

Lösungen #10 : Mehrkörpersysteme

Üb 1 : Drehmoment des Bizeps

Die nebenstehende Abbildung fasst die auf den Unterarm einwirkenden Kräfte zusammen, wobei H und V die horizontale und vertikale Komponenten der von dem Ellbogengelenk erzeugten Kraft auf den Ellbogen sind. Betrachtet man die Drehmomente um den Ellbogen herum, somit braucht man diese Ellbogenkraft nicht zu berechnen (da sie sich in einer Distanz praktisch gleich Null vom Ellbogen befindet). Somit,

$$\Sigma \tau = (T \cos \vartheta) d - w_a L / 2 - w_b L = 0$$

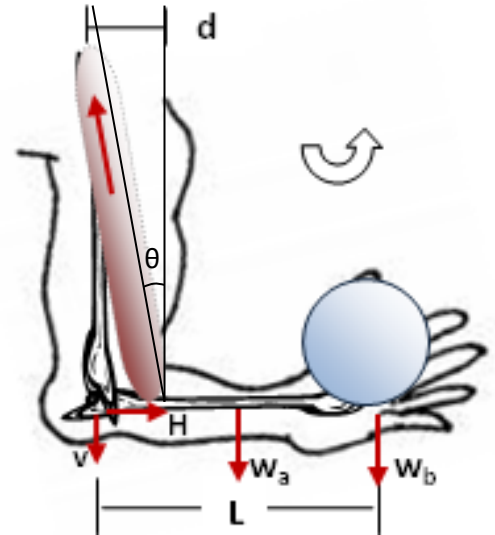
$$\rightarrow T = (w_a L / 2 + w_b L) / (d \cos \vartheta) = ((15N)(0.15m) + (50N)(0.30m)) / (\cos 10)(0.04m) = 438N$$

Man findet, $T \approx 4.4 \cdot 10^2 N$, was entsprechend grösser als das Gewicht w_b ist.

Wir bestimmen danach die Kräfte H (horizontal) und V (vertikal):

$$\Sigma F_x = H - T \sin 10 = 0; \text{ somit } H = 76 N$$

$$\Sigma F_y = T \cos 10 - V - w_a - w_b = 0; \text{ somit, } V = 366 N$$



Üb 2 : Apollo Mission

Zuerst muss man bestimmen wo sich der Massenschwerpunkt des Apollo Moduls befindet. Aus Symmetriegründen folgt, dass er sich auf der Zylinderachse befindet. Der CM des Zylinders befindet sich auf einer Höhe $L/2$. Der CM eines Konus ist mit $1/4$ seiner Höhe relativ zur Basis entfernt (siehe Berechnung im Unterricht, Slide 10-4). Dazu gilt noch:

$$V_{\text{Konus}} = \frac{1}{3} \pi \frac{D^2}{4} h$$

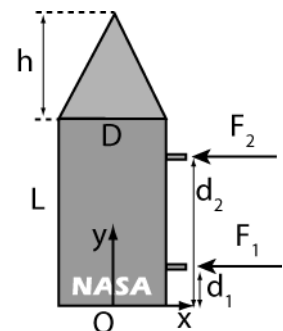
$$V_{\text{Zylinder}} = \pi \frac{D^2}{4} L$$

Da die Dichte des Moduls homogen ist, kann man die Masse des Konus und des Zylinders berechnen mit dem Volumen und der Gesamtmasse M:

$$M_{\text{Konus}} = M * \frac{V_{\text{Konus}}}{V_{\text{Konus}} + V_{\text{Zylinder}}}$$

$$M_{\text{Zylinder}} = M * \frac{V_{\text{Zylinder}}}{V_{\text{Konus}} + V_{\text{Zylinder}}}$$

Man berechnet die Position y des Massenschwerpunktes:



$$CM_y = \frac{M_{Zylinder} * \frac{L}{2} + M_{Konus} * \left(L + \frac{h}{4}\right)}{M}$$

$$CM_y = \frac{V_{Zylinder}}{V_{Konus} + V_{Zylinder}} * \frac{L}{2} + \frac{V_{Konus}}{V_{Konus} + V_{Zylinder}} * \left(L + \frac{h}{4}\right)$$

$$= \frac{L}{\frac{1}{3}h+L} * \frac{L}{2} + \frac{\frac{1}{3}h}{\frac{1}{3}h+L} * \left(L + \frac{h}{4}\right) = \frac{1}{\frac{1}{3}h+L} \left(L \frac{L}{2} + \frac{1}{3}h \left(L + \frac{h}{4}\right)\right) = 4.2m$$

