

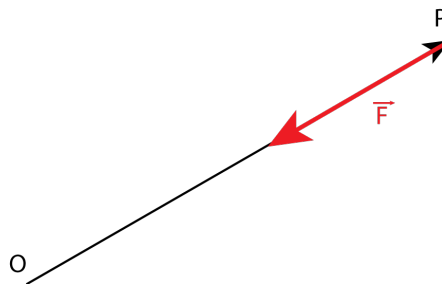
Lösungen #13: Zusammenfassung der Vorlesung

Üb 1: Richtung Unendlich, und noch weiter !

- a) Die Veränderung des Drehimpulses in Bezug auf den Ursprung 0 ist definiert gemäss :

$$\frac{d}{dt} \vec{L}_O = \vec{OP} \times \vec{F}$$

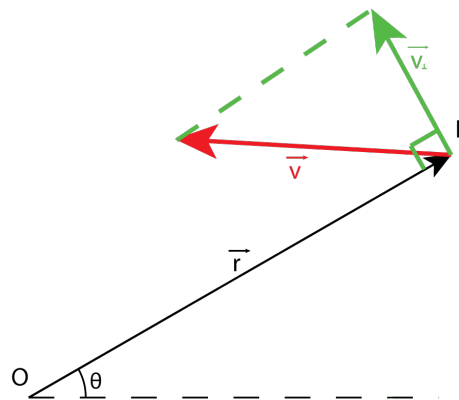
Wenn $\vec{F}$ Richtung Zentrum zeigt (anziehend oder abstossend), so verläuft $\vec{F}$ parallel zu $\vec{OP}$ und das Vektorprodukt ist 0. Der Drehimpuls bleibt somit erhalten.



- b) Der Drehimpuls der Erde in Bezug auf den Schwerpunkt des Sonnensystems ist gegeben mit :

$$\vec{L}_{CM} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m\vec{v}_\perp$$

Es wird dabei berücksichtigt, dass nur die Komponente der Geschwindigkeit, die rechtwinklig zum Ortsvektor $\vec{r}$ verläuft, zum Drehimpuls beiträgt.



Wir erhalten auch:

$$|\vec{v}_\perp| = r\dot{\theta}$$

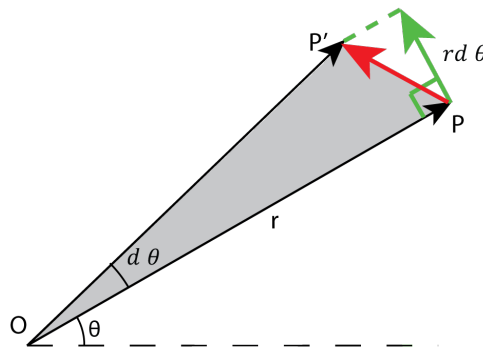
Somit:

$$|\vec{L}_{CM}| = |\vec{r} \times m\vec{v}_\perp| = mr^2\dot{\theta} = C$$

Der Drehimpuls (und somit auch sein Betrag) bleibt konstant, da auf die Erde auf ihrer Umlaufbahn nur die Gravitationskraft einwirkt, und diese ist Richtung Zentrum der Sonne gerichtet, wobei der Einfluss der Gravitationskraft der übrigen Planeten vernachlässigt wird.

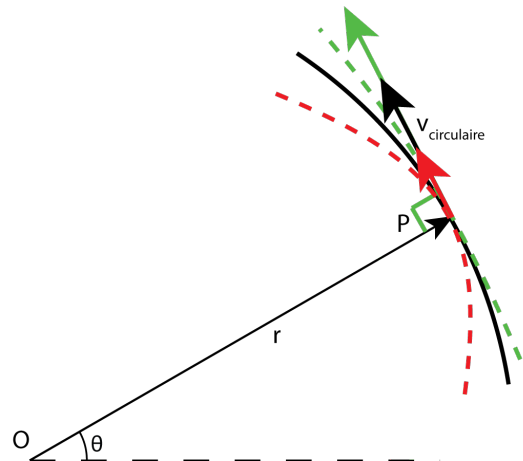
Der Drehimpulserhaltungssatz entspricht dem Flächensatz von Kepler. Tatsächlich beträgt die nahezu dreiecksförmige Fläche, die von der Erde während einer sehr kurzen Zeit dt überstrichen wird:

$$A = \frac{1}{2} r r \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \dot{\theta}$$



Wenn der Drehimpuls erhalten bleibt, so bleibt auch die während einer Zeiteinheit überstrichene Fläche konstant.

- c) Am 6. Juli hat die Distanz zwischen der Erde und dem Schwerpunkt des Sonnensystems ein Extremum (Minimum oder Maximum). Um die Frage zu beantworten, ob es sich dabei um ein Maximum oder ein Minimum handelt, kann man die Radialbeschleunigung (in Richtung r) vergleichen mit der Bedingung für die Kreisbewegung (Zentripetalbedingung). Wenn der Wert für die Radialbeschleunigung grösser ist als der für eine Kreisbewegung benötigte Wert, so nähert sich die Erde der Sonne und befindet sich somit in maximaler Entfernung. Im umgekehrten Fall entfernt sich die Erde und befindet sich somit in minimaler Entfernung.



