Lösungen #11 : Rotationen mit starrer Achse

Üb 1. Trägheitsmoment

Achse A, $I_A = m_1(0) + m_2 (d_1 + d_2)^2 = 45$ kg·m^2

Achse B, $I_B = m_1 d_1^2 + m_2 d_2^2 = (3\text{ kg})(1\text{m})^2 + (5\text{ kg})(2\text{ m})^2 = 23$ kg·m^2

Achse C, $I_C = m_2(0) + m_1 (d_1 + d_2)^2 = 27$ kg·m^2

Achse D, $I_D = 0$ kg m^2

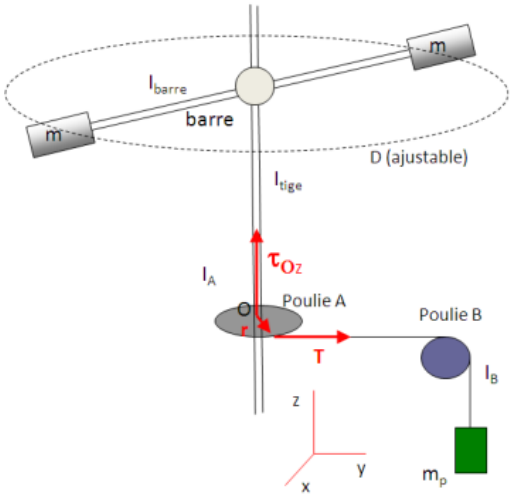
Beachten Sie, dass I_D gleich 0 ist, da die Massen als Punktmassen betrachtet werden.

Üb 2. Variables Trägheitsmoment

a. Trägheitsmoment des gesamten Systems:

$$I^z = 2 \cdot I^m + I^{barre} + I^{tige} + I^A + I^B$$

Da D>>r_1, können wir I^{barre} , I^{tige}, I^A und I^B vernachlässigen (siehe Übung 1), Somit : $I^z \approx 2mD^2$



b. Es gilt :

- 2. Axiom Newton: $T - m_p \cdot g = m_p \cdot a_z$ in z-Richtung (i)
- Drehmoment der Fadenkraft :$\tau = T \cdot r = I^z \cdot \alpha$ (ii)
- Rollen ohne Rutschen : $a_z = -\alpha \cdot r$ (iii)

Und somit : $T - m_p \cdot g = -m_p \cdot \alpha \cdot r$

Ersetzt man T durch Gleichung (ii), so folgt daraus

$$\frac{I \cdot \alpha}{r} - m_p \cdot g = -m_p \cdot \alpha \cdot r$$

$$\frac{I \cdot \alpha}{r} + m_p \cdot \alpha \cdot r = m_p \cdot g$$

$$\alpha \left(\frac{I^z}{r} + m_p \cdot r \right) = m_p \cdot g$$

$$\alpha = \frac{m_p \cdot g}{\frac{I^z}{r} + m_p \cdot r} = \frac{g}{\frac{I^z}{m_p \cdot r} + r} = \frac{g}{r\left(\frac{I^z}{m_p \cdot r^2} + 1 \right)} = \frac{g}{r\left(\frac{2mD^2}{m_p \cdot r^2} + 1 \right)}$$

Da die Winkelbeschleunigung proportional zu 1/D^2 ist, nimmt sie zu, wenn der Abstand D und somit auch das Trägheitsmoment abnimmt.

Üb 3. Spulen, an denen mit einer Schnur gezogen wird

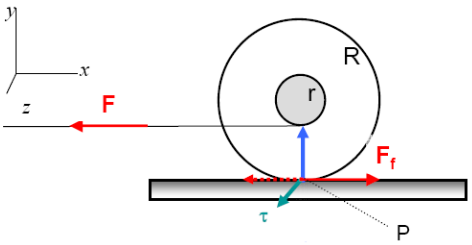
a)

Situation 1 :

- Trägheitsmoment bezogen auf P : $I^P = \frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)R^2$
- Drehmoment bezogen auf P : $\tau = F(R-r)$

Bewegungsgleichung : $\tau = I \cdot \alpha$

- $\omega = \frac{-v}{R}$; $\frac{d\omega}{dt} = \frac{-a_{CM}}{R}$ (Bedingung für Rollen ohne Rutschen)



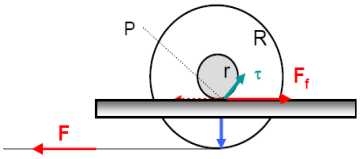
Somit gilt : $\tau = -I \cdot \frac{a}{R}$

$$F(R-r) = -\frac{\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)R^2}{R} \cdot a_{CM} \quad \rightarrow \quad a_{CM} = -\frac{R \cdot F(R-r)}{\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)R^2}$$

Da sowohl Zähler als auch Nenner positiv sind, ist die Beschleunigung negativ und somit nach links gerichtet.

