Test der Mathematikkenntnisse : Lösungen

A. Gleichungen und Gleichungssysteme lösen:

1. Bestimmen Sie F_A und F_B im folgenden Gleichungssystem (z_A, z_B und F sind gegeben):

$$z_A F_A + z_B F_B = 0$$
$$F_A + F_B = F$$

Aus der ersten Gleichung folgt : $F_A = - z_B F_B / z_A$

Diesen Ausdruck setzt man in die zweite Gleichung ein: $F_B = F (z_A / (z_A - z_B) /)$ et $F_A = F (z_B / (z_B – z_A))$

2. Bestimmen Sie die Lösungen $x_{1,2}$ der folgenden Gleichung (F und C sind gegeben):

$$Fx^2 + Cx = 0$$

→ $x_1 = 0$, $x_2 = -C/F$

3. Bestimmen Sie $\Delta y>0$ (D und L sind gegeben):

$$\frac{\Delta y^2}{2} = D(L + \Delta y)$$

→ $\Delta = (–D)^2 – 4(1/2)(-2DL) = D^2 + 2DL$ → $\Delta = D (D+2L)$

$$\Delta y = D \pm \sqrt{D (D + 2L)}$$

4. Lösen sie nach v auf:

$$m_1 g x_1 = \frac{m_1 v^2}{2} + \frac{m_2 v^2}{2}$$

➔ $v = \pm \sqrt{\frac{2(m_1 g x_1)}{m_1 + m_2}}$

5. Bestimmten Sie $y(x)$, indem Sie aus $x(t)$ und $y(t)$ die Variable t eliminieren:

$$y(t) = y_0 + v_{0y} t + \frac{1}{2} a_y t^2$$

$$x(t) = v_{0x} t + x_0$$

Aus (2): $t = \frac{x - x_0}{v_{0x}}$

Einsetzen in (1) : $y(t) = y_0 + v_{0y} \frac{x - x_0}{v_{0x}} + \frac{1}{2} a_y (\frac{x - x_0}{v_{0x}})^2$

6. Bestimmen Sie aus den beiden folgenden Gleichungen ϕ in Funktion von h und d :

$$h = \frac{v_0^2 \sin^2\phi}{2g}$$

$$\frac{d}{2} = \frac{v_0^2 \sin\phi \cos\phi}{g}$$

➔ $\frac{h}{d/2} = \frac{v_0^2 \sin^2\phi g}{v_0^2 \sin\phi cos\phi 2g} = \frac{tan\phi}{2} \rightarrow \phi = \arctan(\frac{4h}{d})$

7. Lösen Sie das Gleichungssystem nach v_0' und v_f' auf (v_0, m und M sind gegeben):

$M v_0 = M v_0' + m v_f'$ (1)

$\frac{M v_0^2}{2} = \frac{M v_0'^2}{2} + \frac{m v_f'^2}{2}$ (2)

Aus (1) erhält man $v_0' = \frac{M v_0 - m v_f'}{M}$

Einsetzen in (2) ergibt:

$$\frac{M v_0^2}{2} = \frac{M(\frac{M v_0 - m v_f'}{M})^2}{2} + \frac{m v_f'^2}{2} \rightarrow 0 = -2 m v_0 v_f' + \left(\frac{m^2}{M} + m\right) v_f'^2$$

$\rightarrow v_f' = 0$ und $v_0' = v_0$ oder $v_f' = \frac{2 v_0 M}{m+M}$ und $v_0' = \frac{v_0(M-m)}{M+m}$

B. Einheiten umrechnen:

1. 72 km/h = 20 m/s
2. 52 m/s = 187.2 km/h
3. 2400 GWh = 8,64 * 10^{15} J
4. 9 10^{16} J = 2,5 * 10^4 GWh
5. 45^0 = π/4 + 2κ*π rad
6. $\frac{\pi}{3}$ rad = 60^0 + k*360^0
7. 5.25 U/min = 0,55 rad/s (U = Umdrehungen)
8. $\frac{24\,\pi}{6}$ rad/s = 120 U/min