Diese Analyse wird sowohl im Perihel wie auch im Aphel durchgeführt, da in diesen Punkten die Orbitalgeschwindigkeit senkrecht zum Radius verläuft. Daher ist die Komponente der Geschwindigkeit der Erde in Richtung von $\vec{r}$ gleich Null, und man kann direkt aus der Beschleunigung schliessen, ob sich die Erde von der Sonne entfernt oder sich ihr nähert.

Aus der Zentripetalbedingung erhält man:

$$\frac{GM}{r^2} = \frac{v^2}{r}$$

$$\rightarrow v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 29'540 \text{ m/s}$$

Wobei M der Masse des Sonnensystems entspricht (im Wesentlichen ist dies die Masse der Sonne).

Somit ist die Geschwindigkeit der Erde am 6. Juli (siehe Aufgabenstellung) kleiner als der Wert, den man aus der Zentripetalbedingung berechnet (siehe oben). Es handelt sich somit um den am weitesten entfernten Punkt, das Aphel. Verwendet man die gegebene Gleichung der Ellipse, so muss $r(\theta)$ maximal sein, was einem Winkel von $\theta = 180^\circ$ für eine positive Exzentrizität entspricht.

- d) Die Bahn eines Planeten um seinen Stern hängt von den Anfangsbedingungen der Bewegung ab, von der Geschwindigkeit und von der Position des Planeten sowie von den einwirkenden Kräften, in diesem Fall der Gravitationskraft der Sonne. Die Bahn der Erde müsste daher mit diesen drei Größen beschrieben werden können. Die ersten zwei Größen sind im Aphel bekannt, die Gravitationskraft hängt von der Masse der Sonne ab.

i)

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta}$$

Oder aus b) ist bekannt, dass der Drehimpuls erhalten bleibt. Man kann somit $\dot{\theta}$ auch ausdrücken mit :

$$\dot{\theta} = \frac{C}{mr^2}$$

Somit erhält man :

$$\dot{r} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{mr^2} = \frac{C}{m} \frac{1}{r^2} \frac{dr}{d\theta}$$

In diesem Ausdruck steht eine Funktion von r und der Ableitung nach θ . Man kann dieses Produkt auch ausdrücken mit einer einzigen Ableitung, indem der erste Term integriert wird:

ii)

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \dot{\theta} = \frac{C}{mr^2} \frac{dr}{d\theta} = \frac{C}{mr^2} \frac{d}{d\theta} \left(-\frac{C}{m} \frac{d}{d\theta} \left(\frac{1}{r} \right) \right) = -\frac{C^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

wobei $\dot{r}$ ersetzt wurde durch den Ausdruck in i).

- e) Die Erde wird von der Sonne in Richtung $\hat{e}_r$ angezogen. In dieser Richtung lautet das zweite Gesetz von Newton

$$-F_G = ma_r = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

wobei F_G der Gravitationskraft der Sonne auf die Erde entspricht. Man hat somit:

$$-\frac{GMm}{r^2} = m(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)$$

Mit dem Drehimpulserhaltungssatz (Aufgabe b)) kann $\dot{\theta}$ ersetzt werden und man erhält :

$$-\frac{GM}{r^2} = \left(\ddot{r} - \frac{C^2}{m^2 r^3} \right)$$

Aus Punkt d)ii) folgt, dass $\ddot{r}$ ersetzt werden kann und man erhält:

$$-\frac{GM}{r^2} = \left(-\frac{C^2}{m^2 r^2} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) - \frac{C^2}{m^2 r^3} \right)$$

Dies gibt uns:

$$GM = \frac{C^2}{m^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right)$$

Verwendet man den Drehimpulserhaltungssatz, so kann man daher das zweite Axiom von Newton nur mit Termen der Trajektorie r oder noch expliziter $r(\theta)$ ausdrücken.

Im Aphel ist r gegeben. Man muss noch $\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$ in diesem Punkt bestimmen:

$$\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) = \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1 + e \cos(\theta)}{p} \right) = \frac{d}{d\theta} \left(\frac{-e \sin(\theta)}{p} \right) = -\frac{e}{p} \cos(\theta)$$

Im Aphel ($\theta = 180^\circ$) erhalten wir:

$$\begin{aligned} \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r_a} \right) &= \frac{e}{p} \\ \frac{1}{r_a} &= \frac{1 - e}{p} \end{aligned}$$

r_a gleich dem Radius der Umlaufbahn im Aphel.

Um e und p zu bestimmen, benötigen wir zwei Gleichungen. Die erste Gleichung ist gegeben durch die Gleichung der Trajektorie im Aphel (letzte Gleichung oben) und die zweite Gleichung ist gegeben durch das zweite Axiom von Newton in diesem Punkt:

$$GM = \frac{C^2}{m^2} \left(\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r_a} \right) + \frac{1}{r_a} \right) = \frac{C^2}{m^2} \left(\frac{e}{p} + \frac{1-e}{p} \right) = \frac{C^2}{p m^2}$$

Man hat schlussendlich :

$$\begin{cases} p = \frac{C^2}{GMm^2} \\ \frac{1}{r_a} = \frac{1-e}{p} \rightarrow 1-e = \frac{C^2}{GMm^2 r_a} \rightarrow e = 1 - \frac{C^2}{GMm^2 r_a} \end{cases}$$

Aus den im Aphel gegebenen Grössen erhält man :

$$\begin{cases} p = 1.4954 \cdot 10^{11} \text{ [m]} \\ e = 0.016815 \end{cases}$$

Man hat für die Berechnung des Drehimpulses berücksichtigt, dass im Aphel die Orbitalgeschwindigkeit rechtwinklig zu $\vec{r}$ verläuft (wie im Perihel).