Situation 2 :

- Trägheitsmoment bezogen auf P : $I^P = \frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)r^2$
- Drehmoment bezogen auf P : $\tau = -F(R-r)$



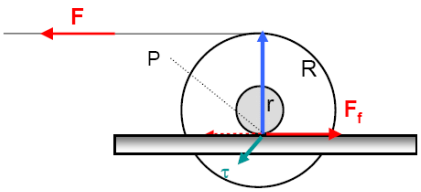
$$-F(R-r) = -\frac{\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)R^2}{R} \cdot a_{CM}$$

$$a_{CM} = \frac{R \cdot F(R-r)}{\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)r^2}$$

Die Beschleunigung ist jetzt nach rechts gerichtet.

Situation 3 :

- Trägheitsmoment bezogen auf P : $I^P = \frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)r^2$
- Drehmoment bezogen auf P : $\tau = F(R+r)$



$$a_{CM} = -\frac{R \cdot F(R+r)}{\frac{mr^2}{2} + \frac{MR^2}{2} + (m+M)r^2}$$

Die Beschleunigung ist nach links gerichtet.

b) Damit die Beschleunigung gleich Null wird, muss das Drehmoment bezogen auf P Null sein, d.h. die beiden Vektoren $\vec{F}$ und $\vec{d}$ müssen dazu kollinear sein (d ist gleich der Distanz zwischen dem Rotationszentrum und dem Angriffspunkt der Kraft).

Üb. 4 Resident Evil – Apokalypse

Dieses Problem kann mit den Gesetzen der Dynamik oder mit Energieerhaltung gelöst werden. Wir werden die Gesetze der Dynamik verwenden. Die Konvention für das Vorzeichen des Drehmoments und der Winkelbeschleunigung kann der Abbildung in der Aufgabenstellung entnommen werden. Da das Seil tangential zur Rolle verläuft, erhält man für das Drehmoment der Spannung im Seil $\tau = TR$. Die beiden Formen für das zweite Axiom von Newton für Alice und für die Rolle sind :

Alice (F = ma) $mg - T = ma$ (i)

Rolle (τ = I α) $T \cdot R = \frac{1}{2}MR^2 \cdot \alpha$ (ii)

wobei man I = ½ MR^2 verwendet (Trägheitsmoment einer Scheibe). Da das Seil und der Rand der Rolle die gleiche Geschwindigkeit haben (das Seil rutscht nicht), erhält man v = ωR und a = αR. Verwendet man dies in (ii) so bekommt man

$$T = \frac{1}{2}M \cdot a \qquad \text{(iii)}$$

Addiert man (i) und (iii) so erhält man

$$a = \frac{mg}{m+\frac{M}{2}} \qquad \text{(iv)}$$

Wir müssen nun die Geschwindigkeit von Alice nach einem freien Fall aus der Höhe 3 m bestimmen. Energieerhaltungssatz:

$$mgh = \frac{1}{2}m \cdot {v_{free}}^2$$

$$v_{free} = \sqrt{2gh} \qquad \text{(v)}$$

Die benötigte Zeit um einen „kontrollierten" Sprung mit der Rolle zu realisieren, kann bestimmt werden aus der Gleichung:

$$x(t) = \frac{1}{2}a \cdot t^2 + v_0 \cdot t + x_0 = \frac{1}{2}a \cdot t^2 \qquad \text{(vi)}$$

$$t = \sqrt{\frac{2x}{a}} \qquad \text{(vii)}$$

Bedingung ist, dass die Geschwindigkeit am Boden gleich gross ist wie v_{free}. Die Geschwindigkeit kann bestimmt werden mit v=at. Kombiniert man (iv), (v) und (vii) so erhält man für $v_{free} = a \cdot t$:

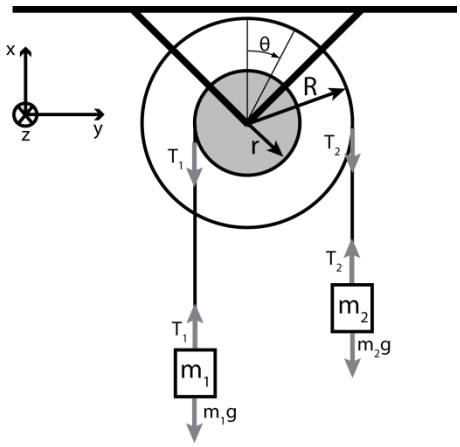
$$\sqrt{2gh} = a \cdot \sqrt{\frac{2x}{a}} \quad \rightarrow \sqrt{\frac{2gh}{2x}} = \sqrt{a} \quad \rightarrow \frac{2gh}{2x} = a$$

$$\frac{2gh}{2x} = \frac{mg}{m+\frac{M}{2}}$$

Man erhält M=3600 kg. Für einen Stahlzylinder (ρ=7000 kg/m^3) mit der Dicke l=1m, entspricht dies einem Volumen von 0.51 m^3 , d.h. einem Radius von 0.4 m.