Um dieses Translationsmanöver zu realisieren, müssen zwei Bedingungen überprüft werden. Einerseits, die Summe der zwei Raketenkräfte muss die gewünschte Beschleunigung ermöglichen. Andererseits muss das Gesamt-Drehmoment der zwei Kräfte relativ zum CM gleich Null sein.

$$\underline{Ox}: -(F_1 + F_2) = -Ma$$

$$\text{Und } \vec{r}_{CM}(F_1) + \vec{r}_{CM}(F_2) = \vec{0} \quad \text{relativ zum CM}$$

Laut Impuls-Erhaltung Prinzip erhält man:

$$F_1 = \frac{dP_1}{dt} = \frac{v dm_1}{dt}$$

$$F_2 = \frac{dP_2}{dt} = \frac{v dm_2}{dt}$$

wobei $\frac{dm_1}{dt}$ der Gas-Massenflussrate der Rakete 1 und $\frac{dm_2}{dt}$ der Rakete 2 entspricht.

Die Bedingungen für die Translation werden somit:

$$v \left(\frac{dm_1}{dt} + \frac{dm_2}{dt} \right) = Ma \quad (1)$$

$$\text{Und } (CM_y - d_1)F_1 - (d_2 - CM_y)F_2 = (CM_y - d_1) \frac{v dm_1}{dt} - (d_2 - CM_y) \frac{v dm_2}{dt} = 0 \quad (2)$$

aus (1) und (2), findet man:

$$\frac{dm_2}{dt} = \frac{Ma}{v} - \frac{dm_1}{dt} \quad (3)$$

$$(CM_y - d_1) \frac{v dm_1}{dt} - (d_2 - CM_y) v \left(\frac{Ma}{v} - \frac{dm_1}{dt} \right) = 0 \quad (4)$$

aus (4) :

$$\frac{dm_1}{dt} v ((CM_y - d_1) + (d_2 - CM_y)) = Ma (d_2 - CM_y)$$

$$\frac{dm_1}{dt} = \frac{Ma (d_2 - CM_y)}{v ((CM_y - d_1) + (d_2 - CM_y))} = 3.6kg/s$$

$$\frac{dm_2}{dt} = \frac{Ma}{v} - \frac{dm_1}{dt} = 10kg/s$$

Die Massenflussrate der Rakete 1 ist somit 3.6kg/s und diejenige der Rakete 2 (näher beim CM) 10kg/s.

Üb 3 : Hurrikan

- a) Der erste Teil des Problems entspricht der Bestimmung der effektiven Kraft des Windes auf Abel. Deswegen wird angenommen, dass die Windgeschwindigkeit auf der ganzen Fläche von Abel gleich gross und gleich gerichtet ist. Dazu wird noch angenommen, dass nach dem Stoß mit Abels Oberfläche die Geschwindigkeit vernachlässigbar ist. Berechnen wir den Impuls des Windes vor dem Zusammenstoß mit Abel. Während dem Zeitintervall dt entspricht die Luft, die auf Abel trifft, einem Volumen $dVol = L l V_{Wind} dt$, d.h. einer Masse $= \rho L l V_{Wind} dt$, mit ρ gleich der Luftdichte. Nach dem Zusammenstoß mit Abel ist der Impuls gleich Null. Somit erhält man laut Newton's zweiten Gesetzes:

$$F_{Wind} = \frac{dp_x}{dt} = \frac{dm \cdot V_{Wind}}{dt} = \frac{\rho L l V_{Wind} dt}{dt} V_{Wind} = \rho L l V_{Wind}^2$$