- f) Das Perihel wird erreicht wenn $\theta = 0^\circ$. Falls der Parameter p und die Exzentrizität e für die Erdumlaufbahn bekannt sind, so findet man für den Radius der Erdumlaufbahn im Perihel:

$$\begin{aligned} r_p &= \frac{p}{1+e} = 147\,067\,173 \text{ km} \\ v_p &= \frac{C}{mr_p} = \frac{v_a r_a}{r_p} = 30\,293 \text{ m/s} \end{aligned}$$

- g) Die Fluchtgeschwindigkeit für das Sonnensystem ist gegeben durch die Erhaltung der mechanischen Energie. Man bestimmt dazu die minimale kinetische Energie um eine unendlich grosse Entfernung mit der Geschwindigkeit Null zu erreichen. Die potentielle Energie zu Beginn besteht aus potentieller Energie der Sonne und potentieller Energie der Erde.

$$\frac{1}{2} m v_{lib}^2 - \frac{GM_{Soleil} m}{r} - \frac{GM_{Terre} m}{R_{terrestre}} = 0$$

wobei r dem Radius der Umlaufbahn der Erde und m der Masse der Sonde entspricht.

où r est le rayon orbital de la terre, m la masse de la sonde.

Im Aphel erhält man :

$$v_{lib,a} = \sqrt{2G \left(\frac{M_{Soleil}}{r_a} + \frac{M_{Terre}}{R_{terrestre}} \right)} = 43248 \text{ m/s}$$

Im Perihel erhält man:

$$v_{lib,p} = \sqrt{2G \left(\frac{M_{Soleil}}{r_p} + \frac{M_{Terre}}{R_{terrestre}} \right)} = 43933 \text{ m/s}$$

- h) Beim Start der Sonde kann man von der Bahngeschwindigkeit der Erde profitieren. Wenn man die Sonde in die gleiche Richtung wie die Richtung der Bahngeschwindigkeit losschickt, erhält man - wegen der vektoriellen Addition der Geschwindigkeiten - für die Geschwindigkeit in Bezug auf den Schwerpunkt der Erde, die man der Sonde erteilen muss, die Differenz aus der Fluchtgeschwindigkeit und der Bahngeschwindigkeit:

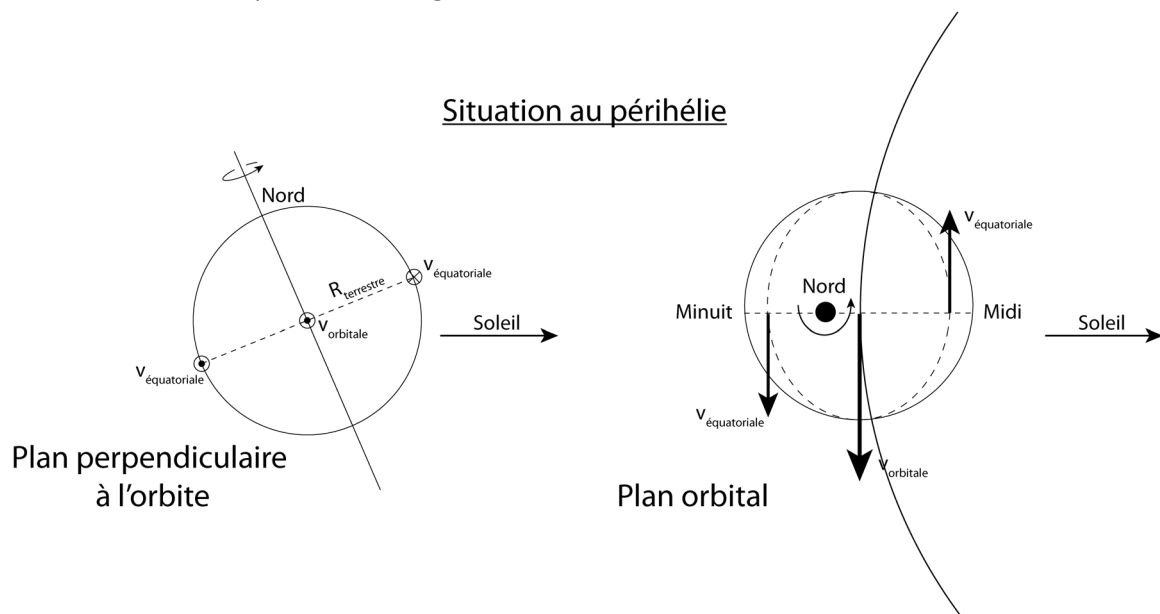
$$v_{lancement,a} = v_{lib,a} - v_a = 43248 - 29291 = 13957 \text{ m/s}$$