Üb 5. Gewicht und Gegengewicht…

a) Wir definieren, dass θ im Uhrzeigersinn zeigt, $\vec{\omega}$ zeigt Richtung z (in die Ebene hinein) mit dem Betrag $\omega = \frac{d\theta}{dt}$.



Das Drehmoment für m_1 ist :

$$\left(-r\vec{e}_y\right) \times \left(-m_1 g\vec{e}_x\right) = -m_1 gr\ \vec{e}_z.$$

Das Drehmoment für m_2 ist :

$\left(R\vec{e}_y\right) \times \left(-m_2 g\vec{e}_x\right) = m_2 gR\ \vec{e}_z$

Das gesamte Drehmoment ist somit :

$\vec{\tau}_{tot} = (m_2 gR - m_1 gr)\ \vec{e}_z = 0.98\ \vec{e}_z$

Damit erhält man :

$I\frac{d\vec{\omega}}{dt} = 0.98\ \vec{e}_z\ mit\ g = 9.8m \cdot s^{-2}.$

Die Rolle bewegt sich somit im Uhrzeigersinn.

b) Das Drehmoment der beiden Kräfte bewirkt eine Drehung im Uhrzeigersinn.

Das zweite Axiom von Newton für m_1 ergibt: $m_1 a_x = -m_1 g + T_1$

$$a_x = \frac{dv_x}{dt} = \frac{d}{dt}(\omega r) = r\frac{d\omega}{dt}$$

Man erhält also : $T_1 = m_1\, r\frac{d\omega}{dt} + m_1 g$

Wenn man dasselbe mit m_2 macht, so erhält man: $T_2 = -m_2\, R\frac{d\omega}{dt} + m_2 g$

Das negative Vorzeichen für den ersten Term stammt aus der Tatsache, dass wenn der Wert von ω positiv ist, so ist v_x von m_2 negativ (Die Rolle dreht im Uhrzeigersinn). Es gilt: $\vec{v}_{m2} = \omega\vec{e}_z \times R\vec{e}_y = -\omega R\vec{e}_x$

Somit ist für m_2: $v_x = -\omega R$

Das zweite Axiom von Newton für die Rotation der Rolle ergibt :

$$\sum_i \vec{\tau}_i = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

$$T_2 R\vec{e}_z - T_1 r\vec{e}_z = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$

Alle Vorgänge zeigen in Richtung z, somit kann man sich auf diese Richtung beschränken :

$$T_2 R - T_1 r = I\frac{d\omega}{dt}$$

Ersetzt man die Werte von T_1 und T_2: $-m_2\, R^2\frac{d\omega}{dt} + m_2 Rg - \left(m_1\, r^2\frac{d\omega}{dt} + m_1 rg\right) = I\frac{d\omega}{dt}$

So erhält man die Bewegungsgleichung :

$$\frac{d\omega}{dt}(I + m_2 R^2 + m_1 r^2) = m_2 Rg - m_1 rg$$

$$\frac{d\omega}{dt} = \frac{m_2 Rg - m_1 rg}{(I + m_2 R^2 + m_1 r^2)}$$

$$\omega(t) = \frac{m_2 Rg - m_1 rg}{(I + m_2 R^2 + m_1 r^2)}t + C$$

Mit der Anfangsbedingung (Zustand der Ruhe) erhält man C=0. $\omega(t) = \frac{m_2 Rg - m_1 rg}{(I + m_2 R^2 + m_1 r^2)}t$

Die Geschwindigkeit der Masse 2 in Richtung x ist gegeben durch : $v_x = -\omega R = R\frac{-(m_2 Rg - m_1 rg)}{(I + m_2 R^2 + m_1 r^2)}t$

Nach Integration erhält man die Position in Abhängigkeit der Zeit : $x(t) = \frac{1}{2}R\frac{-(m_2 Rg - m_1 rg)}{(I + m_2 R^2 + m_1 r^2)}t^2 + K$

