

Lösungen 12: Drehimpuls

Üb. 1. Von Rüdiger reingelegt

Die Summe aller von aussen einwirkenden Drehmomente ist null und der Drehimpuls bleibt erhalten, da das System abgeschlossen ist. Der Drehimpuls für ein Objekt mit konstanter Masse in Drehung um eine feste Rotationsachse ist:

$\vec{L} = I\vec{\omega}$. Im Folgenden wird der Drehimpuls bezogen auf das Zentrum der Drehscheibe berechnet.

Zum Zeitpunkt $t=0$ befinden sich die 5 Personen am Rand der Drehscheibe, der gesamte Drehimpuls (Personen und Drehscheibe) ist daher die Summe der Drehimpulse aller Personen (mit einem Abstand R vom Zentrum) und des Drehimpulses der Drehscheibe.

Zum Zeitpunkt $t=t_1$ ist der gesamte Drehimpuls (Personen und Drehscheibe) die Summe der Drehimpulse der Personen mit einem Abstand von $d=0.3m$ vom Zentrum der Drehscheibe und des Drehimpulses der Drehscheibe.

Wegen der Erhaltung des gesamten Drehimpulses gilt: $\vec{L}_0 = \vec{L}_1$

Die Drehimpulse sind alle parallel zur Rotationsachse z (orthogonal zur Drehscheibe und durch das Zentrum gehend).

$L_0 = I_0 \omega_0$ zum Zeitpunkt $t=0$,

Mit: $\omega_0 = (20U/min)(2\pi rad/U)/(60sec/min) = 2.09 rad/s$

$$I_0 = 5mR^2 + I_{Drehscheibe} = 5 \cdot 60 \cdot (1.5)^2 + 130 = 805 kg \cdot m^2$$

$$L_1 = I_1 \omega_1, \text{ zur Zeit } t=t_1. \text{ Mit: } I_1 = mR^2 + 4md^2 + I_{Drehscheibe} = 287 kg \cdot m^2$$

Und da $\vec{L}_0 = \vec{L}_1$:

$$I_0 \omega_0 = I_1 \omega_1 \Rightarrow \omega_1 = \frac{\omega_0 I_0}{I_1} = 5.88 rad/s$$

$$\text{und letztendlich } a_c = \omega_1^2 R = 51.9 m/s^2 = 5.3g$$

a_R ist daher größer als $4g$, und Roger fällt von der Drehscheibe.

Üb. 2. Drehimpuls des Erde-Mond-Systems

a) Trägheitsmoment einer Kugel: $I_{Boule} = \frac{2}{5} MR^2$

$$\text{Winkelgeschwindigkeit der Erde (Eigendrehung): } \omega_T = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86.4 \times 10^3 s}$$

Für den Drehimpuls der Erde (Eigendrehimpuls) erhält man somit:

$$L_T^S = \frac{2}{5} MR_T^2 \frac{2\pi}{86.4 \times 10^3 s}$$

b) Ein Mondzyklus dauert 27.55 Tage. Die Winkelgeschwindigkeit des Mondes (in seiner Bahn um die Erde) ist also

$$\omega_L = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{86.4 \times 10^3 \times 27.55 s}$$

Der Bahndrehimpuls ist also (mit $D_2 \cong 60R_T$, da sich der Massenschwerpunkt $0.732R_T$ vom Mittelpunkt der Erde entfernt befindet, und dem Massenverhältnis $M_L/M_T=0.0123$):

$$L_L^o = M_L D_2^2 \omega_L = 0.0123 \cdot M_T 60^2 R_T^2 \frac{\omega_T}{27.55}$$

c) Wenn der Mond sich um die Erde dreht, dreht er sich auch einmal um die eigene Achse. Mit dem Verhältnis der Entfernungen $R_L/R_T=0.272$ erhält man:

$$L_L^S = I_L \omega_L = \frac{2}{5} M_L R_L^2 \omega_L = \frac{2}{5} \cdot 0.0123 \cdot M_T \cdot (0.272)^2 \cdot R_T^2 \cdot \frac{\omega_T}{27.55} = 3.3 \cdot 10^{-5} L_T^S$$

Üb. 3. Kreisel

- a) Der Kreisel beschreibt eine Präzessionsbewegung und bildet einen Konus um die z-Achse (siehe Zeichnung). Wenn man den Kreisel angestoßen hätte ohne dass er sich dreht, dann hätte er keine Präzessionsbewegung gemacht und wäre direkt umgefallen.