$$v_{lancement,p} = v_{lib,p} - v_p = 43933 - 30293 = 13640 \text{ m/s}$$

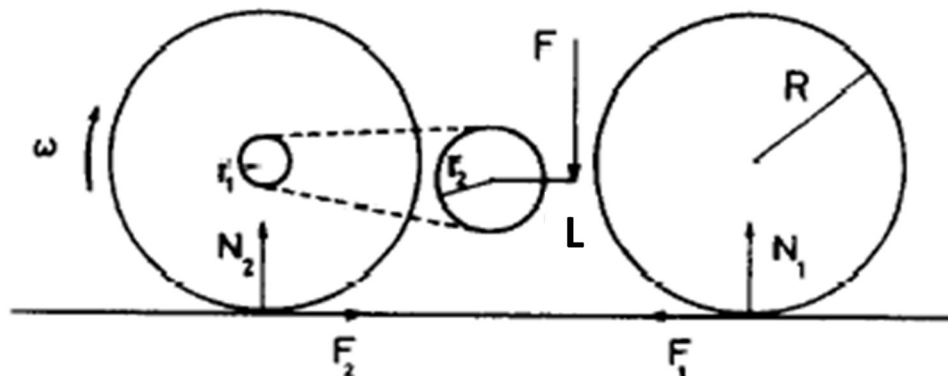
Es ist somit intelligenter, die Sonde im Perihel loszuschicken, d.h. am 6. Januar. Bei dieser Berechnung wird die Eigenrotation der Erde vernachlässigt. Um die Startgeschwindigkeit weiter zu verringern, kann man noch von der Erdrotation profitieren, indem man sich zum Äquator begibt, wo die Tangentialgeschwindigkeit der Erde maximal ist. Man hat somit:

$$v'_{lancement,p} = v_{lib,p} - v_p - \omega R_{terrestre} = 43933 - 30293 = 13176 \text{ m/s}$$

Da die Rotationsachse der Erde in die gleiche Richtung zeigt wie der Vektor der Rotationsbewegung der Erde auf der Bahn um die Sonne, erhält man die gleiche Ausrichtung der Bahngeschwindigkeit und der Geschwindigkeit am Äquator um Mitternacht. Die minimale Startgeschwindigkeit (siehe oben) ist somit gültig für einen Start am Äquator, Richtung Osten, und zwar am 6. Januar um Mitternacht.



Ex 2: Rollende Jugend



- i) Die Kräfte die auf das Velo einwirken sind :
- Das Gewicht $m_v g$ das im CDM des Velos angreift.
 - Das Gewicht $m_p g$ das auf die Pedale drückt (übertragen zum CDM).
 - Die Stützkkräfte die in den Kontaktpunkten der Räder angreifen ($N_1 = N_2 = (m_p + m_v)g/2$).
 - Die Reibungskräfte die in den Kontaktpunkten angreifen (F_1 und F_2).

e. Eine horizontale nach rechts gerichtete Kraft übertragen durch den Rahmen auf die Achse des Vorderrads.

ii) Die maximale Reibungskraft ist gegeben durch $\mu_s \cdot N_g = \mu_s(m_v + m_p)g$.

iii) Das 2. Axiom von Newton ergibt :

$$F_2 - F_1 = M \cdot a \quad (1)$$

Da $a = \alpha R$, kann (1) folgendermassen geschrieben werden :

$$F_2 - F_1 = M \cdot \alpha R \quad (2)$$

Aus dem 2. Axiom der Rotationen erhält man für das Hinterrad :

$$F' \cdot r_1 - F_2 \cdot R = I \cdot \alpha \quad (3)$$

Das Drehmoment, das von der Pedale auf das Kettenblatt ausgeübt wird, kann auf zwei Arten ausgedrückt werden:

$$F' \cdot r_2 = F \cdot L \quad (4)$$

Fasst man (3) und (4) zusammen, so erhält man :

$$FL \cdot \frac{r_1}{r_2} - F_2 \cdot R = I \cdot \alpha \quad (5)$$

Geht man davon aus, dass das Trägheitsmoment der beider Räder gleich gross ist, so kann man schreiben :

$$F_1 \cdot R = I \cdot \alpha \quad (6)$$

Schlussendlich, wenn man (2), (5) und (6) zusammenfasst, so findet man :

$$\begin{aligned} FL \cdot \frac{r_1}{r_2} - (F_1 + M \cdot \alpha R)R &= I \cdot \alpha \\ FL \cdot \frac{r_1}{r_2} - M \cdot \alpha R^2 &= 2I \cdot \alpha \\ FL \cdot \frac{r_1}{r_2} &= (2I + MR^2)\alpha \end{aligned}$$

Für die lineare Beschleunigung erhält man somit :

$$a = \frac{FL \cdot \frac{r_1}{r_2} \cdot R}{(2I + MR^2)} \quad (7)$$

Man sieht, dass das Verhältnis zwischen r_1 und r_2 möglichst gross sein muss, um eine maximale Beschleunigung zu erhalten. Der Velofahrer muss somit ein kleines Kettenblatt und einen grossen Ritzel wählen.