Da diese Kraft gleichmässig auf Abel einwirkt, geht man davon aus, dass sie einer einzelnen Kraft entspricht die auf Höhe $L/2$ wirkt, am Punkt Q. Berechnen wir die Drehmomente relativ zu P. G ist der Massenschwerpunkt des Körpers. Auf der Abbildung stehen P, Q und G auf der lateralen Seite, obwohl sich ihre effektive Position auf dem Plan $z=-l/2$, in der Mitte des Körpers, befindet. Es ändert aber nichts zur Berechnung, da F_{Wind} bekannt ist, lässt sich das Problem in zwei Dimensionen darstellen. Man stellt fest, dass der Wind und das Gewicht umgekehrte Beiträge haben:

$$\vec{M}_p(F_{Wind}) = \vec{PQ} \times \vec{F}_{Wind} = -\frac{L}{2} F_{Wind} \hat{e}_z$$

$$\vec{M}_p(m\vec{g}) = \vec{PG} \times m\vec{g} = \frac{d}{2} mg \hat{e}_z$$

Um den kritischen Punkt vor dem Kippen zu bestimmen, muss man das Verhalten der Normalkraft betrachten. Wenn die Normalkraft (an einem Punkt zusammengefasst) links von P wirkt, erzeugt sie ein negatives Drehmoment längs $\hat{e}_z$, der zum Drehmoment des Windes addiert wird. Der kritische Punkt mit dem maximalen Wind vor dem Kippen ist somit erreicht mit der Normalkraft ausschliesslich in P einwirkend. Sein Drehmoment relativ zu P in diesem Fall ist gleich Null. In diesem kritischen Punkt gleicht das Drehmoment des Gewichtes dasjenige des Windes aus:

$$\vec{M}_p(F_{Wind}) = -\vec{M}_p(m\vec{g})$$

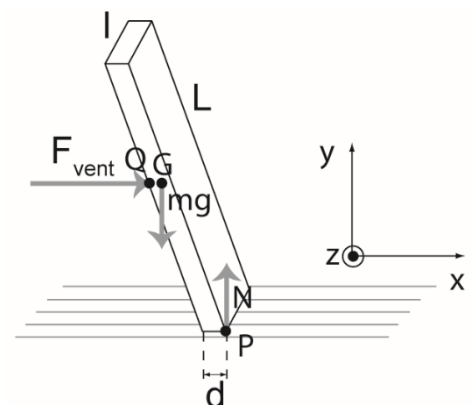
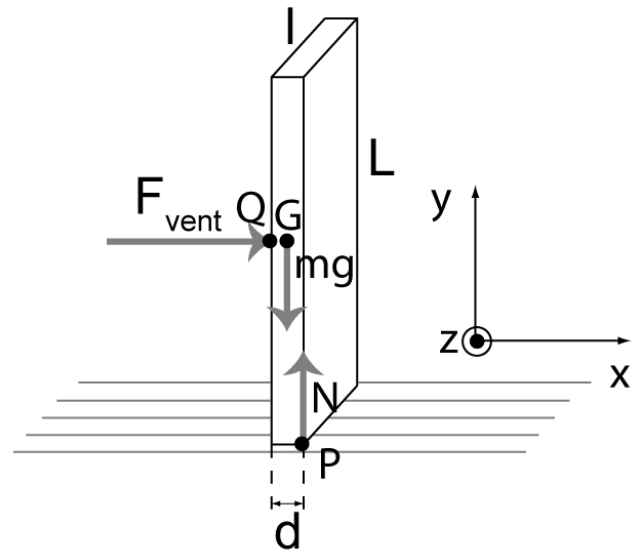
$$\Rightarrow \frac{L}{2} F_{Wind} = \frac{d}{2} mg$$

$$\Rightarrow \frac{L}{2} \rho L l V_{Wind}^2 = \frac{d}{2} mg$$

Man findet schliesslich für die kritische Geschwindigkeit:

$$V_{Wind} = \sqrt{\frac{dmg}{\rho L^2 l}} = 9.4 \text{ m/s}$$

- b) Es ist für Abel tatsächlich möglich auf seinen Beinen zu bleiben, wenn er sich gegen den Wind beugt, um somit den „Hebelarm“ des Gewichtes relativ zu P zu vergrössern. Da Abel die Füsse auf dem Boden erhält, ist die Form, die man betrachten soll, ein Parallelepiped mit 4 rechteckigen Seiten und 2 lateralen Seiten als Parallelogrammen). Man stellt auch fest, dass die effektive Fläche (rechtwinklig) gegen den Wind verkleinert ist.