- b) Siehe Zeichnung.

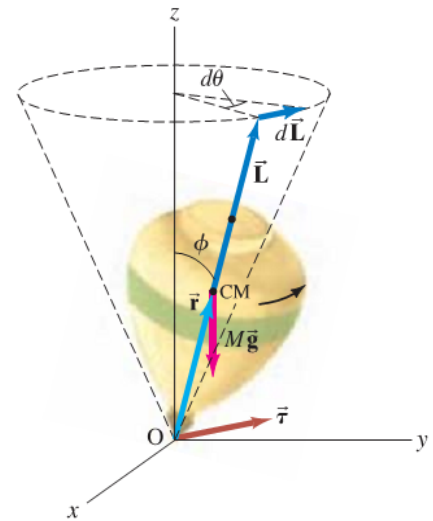
- c) Wir kennen die Präzessionsgeschwindigkeit:

$$\Omega = \frac{\tau_{net}}{L \sin \phi}$$

$$\text{Drehmoment: } \tau_{net} = |\vec{r} \times M\vec{g}| = rMg \sin \phi$$

$$\text{Daher bekommen wir: } \Omega = \frac{Mgr}{L}$$

$$\text{Drehimpuls: } L = I\omega \Rightarrow \Omega = \frac{Mgr}{I\omega} \Rightarrow \boxed{I = \frac{Mgr}{\Omega\omega}}$$



- d) Numerische Berechnung des Trägheitsmoments I:

$$\left. \begin{aligned} \Omega &= 2\pi f_{\Omega} = 2\pi\left(\frac{1}{6,5}\right) = 0,97 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \\ \omega &= 2\pi f_{\omega} = 2\pi(15) = 94 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned} \right\} \Rightarrow I = \frac{0,22 \text{ Kg} \cdot 9,8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \cdot 0,035 \text{ m}}{0,97 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \cdot 94,25 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}} = 8,3 \cdot 10^{-4} \text{ Kg} \cdot \text{m}^2$$

Üb. 4. Euler's Disk

- 1) Betrachten wir zunächst das Rollen ohne Rutschen einer Scheibe (wie ein Rad). Es besitzt eine Winkelgeschwindigkeit ω_R , vertikal zur Rotationsebene, und seine Geschwindigkeit ist gegeben durch:

$$v_{CM} = \omega_R \times R$$

Wenn die Scheibe fällt, dann ist die Rotationsachse nicht mehr vertikal sondern verläuft mit einem Winkel α zur Horizontalen, auch der Winkel zwischen ω_R und der Vertikalen beträgt α (siehe Bild). Die Scheibe wird also abgelenkt und macht eine Rotation mit Radius $R \cos(\alpha)$ um das Massenzentrum mit Winkelgeschwindigkeit ω_z . Diese ist vertikal ausgerichtet und ist durch das zweite Rotationsgesetz gegeben:

$$\alpha_z = \frac{d\omega_z}{dt} = \frac{\vec{\tau}_{CM}}{I_{CM}}$$

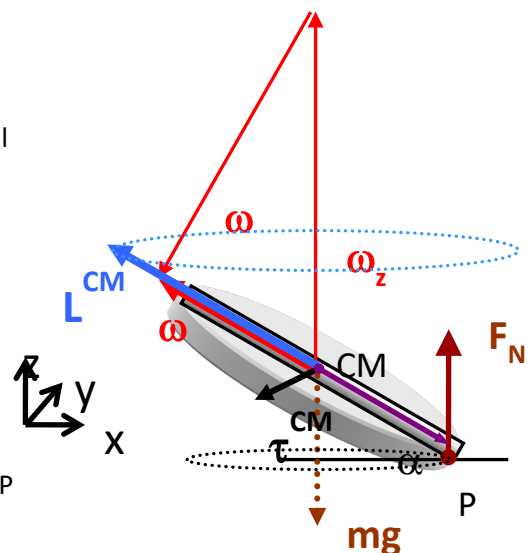
Das Massenzentrum bewegt sich nicht ($v_{cm}=0$), und der Kontaktpunkt P rotiert ohne zu rutschen ($v_p=0$) um eine Achse die durch das Zentrum der Achse verläuft. Der Kontaktpunkt führt also die beiden beschriebenen Rotationen aus, und die Geschwindigkeit am Punkt P für jeden Beitrag ist gegeben durch:

$$v_y(\omega_z) = \omega_z R \cos \alpha \quad \text{et} \quad v_y(\omega_R) = -\omega_R R$$

Die Bedingung des Rollens ohne Rutschen ist gegeben durch $v_p=0$, wir bekommen also:

$$\omega_R = \omega_z \cos \alpha \quad \text{et} \quad \vec{\omega}_D = \vec{\omega}_z + \vec{\omega}_R$$

Mit ω_D , der Nettorotation die durch das Massenzentrum und den Punkt P geht.



Lösung Nr. 12 vom 9.12.2024

Der Drehimpuls zeigt in Richtung von ω_D und somit in Richtung der Achse (siehe Skizze). Das Drehmoment das auf das Massenzentrum wirkt (dies wird im Detail in der nächsten Frage beschrieben) verläuft vertikal zur Ebene die von R und der Reibungskraft gebildet wird, es führt zur Präzession, hat aber keinen Einfluss auf die Neigung. Unter diesen Bedingungen dreht sich die Disk für immer!

2) Wie wir vorher beschrieben haben, zeigt der Drehimpuls in Richtung der Achse, die durch das Massenzentrum und den Punkt P geht und die eine Präzession um die z-Achse beschreibt. Daher haben wir:

$$(1) \quad \frac{d\vec{L}_{CM}}{dt} = \vec{\omega}_Z \times \vec{L}_{CM} = -\omega_Z L_{CM} \cos \alpha$$

Danach ist die Disk einem Kräftepaar unterworfen, hervorgerufen durch die Reaktionskraft F_N :

$$(2) \quad \vec{\tau}_{CM} = \vec{R} \times \vec{F}_N = -R F_N \cos \alpha = -R m g \cos \alpha$$

In dem wir (1) und (2) zusammenfassen, erhalten wir:

$$(3) \quad R m g = \omega_Z L_{CM}$$

Ausgehend vom Drehimpuls kann eine andere Gleichung erhalten werden:

$$(4) \quad L_{CM} = I_{CM} \omega_D = I_{CM} \omega_Z \sin \alpha \quad \text{avec} \quad I = \frac{m R^2}{4}$$

Wir können daher die Winkelgeschwindigkeit ω_Z ableiten indem wir die Gleichungen (3) und (4) kombinieren:

$$(5) \quad R m g = I_{CM} \omega_Z^2 \sin \alpha \Rightarrow \omega_Z^2 = \frac{4g}{R \sin \alpha}$$

Wenn die Disk also fast parallel zum Tisch verläuft ($\alpha \rightarrow 0$), dann geht die Frequenz von $P \rightarrow \infty$ (daher der Klang am Ende)

3) Wenn wir das Rutschen mit einbeziehen, dann muss ein neues Drehmoment berechnet werden. Die Reibungskraft ist in der entgegengesetzten Richtung zur Bewegungsrichtung. Da das Drehmoment orthogonal zur Ebene die von R und der Reibungskraft gebildet wird, verläuft, zeigt es senkrecht zur Disk-Ebene, und führt zu einer Änderung des Drehmoments, somit fällt die Disk.