C. Ableitungen von Funktionen bestimmen:

1. $f(x) = \frac{1}{2} k x^2 \rightarrow f'(x) = kx$

2. $f(t) = \cos\omega t \rightarrow f'(t) = -\omega \sin(\omega t)$

3. $f(t) = \sin\omega t \rightarrow f'(t) = \omega \cos(\omega t)$

4. $f(x) = \sin^2 x \rightarrow f'(x) = 2\sin(x)\cos(x)$

5. $f(x) = 2x \rightarrow f'(x) = 2$

6. $f(x) = 1 \rightarrow f'(x) = 0$

7. $a(t) = 2 \rightarrow a'(t) = 0$

8. $x(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t \rightarrow f'(x) = gt + v_0$

9. $x(\phi) = \cos\phi \;\rightarrow x'(\phi) = \; -\sin(\phi)$

10. $x(\phi) = \sin\phi \;\rightarrow x'(\phi) = \; \cos(\phi)$

Leiten Sie zwei Mal ab:

1. $x(\phi) = \sin\phi \rightarrow \mathrm{x}''(\phi) = -\sin(\phi)$

2. $x(\phi) = \cos\phi \rightarrow x''(\phi) = -\cos(\phi)$

3. $f(t) = \cos\omega t \rightarrow \mathrm{f}''(\mathrm{t}) = -\omega^2\cos(\omega t)$

4. $r(t) = \sin\omega t \rightarrow \mathrm{r}''(\mathrm{t}) = -\omega^2\sin(\omega t)$

5. $g(y) = 2\mathrm{y} \rightarrow g''(y) = 0$

6. $x(t) = g\frac{t^2}{2} + v_0 t \rightarrow x''(t) = g$

D. Stammfunktionen bestimmen:

1. $f(x) = 1 \rightarrow \mathrm{F(x)} = \mathrm{x} + \mathrm{C}$

2. $h(t) = 2\mathrm{t} \rightarrow \mathrm{H(t)} = \mathrm{t}^2 + \mathrm{C}$

3. $a(t) = 2 \rightarrow \mathrm{A(t)} = 2\mathrm{t} + \mathrm{C}$

4. $f(z) = z^2 \rightarrow \mathrm{F(z)} = \frac{\mathrm{z}^3}{3} + \mathrm{C}$

5. $f(z) = z^3 \rightarrow \mathrm{F(z)} = \frac{\mathrm{z}^4}{4} + C$

6. $f(x) = \frac{1}{x} \rightarrow \mathrm{F(x)} = \ln(x) + C$ _

7. $f(x) = \cos x \rightarrow \mathrm{F(x)} = \sin(x) + C$

8. $f(x) = \sin x \rightarrow \mathrm{F(x)} = -\cos(x) + C$

9. $v(m) = k\frac{1}{m} \rightarrow \mathrm{V(m)} = k ln(m) + C$

10. $x(\phi) = \cos\phi \rightarrow \mathrm{F}(\phi) = \sin(\phi) + C$

11. $x(\phi) = \sin\phi \rightarrow \mathrm{F}(\phi) = -\cos(\phi) + C$

12. $f(x) = \sin^2 x \rightarrow \mathrm{F(x)} = \int \frac{1}{2} - \frac{\cos(2x)}{2} dx = \frac{1}{2x} - \frac{1}{4}\sin(2x) + C$

13. $f(x) = \cos(2x) \rightarrow F(x) = \frac{1}{2}\sin(2x) + C$

14. $h(t) = 3t^2\exp(2t^3) \rightarrow F(t) = \frac{1}{2}e^{2t^3} + C$

15. $j(r) = \frac{-\cos(3r)}{\sin(3r)} \rightarrow J(r) = -\frac{1}{3}\ln(\sin(3r)) + C$

Integrieren Sie zwei Mal:

1. $f(t) = g \rightarrow F(t) = \frac{gt^2}{2} + at + b$

2. $f(x) = 2x \rightarrow F(x) = \frac{x^3}{3} + ax + b$

3. $f(z) = z^2 \rightarrow F(z) = \frac{z^4}{12} + az + b$

4. $f(z) = z^3 \rightarrow F(z) = \frac{z^5}{20} + az + b$

5. $f(x) = \cos x \rightarrow F(x) = -\cos(x) + ax + b$

6. $f(x) = \sin x \rightarrow F(x) = -\sin(x) + ax + b$

7. $x(\phi) = \cos\phi \rightarrow F(\phi) = -\cos(\phi) + a\phi + b$

8. $x(\phi) = \sin\phi \rightarrow F(\phi) = -\sin(\phi) + a\phi + b$

E. Berechnung von bestimmten Integralen :

1. $\int_0^{2\pi} \cos\phi d\phi = \sin(2\pi) - \sin(0) = 0$

2. $\int_0^{2\pi} \sin\phi d\phi = -\cos(2\pi) + \cos(0) = 0$

3. $\int_0^{2\pi} \sin^2\phi d\phi = \frac{2\pi - \sin(4\pi)/2}{2} = \pi$ car : $\sin^2(x) = \frac{1-\cos(2x)}{2}$