iv) Die Geschwindigkeiten v_p und v_v erhält man mit :

$$\begin{aligned} v_p &= \omega_2 L \\ v_v &= \omega_1 R \end{aligned}$$

Wobei ω_1 und ω_2 den Winkelgeschwindigkeiten des Hinterrads und des Kettenblatts entsprechen. Da das Kettenblatt und der Ritzel durch die Kette verbunden sind, erhält man auch :

$$\omega_2 \cdot r_2 = \omega_1 \cdot r_1$$

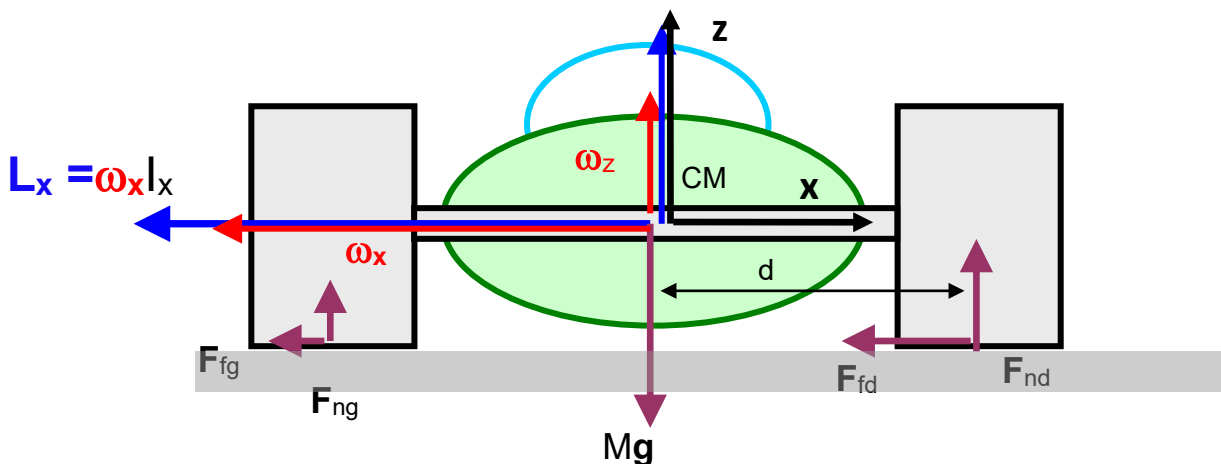
Wenn man diese 3 Gleichungen kombiniert, so kann man schreiben :

$$\frac{v_p}{v_v} = \frac{r_1 L}{r_2 R}$$

Um eine konstante Geschwindigkeit des Velos mit möglichst kleinem Aufwand aufrecht zu erhalten (v_p klein), muss der Velofahrer das Verhältnis r_1/r_2 minimieren, d.h. ein grosses Kettenblatt und einen kleinen Ritzel wählen.

- v) Die Kräfte, die auf den Velofahrer einwirken, sind das Gewicht (welches am CDM angreift), die statische Reibungskraft f und die Normalkraft F_N , beide greifen am Kontaktpunkt zwischen Rad und Boden an. Mit dem 2. Axiom von Newton kann man schreiben : $m \cdot v^2/R_v = f$ und $F_N = mg$. Das zweite Gesetz für die Rotationen ergibt: $D \sin(\theta) mg - m \cdot v^2/R_v \cdot D \cos(\theta) = 0$ (keinen Rotation um den Kontaktpunkt). D entspricht der Distanz zwischen dem Kontaktpunkt und dem CMD des Velos. Der zweite Term dieser Gleichung entspricht der « fiktiven » Kraft die dem Velofahrer ermöglicht, sein Gleichgewicht zu halten. Geht man von diesen Gleichungen aus, so erhält man die Beziehung $F_N 2R \sin(\theta) = f 2R \cos(\theta)$, was gleichbedeutend ist wie $\tan(\theta) = f/F_N$.

Ex 3 : Formel-1 Auto



Anmerkung: die angegebenen Kräfte entsprechen der Summe der Kräfte auf die Vorder- und Hinterräder.

a) Das Auto bewegt sich nach links und wir sehen es von hinten auf der Zeichnung. Wir können unser System anders darstellen. Mit dieser Wahl der Achsen ist ω_x negativ und v_{CM} positiv. Wir erhalten die Verhältnisse $R_v \omega_z = -R \omega_x = v_{CM}$, die wir schon von den Drehbewegungen kennen. Beachten Sie, dass das negative Vorzeichen aus der Wahl der Koordinaten Wahl folgt.

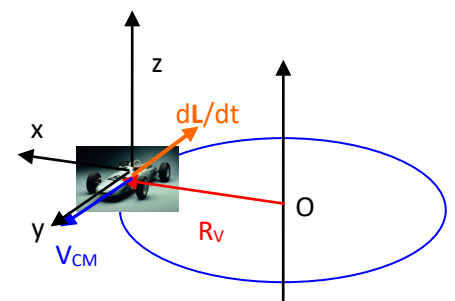
b) Analysieren wir zuerst die Bewegung des CM.