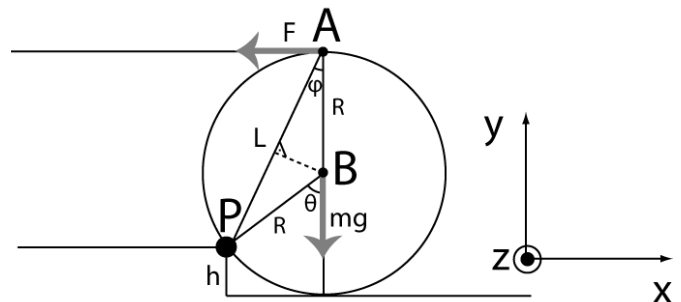
Üb 4 : Paul's Billard

- a) Wenn man in A schlägt, so erteilt man einen positiven Drehimpuls längs z relativ zum CM. Die Kugel ist somit in Drehung gegen den Uhrzeigersinn. Wenn man in B schlägt ist der Drehimpuls relativ zum CM gleich Null. Die Kugel bewegt sich ohne sich zu drehen. Wenn man in C schlägt, so erteilt man einen negativen Drehimpuls längs z relativ zum CM. Die Kugel ist somit in Drehung im Uhrzeigersinn.
- b) Mit trockener Reibung erhält man eine Gleitreibungskraft am Kontaktpunkt der Kugel, wenn seine Geschwindigkeit ungleich Null ist (Rollen mit Reibung). Diese Kraft ist entgegengesetzt zur Richtung der Geschwindigkeit am Kontaktpunkt gerichtet. Im Fall A hat der Kontaktpunkt eine nach rechtsgerichtete Geschwindigkeit. Somit ergibt es eine nach linksgerichtete Reibung, die die Kugel abbremst. Das durch diese Kraft erzeugte Drehmoment ist negativ längs z relativ zum CM, und bremst die Drehung der Kugel. Man bezeichnet diesen Schlag als „Rückläufer“. Wenn er mit genügend Drehung erzeugt wird, kann die Kugel sogar wieder zurückkommen. Die Bremsung wird sich der Drehung entgegensetzen bis die Kugel ohne Reibung rollt. Ab diesem Moment wird keine Reibung am Kontaktpunkt ausgeübt. Die Kugel rollt immer noch, jedoch mit weniger Geschwindigkeit als am Anfang.

Im Fall B hat der Kontaktpunkt eine nach rechtsgerichtete Geschwindigkeit. Somit erhält man eine nach linksgerichtete Reibung, die die Kugel abbremst. Das durch diese Kraft erzeugte Drehmoment ist negativ längs z relativ zum CM, und erzeugt eine Rotation im Uhrzeigersinn. Dieser Schlag ist ein „Normalstoss“. Die Reibung erzeugt eine Rotation im Uhrzeigersinn bis die Kugel ohne Reibung rollt. Ab diesem Moment wird keine Reibung am Kontaktpunkt ausgeübt. Die Kugel rollt immer noch, jedoch mit weniger Geschwindigkeit als am Anfang.

Im Fall C hat der Kontaktpunkt eine nach links- oder rechtsgerichtete Geschwindigkeit, je nach der gewählten Höhe. Wenn die Rotation ω der Kugel derart ist, dass ωR grösser als die Geschwindigkeit vom CM ist, hat der Kontaktpunkt eine nach linksgerichtete Geschwindigkeit. Somit erhält man eine nach rechtsgerichtete Reibung, die die Kugel beschleunigt. Das durch diese Kraft erzeugte Drehmoment ist positiv längs z relativ zum CM, und bremst die Drehung. Dieser Schlag heißt ein „Nachläufer“. Die Reibung setzt sich der Rotation entgegen bis die Kugel ohne Reibung rollt. Ab diesem Moment wird keine Reibung am Kontaktpunkt ausgeübt. Die Kugel rollt immer noch, jedoch mit größerer Geschwindigkeit als am Anfang.

Wenn die Rotation ω der Kugel derart ist, dass ωR kleiner als die Geschwindigkeit des CM ist, erhält man eine nach links gerichtete Reibung, die die Kugel abbremst. Das durch diese Kraft erzeugte Drehmoment ist negativ längs z relativ zum CM, und erzeugt eine Erhöhung der Rotation der Kugel. Die Situation ist dem Punkt B ähnlich.