4. $\int_{v_1}^{v_2} mv dv = m\frac{{v_2}^2 - {v_1}^2}{2}$

5. $\int_0^{T} gt dt = \frac{gT^2}{2}$

6. $k\int_{M_i}^{M_f} \frac{1}{m} dm = k\ln(\frac{M_f}{M_i})$______

7. $\int_0^{\pi/2} \cos\phi d\phi = \sin\left(\frac{\pi}{2}\right) - \sin(0) = 1$

8. $\int_0^{\pi/2} \sin\phi d\phi = 1$

9. $\frac{\int_0^h z^3 \mathrm{dz}}{\int_0^h z^2 \mathrm{dz}} = \frac{\frac{h^4}{4}}{\frac{h^3}{3}} = h\frac{3}{4}$

10. $\int_0^R 2rR\sin\phi dr$, wobei $r(\phi) = R\cos(\phi) \rightarrow dr = -R\sin\phi d\phi$

$$\int_0^R 2rR\sin\phi dr = -\int_{\pi/2}^0 2R\cos\phi R\sin\phi R\sin\phi d\phi = 2R^3\int_0^{\pi/2} \cos\phi \sin^2\phi d\phi = 2R^3\frac{\sin^3}{3}\Big|_0^{\pi/2} = 2/3R^3$$

F. Berechnungen am rechtwinkligen und gleichschenkligen Dreieck:

1. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit einem rechten Winkel in der Ecke *A*, einem Winkel von 36° in der Ecke *B* und einer Seite *AC* mit der Länge 30 cm.
   Bestimmen Sie den Winkel in der Ecke *C* → 180°-90°-36°=54°
   Bestimmen Sie die Länge der Seite *AB*. → *AB*= 30 cm / tan(36°) = 41.3 cm
   Bestimmen Sie die Länge der Seite *BC*. → BC =30 cm / tan(36°) = 51 cm

2. Gegeben ist ein Dreieck *ABC* mit einem rechten Winkel in der Ecke *A*, einem Winkel von 56° in der Ecke *B* und einer Seite *AC* mit der Länge 34 cm.
   Bestimmen Sie die Länge der Seite *AB*. →AB=AC / tan(56°) = 22.9 cm

3. Gegeben ist ein gleichschenkliges Dreieck *ABC* mit einem Winkel von 60° in der Ecke von *A* und einer Seite *AB* mit der Länge 5 cm.
   Bestimmen Sie die Längen der Seite *AC* und *BC* sowie die beiden Winkel in den Ecken *B* und *C*.

→AC = BC = 5 cm -> Gleichseitiges Dreieck, d.h. alle Winkel sind 60°

G. Trigonometrie

1. Linearisieren Sie: $\cos^2(t) + 2\sin^2(t)$

   $\cos^2(t) + \sin^2(t) + \sin^2(t) = 1 + \sin^2(t) = 1 + \frac{1-\cos(2t)}{2} = \frac{3-\cos(2t)}{2}$

2. Vereinfachen Sie : $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b)$

   $\cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) = \cos(\mathrm{a} - \mathrm{b})$

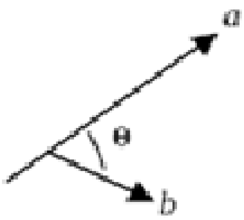
3. Ersetzen Sie h durch $\tan\left(\frac{x}{2}\right)$ und schreiben Sie den Ausdruck in Funktion von $\sin(x)$ und $\cos(x)$:

$$\frac{(1-h^2+2h)}{1+h^2} = \frac{(1-\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\tan\left(\frac{x}{2}\right))}{1+\tan^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)/\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)/\cos\left(\frac{x}{2}\right))}{1+\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)/\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} = \frac{(1-\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)/\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)+2\sin\left(\frac{x}{2}\right)/\cos\left(\frac{x}{2}\right))}{(\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)+\cos^2\left(\frac{x}{2}\right))/\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)}$$

$$= \cos^2\left(\frac{x}{2}\right)\left(1 - \frac{\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos^2\left(\frac{x}{2}\right)} + \frac{2\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\cos\left(\frac{x}{2}\right)}\right) = \cos^2\left(\frac{x}{2}\right) - \sin^2\left(\frac{x}{2}\right) + 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)\cos\left(\frac{x}{2}\right) = \cos(x) + \sin(x)$$