Das Auto ist nicht nach oben beschleunigt, somit $F_{ng} + F_{nd} - Mg = 0$ (1)

Die Reibungskräfte bewirken eine Zentripetalkraft: $F_{fd} + F_{fg} = -M \omega_z^2 R_v$ (2)

Die Haftreibungskräfte sind proportional zu den Normalkräften: $\frac{F_{fg}}{F_{ng}} = \frac{F_{fd}}{F_{nd}} = \frac{F_{fg} + F_{fd}}{F_{ng} + F_{nd}} = \frac{M a_x}{Mg} = -\mu$

wobei der positive Koeffizient μ eingesetzt wird, um die Notation zu erleichtern. Das negative Vorzeichen entspricht einer Linkskurve; Man hätte ein positives Vorzeichen für eine Rechtskurve.



c) Jetzt betrachtet man das Drehmoment auf die Räder nach der Richtungsänderung. Das Drehmoment $d\mathbf{L}/dt$ auf die Achsen zeigt in y-Richtung, nach hinten gerichtet. Es ist entgegengesetzt zum Drehmoment, das von den Achsen auf das Auto ausgeübt wird (Actio-Reactio). Das Drehmoment, das von den Reibungskräften in der Linkskurve stammt, lautet $\tau_f = |F_{fg} + F_{fd}|R > 0$ und ist nach vorne gerichtet.

Das Drehmoment, das von den Normalkräften stammt lautet $\tau_n = (-F_{nd} + F_{ng})d < 0$.

Damit das Auto nicht kippt, muss die Beschleunigung um die y-Achse gleich 0 sein ($d\omega_y/dt=0$), somit muss die Summe der Kräftepaare auf das Auto bezüglich der y Achse gleich Null sein:

$$\tau_{CM,y} = -(F_{nd} - F_{ng})d + (F_{ng} + F_{nd})\mu R - (d\mathbf{L}/dt)_y = 0 \quad (3)$$

In der Gleichung (3), wurden die Reibungskräfte durch μF_{ng} und μF_{nd} ersetzt.

Wir stellen fest, dass man den Term $\frac{d\vec{L}}{dt}$ zu den Drehmomenten der Reibung und der Reaktionskraft (Normalkraft) addieren muss. Dies folgt aus der Tatsache, dass die Achsen sich drehen müssen um eine Umdrehung des Autos zu ermöglichen. Da die Achsen einen Drehimpuls besitzen, muss ein Drehmoment vorhanden sein, damit sich die Achsen drehen. Dieses Drehmoment wird vom Chassis auf die Achsen ausgeübt und nach dem Prinzip Actio-Reactio üben die Achsen ein entgegengesetztes Drehmoment auf das Chassis aus. Somit entspricht $\frac{d\vec{L}}{dt}$ der Rotation längs ω_z des von den Rädern stammenden Drehimpulses ($L = \omega_x I_x$).

Für die y-Komponente des Drehimpulses benutzt man die Gleichung der Präzession des Drehmomentes, d.h. $\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\omega} \times \vec{L}$ und erhält mit der Definition von $L = \omega I$: $(d\mathbf{L}/dt)_y = (\omega_z L_x) = (\omega_x \omega_z I_x)$

d) Die Gleichungen (1-3) beschreiben die Dynamik des Autos. In der Gleichung 3 benutzt man (1) um F_{ng} zu eliminieren:

$$-(2F_{nd} - Mg)d + Mg\mu R - \omega_x \omega_z I_x = 0$$

Und somit

$$2F_{nd}d = Mg d + Mg\mu R - \omega_x \omega_z I_x$$

Man benutzt $R_v \omega_z = -R \omega_x = v_{CM}$ und $\mu = \left| \frac{\omega_z^2 R_v}{g} \right|$

somit: $2F_{nd} = Mg + M\omega_z^2 R_v R / d + \omega_z^2 I_x \frac{R_v}{Rd}$

$$2F_{nd} = Mg + \frac{\omega_z^2 R_v}{d} \left(MR + \frac{I_x}{R} \right)$$

$$F_{nd} = \frac{1}{2} \left\{ Mg + \frac{v_{CM}^2}{R_v d} \left(MR + \frac{I_x}{R} \right) \right\}$$

ebenfalls

$$F_{ng} = \frac{1}{2} \left\{ Mg - \frac{v_{CM}^2}{R_v d} \left(MR + \frac{I_x}{R} \right) \right\}, \text{ da } F_{ng} + F_{nd} = Mg$$

Man kann danach die Reibungskräfte erhalten, wenn man die Normalkräfte mit $-\mu$ multipliziert.

e) Für die Berechnung des Trägheitsmoments muss man berücksichtigen, dass die 4 Räder voll sind und deren jeweiliges Trägheitsmoment $I = mR^2/2$ lautet.

Das Auto beginnt (lateral) zu kippen, wenn $F_{ng}=0$, d.h. wenn

$$\frac{v_{CM}^2}{R_V d} \left(R + \frac{I_x}{MR} \right) = g$$

$$\frac{v_{CM}^2}{R_V d} R \left(1 + 2 \frac{m}{M} \right) = g$$

$$v_{CM}^2 = \frac{R_V}{R} \frac{gd}{\left(1 + 2 \frac{m}{M} \right)} = \frac{40}{0.7} \frac{12}{1.14} = 600 m^2 / s^2$$

d.h. wenn $v_{CM}=24m/s$.

