	0.34	2.1
30	$\frac{\pi}{6} = 0.52$	0.50	4.7
45	$\frac{\pi}{4} = 0.79$	0.71	11

Somit bleibt der Fehler kleiner als 5% - sogar für Winkel bis 30°. Dies entspricht weitgehend der Realität und die Annäherung der kleinen Winkel wird z.B. oft für Pendelauslenkungen gebraucht.

- b) Die Höhe des Baumes beträgt $h = d \cdot \tan \theta = 5.1$ [m]. Gebrauchen wir die Approximation kleiner Winkel finden wir $h_{\text{est}} = d \cdot \theta = 5$ [m]. Der absolute Fehler ist also 10 cm.