H. Vektoroperationen

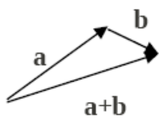
1. Bestimmen Sie die Lösungen der folgenden Vektoroperationen ($\theta = \frac{\pi}{3}$).



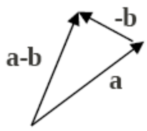
a) $\vec{a} + \vec{b}$ (nur graphische Lösung) b) $\vec{a} - \vec{b}$ (nur graphische Lösung)

c) $\vec{a} \times \vec{b}$ d) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ e) $\vec{a} \cdot \vec{a}$

a)



b)

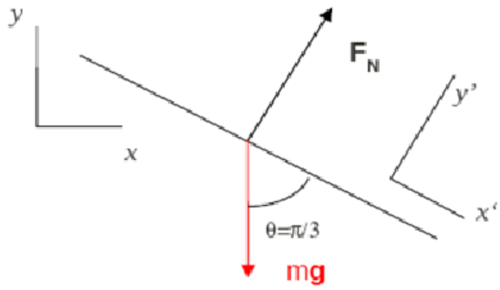


c) $\vec{a} \times \vec{b}$ ist ein Vektorprodukt. Das Resultat ist ein Vektor, der senkrecht zur Ebene, die von $\vec{a}$ und $\vec{b}$ aufgespannt wird. Der Betrag oder die Länge dieses Vektor ist $|\vec{a}||\vec{b}|\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|\frac{\sqrt{3}}{2}$

d) $\vec{a} \cdot \vec{b}$ ist ein Skalarprodukt. Der Betrag ist $|\vec{a}||\vec{b}|\cos(\theta) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = |\vec{a}||\vec{b}|1/2$

e) $\vec{a} \cdot \vec{a}$ ist ein Skalarprodukt $|\vec{a}||\vec{a}|\cos(\theta) = |\vec{a}||\vec{a}|\cos(0) = |\vec{a}|^2$

2. Bestimmen Sie die Komponenten der Vektoren m**g** und **F**$_N$ im *xy*- und im *x'y'*-Koordinatensystem.



xy − Koordinatensystem:

$mg_x = 0$ und $mg_y = -mg$

$\mathbf{F}_{\mathbf{N}x} = \mathrm{F_N}\cos(\frac{\pi}{3})$ und $\mathbf{F}_{\mathbf{N}y} = \mathrm{F_N}\sin(\frac{\pi}{3})$

$x'y'$ − Koordinatensystem:

$mg_{x'} = mg\sin(\frac{\pi}{3})$ und $mg_{y'} = mg\cos(\frac{\pi}{3})$

$\mathbf{F}_{\mathbf{N}x'} = 0$ und $\mathbf{F}_{\mathbf{N}y'} = \mathrm{F_N}$

3. Wie gross ist der Betrag des Vektors $\frac{\vec{r}}{r}$

Betrag von $\frac{\vec{r}}{r} = 1$

4. Für zwei beliebige Vektoren $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ gilt : $\mathrm{v_1}^2 + \mathrm{v_2}^2 = \mathrm{v_1}^2 + \mathrm{v_2}^2 - 2\mathrm{v_1 v_2}\cos\theta$

Welche möglichen Lösungen ergeben sich daraus für $\mathbf{v}_1$ und $\mathbf{v}_2$ und den Winkel θ?