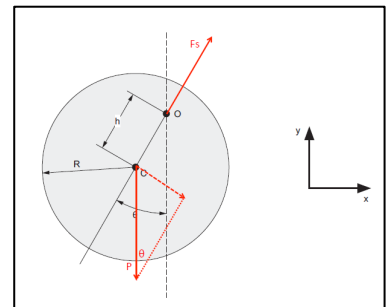
Man stellt fest, dass der Ausdruck I_x die maximal mögliche Geschwindigkeit ein bisschen reduziert. Das Drehmoment, das von der Achse auf das Auto ausgeübt wird, trägt zum Umkippen bei, sowie die Reibungskräfte.

Für eine Kurve in der anderen Richtung (nach rechts) ändert sich der Vorzeichen der Reibungskräfte und von ω_z (damit auch die beiden Drehmomente, die zum Umkippen beitragen) aber nicht die vertikalen Kräfte (dessen Drehmoment das Umkippen verhindert). Links/rechts wird vertauscht, dadurch bleibt die Form der Gleichungen dieselbe, sowie die maximal mögliche Geschwindigkeit für eine Kurve mit einem gegebenen Radius.

Üb 4 : Eine Scheibe und gedämpfte Schwingungen

- a) Die Kräfte, die auf die Scheibe einwirken sind die Stützkraft $\vec{F}_s$ der Rotationsachse, die am Rotationspunkt O wirkt und das Gewicht der Scheibe, welches am Schwerpunkt angreift C . Da die genaue Richtung der Stützkraft nicht bekannt ist, ist es sinnvoll das zweite Axiom von Newton für die Rotationen (auch bekannt als Theorem des Drehimpulses) am Wirkungspunkt dieser Kraft zu bestimmen, damit das Drehmoment gleich 0 ist.

$$\sum \vec{\tau}_O = \vec{\tau}_{\vec{F}_s, O} + \vec{\tau}_{m\vec{g}, O} = \underbrace{\vec{OO}}_{=0} \times \vec{F}_s + \vec{OC} \times m\vec{g} = \frac{d\vec{L}_O}{dt} = I_O \vec{\alpha}$$



Man wählt das Bezugssystem wie in der Figur, mit der z-Achse, die aus der Ebene herauszeigt. Man projiziert das Theorem des Drehmoments auf die z Achse:

$$I_O \ddot{\theta} = -mgh \sin(\theta) \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{mgh}{I_O} \sin(\theta) = 0$$

Wobei man $\alpha_z = \ddot{\theta} = \frac{\partial^2 \theta}{\partial t^2}$ benutzt. Das negative Vorzeichen kompensiert negative Werte des Winkels, das erhaltene Drehmoment ist somit positiv. Mit der Approximation für kleine Schwingungen, $\sin(\theta) \sim \theta$, wird die letzte Gleichung:

$$\ddot{\theta} + \frac{mgh}{I_O} \theta = 0$$

Dies entspricht der Gleichung eines harmonischen Oszillators mit $\omega_0 = \sqrt{\frac{mgh}{I_O}}$

Man benutzt das Steiner Theorem um das Trägheitsmoment I_O bezüglich der Achse, die durch O geht und die parallel zur Achse durch den Massenschwerpunkt C verläuft, zu bestimmen:

$$I_O = I_C + mh^2$$

Das Trägheitsmoment einer Scheibe mit Masse m und Radius R lautet: $I_C = \frac{mR^2}{2}$. Man erhält somit

$$I_O = \frac{1}{2} mR^2 + m \left(\frac{3R}{4} \right)^2 = \frac{1}{2} mR^2 + \frac{9}{16} mR^2 = \frac{17}{16} mR^2$$

Und somit

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{3mgR/4}{17mR^2/16}} = \sqrt{\frac{12g}{17R}} = 5.884 \text{ rad/s}$$

Die Periode T_0 kann berechnet werden mit $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ und somit

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{17R}{12g}} = 1.067 \text{ s}$$

- b) Aus $\theta(t) = Ae^{-\alpha t} \cos(\omega' t)$ folgt man, dass der Wert des Winkels als Funktion der Zeit eine Kombination von zwei Phänomenen ist: eine Schwingung $\cos(\omega' t)$, und die Abnahme der Amplitude wegen der Dämpfung, $a(t) = Ae^{-\alpha t}$

Man kann diese Gleichung auch so schreiben: $\theta(t) = a(t)\cos(\omega' t)$

Man betrachtet jetzt nur die Änderung der Amplitude. Die Bedingung für die Amplitude zur Zeit $t = 0$ ergibt, dass

$$\theta(t=0) = \underbrace{Ae^{-\alpha 0}}_{=1} \underbrace{\cos(\omega' 0)}_{=1} = \theta_0 \Rightarrow A = \theta_0 = 16^\circ$$

Man weiss, dass nach $t = 10 \text{ s}$ sich die Amplitude auf 6° verringert hat:

$$\theta(t = \Delta t) = Ae^{-\alpha \Delta t} \Rightarrow \alpha = \frac{\ln\left(\frac{\theta_0}{\theta(\Delta t)}\right)}{\Delta t} = \frac{\ln\left(\frac{16^\circ}{6^\circ}\right)}{10 \text{ s}} = 0.098 \text{ s}^{-1}$$