- c) Die kritische Kraft ist erreicht, wenn der Zylinder sich im Gleichgewicht auf der Stufenkante befindet (es gibt keine Normalkraft aus der unteren Stufe). Die Reactio-Kraft in P erschwert die Berechnung. Um sie loszuwerden, kann man einfach die Drehmomente um P herum berechnen:

$$\vec{M}_P(m\vec{g}) = -Rmg \sin(\theta) \hat{e}_z$$

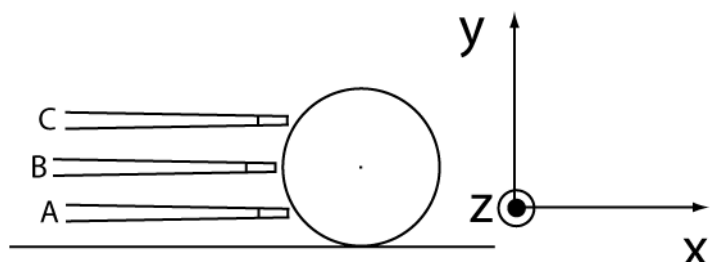
$$\vec{M}_P(\vec{F}) = LF \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) \hat{e}_z$$

Durch die Geometrie des Problems erhält man:

$$\theta = \arccos\left(\frac{R-h}{R}\right)$$

Da das Dreieck PAB gleichschenkelig ist, erhält man:

$$\pi - 2\varphi = \pi - \theta \quad \Rightarrow \quad \varphi = \frac{\theta}{2}$$



$$\text{genauso, } L = 2 * R \cos(\varphi) = 2 * R \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

Die kritische Kraft F ist erreicht wenn sich der Zylinder in Gleichgewicht befindet.

$$\vec{M}_p(m\vec{g}) = -\vec{M}_p(\vec{F})$$

$$\Rightarrow Rmg \sin(\theta) = LF \sin\left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right) = LF \cos(\varphi) = 2 * RF \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)$$

$$\Rightarrow F = \frac{mg \sin(\theta)}{2 \cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right)} = 736 \text{ N}$$

Üb 5 : Der Maler und die Leiter

Wenn der Maler auf der Leiter hochsteigt, so nimmt das Drehmoment seines Gewichts relativ zum Fuß der Leiter nimmt zu, sobald er einen bestimmten Grenzwert überschreitet ist die Haftreibungskraft zwischen der Leiter und dem Boden nicht mehr groß genug um sich aufrechtzuerhalten und sie stürzt.

Es wird angenommen, dass der Maler sich in D befindet, mit einem Abstand R vom Punkt A. Somit sind die auf der Leiter einwirkenden Kräfte kurz vor dem Sturz:

$$\begin{aligned} \vec{F}_{pe} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{F}_{pp} &= \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} \\ \vec{N}_A &= \begin{pmatrix} 0 \\ N_A \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{F}_F &= \begin{pmatrix} -\mu N_A \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} & \vec{N}_B &= \begin{pmatrix} N_B \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Da das System im Stillstand ist, ist die Summe der Kräfte gleich Null. Man erhält die folgenden Gleichungen:

$$\begin{cases} N_A - (m + M)g = 0 \Rightarrow N_A = (m + M)g \\ N_B - \mu N_A = 0 \Rightarrow N_B = \mu N_A = \mu(m + M)g \end{cases}$$

Da die Leiter nicht fällt, ist die Summe der Drehmomente in jedem Punkt gleich Null. In A, beträgt sie:

$$\begin{aligned} \vec{0} &= \vec{AD} \times \vec{F}_{pp} + \vec{AC} \times \vec{F}_{pe} + \vec{AB} \times \vec{N}_B \\ \Rightarrow \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -R \cos \theta \\ R \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -Mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -\frac{L}{2} \cos \theta \\ \frac{L}{2} \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -L \cos \theta \\ L \sin \theta \\ 0 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \mu(m + M)g \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &\Rightarrow RM \cos \theta + \frac{L}{2} m \cos \theta - L \mu(m + M) \sin \theta = 0 \\ &\Rightarrow R = \frac{L \left(\mu(m + M) \sin \theta - \frac{m \cos \theta}{2} \right)}{M \cos \theta} = 2.84 [\text{m}] \end{aligned}$$

Der Maler stürzt aus einer Höhe $R \sin \theta = 2.46 [\text{m}]$