$0 = 2\mathbf{v}_1\mathbf{v}_2\cos(\theta) \rightarrow \mathbf{v}_1 = 0,\ \mathbf{v}_2 = 0,\ \theta = \pi/2 + k^* \pi$

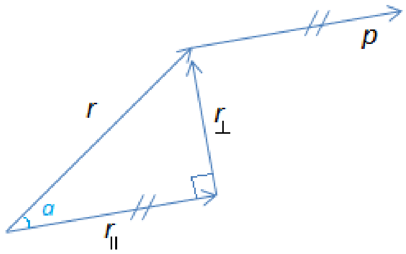
5. Was gilt für die beiden Vektoren, die die folgende Gleichung erfüllen : $(\vec{a}\times\vec{b}) = (\vec{b}\times\vec{a})$

   Es sei $\vec{a} = (a_x, a_y, a_z)$ und $\vec{b} = (b_x, b_y, b_z)$ $(\vec{a}\times\vec{b})_x = a_y b_z - a_z b_y$ et $(\vec{b}\times\vec{a})_x = -b_z a_y + b_y a_z$

   Man verwendet $(\vec{b}\times\vec{a})_x = (\vec{a}\times\vec{b})_x$ und erhält daraus: $a_y b_z - a_z b_y == -b_z a_y + b_y a_z \ \rightarrow \vec{a} = \vec{b}$

6. $\vec{a}\cdot(\vec{a}\times\vec{b}) = 0$
7. Zeigen Sie: $(\vec{r}\times\vec{p}) = (\vec{r}_\perp\times\vec{p})$

   Beachten Sie : $\vec{r} = \vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel$



$(\vec{r}\times\vec{p}) = (\vec{r}_\perp + \vec{r}_\parallel \ \times\vec{p}) = (\vec{r}_\perp\times\vec{p}) + (\vec{r}_\parallel\times\vec{p}) = (\vec{r}_\perp\times\vec{p})$ weil $\vec{r}_\parallel \parallel \vec{p}$

Mit $|\vec{r}_\perp| = |\vec{r}|\sin(\alpha)$ erhät man $|\vec{r}\times\vec{p}| = |\vec{r}||\vec{p}|\sin(\alpha)$.

8. Was kann man über den Betrag eines Vektors sagen, für den der folgende Ausdruck gilt: $\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \vec{\omega}\times\vec{r}$ (ω ist konstant)

   (Idee : bestimmen Sie dazu die Ableitung von r^2)

   $\frac{\mathrm{d}\vec{r}^2}{\mathrm{dt}} = \frac{\mathrm{d}\vec{r}^2}{\mathrm{d}\vec{r}}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dr}} = 2\vec{r}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dr}} = 2\vec{r}\cdot(\vec{\omega}\times\vec{r}) = 0 \rightarrow$ der Betrag des Vektors ist konstant

9. Berechnen Sie $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{dt}^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}$ unter Berücksichtigung des Ausdrucks in Aufgabe 8

   $\frac{\mathrm{d}^2\vec{r}}{\mathrm{dt}^2}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = \left(\vec{\omega}\times\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}}\right)\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{r}}{\mathrm{dt}} = 0$

10. Gegeben sind im 3 dim-Raum die Vektoren $\vec{v}, \vec{w}, \vec{z}$ mit $\vec{v}$ =(-1, 2, 3) ; $\vec{w}$ = (2, -2, 3) ; $\vec{z}$ = (2, 1, -5)

    a) Berechnen Sie die beiden Skalarprodukte:

    $\vec{v}\cdot\vec{w} = 3$ et $\vec{z}\cdot\vec{v} = -15$

    b) Berechnen Sie die beiden Vektorprodukte:

    $\vec{v}\times\vec{w} = (12{,}9,-2)$ et $\vec{z}\times\vec{v} = (13,-1{,}5)$

11. Gegeben sind im 3 dim-Raum die beiden Vektoren $\vec{p}$ = (-1t+3,2t,3) ; $\vec{m}$ = (2t,0,3t)

a) Berechnen Sie das Vektorprodukt $\vec{z} = \vec{p}\times\vec{m} = (6t^2, 3t^2 - 3t, -4t^2)$
b) Berechnen Sie für $t = 5$ die Geschwindigkeit $\vec{v}$ des Vektors $\vec{z}$ sowie die Schnelligkeit (Betrag von $\vec{v}$)

$\vec{v} = (60{,}27,-40)$ et $|\vec{v}| = \sqrt{60^2 + 27^2 + 40^2} = 77$

c) Berechnen Sie die Beschleunigung für $t = 5$. $\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = (12,6,-8)$

12. Gegeben sind die drei Einheitsvektoren im 3-dim Raum : $(\vec{\imath}, \vec{\jmath}, \vec{k})$

a) Bestimmen Sie einen Vektor $\vec{n}$, der senkrecht zur Ebene verläuft, die von $\vec{a} = (2\,,-6\ \,,-3\,)$ und $\vec{b} = (4\,,3\,,-1)$ aufgespannt wird.