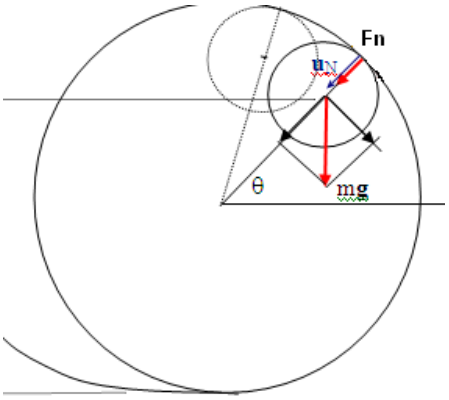
Nun sucht man die Zeit t_f für die $\Delta x = x(t_f) - x(0) = -0.5m$ ist

$$\sqrt{\Delta x\frac{2}{R}\frac{(I + m_2 R^2 + m_1 r^2)}{-(m_2 Rg - m_1 rg)}} = t_f$$

Man kann somit ω für die Zeit t_f berechnen :

$$\omega(t_f) = \frac{m_2Rg - m_1rg}{(I + m_2R^2 + m_1r^2)} t_f$$
$$= \frac{m_2Rg - m_1rg}{(I + m_2R^2 + m_1r^2)} \sqrt{\Delta x \frac{2}{R} \frac{(I + m_2R^2 + m_1r^2)}{-(m_2Rg - m_1rg)}}$$
$$= 3.5\ rad/s$$

Ex 6: Kugel in einem Looping



a) Wir können festhalten, dass die Normalkraft und die Gewichtskraft zur Zentripetalkraft auf die Kugel beitragen. Wenn die Kugel ihre Bewegung im Looping fortsetzt, so ist die Normalkraft grösser als 0. Der Radius der Rotation des Schwerpunkts der Kugel entspricht der Differenz der beiden Radien, d.h. R-r. Somit erhalten wir folgende Gleichung:

$$F_N + mg\sin\theta = F = m\frac{v^2}{R-r}$$

Wenn P dem höchsten Punkt entspricht, den die Kugel erreichen kann, so gilt dort für die Normalkraft : F_N=0. Die Gleichung vereinfacht sich und es kann daraus die kinetische Energie bestimmt werden:

$$\Rightarrow mg\sin\theta = m\frac{v^2}{R-r} \Rightarrow \frac{1}{2}mg\sin\theta(R-r) = \frac{1}{2}mv^2 = E_T$$

Da die Kugel sich noch um sich selbst dreht, gibt es nicht nur kinetische Energie der Translation sondern auch noch der Rotation E_R. Um E_R zu bestimmen, müssen wir zuerst die Winkelgeschwindigkeit berechnen. Die Bedingung für Rollen ohne Rutschen ist $v = \omega_B r$. Es erbibt sich:

$$E_R = I\frac{{\omega_B}^2}{2} = I\frac{v^2/r^2}{2}.$$

Somit erhält man für die gesamte kinetische Energie :

$$E_K = E_T + E_R = \frac{1}{2}mv^2 + I\frac{v^2/r^2}{2} = E_T(1+\frac{I}{mr^2}) \Rightarrow E_T = \frac{E_K}{1+\frac{I}{mr^2}}$$

Gemäss Energieerhaltungssatz muss die Änderung der kinetischen Energie gleich gross sein wie die Änderung der potentiellen Energie :

$$\Delta E_P + \Delta E_K = 0 \Rightarrow mg\Delta h = E_K .$$

$$\Rightarrow \Delta h = \frac{1}{2}\sin\theta(R-r)\left(1+\frac{I}{mr^2}\right)$$

b)

i. In diesem Fall gilt $\theta = 90^\circ$, F_N = 0. Mit I=0 erhält man aus der obenstehenden Gleichung $\Delta h = \frac{R-r}{2}$

Alternativer Lösungsansatz: Aus $F_N + mg\sin\theta = F = m\frac{v^2}{R-r}$ erhält man $mg = m\frac{v^2}{R-r}$ => $v^2 = g(R-r)$

Mit dem Energieerhaltugssatz: $0 = \frac{1}{2}mv^2 - mg\Delta h$ und dann $\Delta h = \frac{v^2}{2g} = \frac{R-r}{2}$

ii. Verwendet man $I = \frac{1}{2}mr^2$ (Trägheitsmoment eines Voll-Zylinders) in der Gleichung für Δh im Teil (a) so erhält man: $\Delta h = \frac{3(R-r)}{4}$

Für einen Hohlzylinder bekommt man $\Delta h = R - r$, der Startpunkt muss also für einen Hohlzylinder weiter oben liegen.