- c) In a) hat man die Kreisfrequenz berechnet und die Periode für kleine Schwingungen eines physikalischen Pendels ohne Dämpfung. Für Schwingungen mit Dämpfung erhält man für die Kreisfrequenz:

$$\omega' = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \Rightarrow \omega' = 5.883 \text{ rad/s}$$

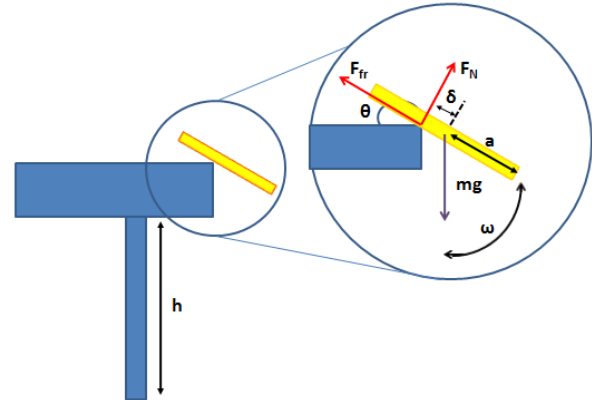
Und die Periode $T' = 2\pi/\omega'$ beträgt $T' = 1.068 \text{ s}$

- d) Die Amplitude nimmt ab um einen Faktor 10 während einer Zeit $\Delta t_{1/10}$, so dass

$$e^{-\alpha \Delta t_{1/10}} = \frac{1}{10} \Rightarrow \Delta t_{1/10} = \frac{\ln(10)}{\alpha} = 23.496 \text{ s}$$

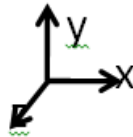
Weihnachts-Special: «Das Gesetz von Murphy»

1) Die drei einwirkenden Kräfte (F_{fr} , F_N und mg) sind in der nebenstehenden Abbildung eingezeichnet. Die Reibungskraft wirkt auf den Toast, so dass sie das Rutschen dem Tisch entlang verhindert. Es gibt ein kritisches δ , ab welchem der Toast anfängt zu rutschen und sich zu drehen. Die Bewegungsgleichung bestimmt man mit dem Drehimpuls:



$$(2) \quad \vec{\tau}_{CM} = I \alpha \hat{z} = m \left(\frac{a^2}{3} + \delta^2 \right) \dot{\omega} \hat{z}$$

$$(1) \quad \vec{\tau}_{CM} = \vec{R} \times m \vec{g} = -mg \delta \cos(\theta) \hat{z}$$



Das Trägheitsmoment wurde mit dem Satz von Steiner bestimmt, wobei angenommen wurde, dass das Trägheitsmoment entlang z dem Trägheitsmoment einer Stange der Länge $2a$ entspricht.

1) Wir können somit die beiden Gleichungen gleichsetzen. Man multipliziert beide mit 2ω und integriert nach der Zeit und verwendet:

$$\int_0^{t_f} 2\omega \dot{\omega} dt = \int_0^{t_f} 2\omega \frac{d\omega}{dt} dt = \int_0^{-\omega} 2\omega d\omega = (-\omega)^2 = \omega^2$$

$$\int_0^{t_f} \cos(\theta) \omega dt = \int_0^{t_f} \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} dt = \int_0^{-\theta} \cos(\theta) d\theta = \sin(-\theta) = -\sin(\theta)$$

So erhält man schließlich folgende Gleichung:

$$(3) \quad \omega^2 = \frac{6g}{a} \frac{\eta}{(1+3\eta^2)} \sin(\theta) \quad \text{with} \quad \delta = \eta a$$

3) Man stellt sich einen Grenzfall vor, für den das Gleiten nur bei $\theta = \pi/2$ eintritt. Wenn der Toast mehr als eine halbe Umdrehung durchführt, befindet sich die Butterseite oben (Murphy's law wäre dann falsch...).

Wir erhalten somit folgende Bedingung:

$$(4) \quad \omega \tau \geq \pi \quad \text{avec } \tau \text{ le temps de chute}$$

Die Gleichung für die Falldauer kann mit der Kinematik bestimmt werden.

$$(5) \quad \tau = \sqrt{\frac{2(h-2a)}{g}}$$

Man kann somit Gleichung (4) umschreiben um die Bedingung für h zu finden:

$$(6) \quad h \geq 2a + \frac{\pi^2 (1+3\eta^2) a}{12\eta}$$

Mit: $a=5\text{cm}$, $\eta=0.015$ (für einen Toast experimentell bestimmt), erhält man:

$$h \geq 2.8\text{m}$$

Wenn man annimmt, dass Tische eine durchschnittliche Höhe von 75cm haben, so stellt man fest, dass der Toast immer auf die Butterseite fallen wird. Der Toast hat also eine grundlegende Tendenz auf die Butter Seite zu fallen,

wegen den Gesetzen der Physik. Als solches, wäre dieses Beispiel für Murphy's law ein unvermeidbarer Bestandteil unseres Universums. Alle Informationen über den „tumbling toast“ können in « Tumbling toast, Murphy's Law and the fundamental constants » von Robert. A. J. Matthews, 1995 gefunden werden.