$\vec{n} = (15, -10, 30)$

2) Normieren Sie den Vektor $\vec{n}$.

$|\vec{n}| = \sqrt{15^2 + 10^2 + 30^2} = 35$ $\quad \frac{\vec{n}}{|\vec{n}|} = \frac{(15,-10\,,30)}{35} = (\frac{3}{7}, -\frac{2}{7}, \frac{6}{7})$

13. Gegeben ist der Vektor der Beschleunigung eines Objekts: $\vec{A} = (2\,t\,, 3, 0)$. Bestimmen Sie daraus den Ortsvektor.

$\vec{v} = (t^2 + c_1, 3t + c_2, c_3)$

$\vec{P} = (\frac{1}{3}t^3 + c_1 t + c_4, \frac{3}{2}t^2 + c_2 t + c_5, c_3 t + c_6)$

I. Verschiedene fortgeschrittene Themen

1. Umrechnung Polarkoordinaten – kartesische Koordinaten

Vektor	Polarkoordinaten (r,θ)	Kartesische Koordinaten (*x*,*y*)
$\vec{v}$	4, π/3	(4cos(π/3)=2 , 4sin(π/3)=$2\sqrt{3}$)
$\vec{w}$	$\sqrt{61} \approx 7.81$, arctan(6/5) ≈ 50°	5, 6
$\vec{z}$	-2, 6 π	-2 , 0
$\vec{x}$	$\sqrt{97} \approx 9.85$, arctan(9/4) ≈ 66°	-4, -9

2. Ableitungen von Vektoren

Gegeben sind die Vektoren $\vec{A} = 5t^2\,\vec{\imath} + t\,\vec{\jmath} - t^3\,\vec{k}$ und $\vec{B} = \sin(t)\,\vec{\imath} - \cos(t)\,\vec{\jmath}$

a) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B})$

$(\vec{A} \times \vec{B}) = (-t^3\cos(t)\,, -t^3\sin(t)\,, -5t^2\cos(t) - t\sin(t))$

$$\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{B}) = (-3t^2\cos(t) + t^3\sin(t)\,, -3t^2\sin(t) - t^3\cos(t)\,, -10t\cos(t) + 5t^2\sin(t) - \sin(t) - t\cos(t))$$

b) Berechnen Sie $\frac{d}{dt}(\vec{A} \times \vec{A}) = \frac{d}{dt}0 = 0$

c) Berechnen Sie die Ableitung $\vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt}$ der Komponenten des Vektors $\vec{z} = (3t^2+2, -4t, \cos(2t))$.

$\vec{v} = \frac{d\vec{z}}{dt} = (6t, -4, -2\sin(2t))$

3. Differentialgleichungen

Bestimmen Sie die Funktion *y*, Lösung der folgenden Differentialgleichung :

a) $\quad y'\cos(2x^3) = 3yx^2\sin(2x^3)$

$$\frac{y'}{y} = \frac{3x^2 \sin(2x^3)}{\cos(2x^3)}$$

$$\int \frac{y'}{y} = \int \frac{3x^2 \sin(2x^3)}{\cos(2x^3)} dx$$

$$\ln(y) + C = -\frac{1}{2} \ln \cos(2x^3)$$

Man setzt C = ln(B)

$$lny + lnB = \ln(\frac{1}{\sqrt{\cos(2x^3)}})$$

$$lny = \ln(\frac{1}{B\sqrt{\cos(2x^3)}})$$

$y = \frac{1}{B\sqrt{\cos(2x^3)}}$ mit B>0 und $\cos(2x^3) \geq 0 \rightarrow -\sqrt[3]{\pi/4} < x < \sqrt[3]{\pi/4}$

b) $y'\exp(x^4) = yx^3\exp(x^4)$

$$\frac{y'}{y} = x^3$$

$$\int \frac{y'}{y} = \int x^3 dx$$

$\ln(y) = \frac{x^4}{4} + C \rightarrow y = e^{\frac{x^4}{4}} e^C = Ae^{\frac{x^4}{4}}$ mit $A = e^C$

4. Integrale von Vektoren

Bestimmen Sie den Ortsvektor, wenn der Beschleunigungsvektor gegeben ist : $\vec{A} = (3t, 2t^2, 0)$

$\vec{V} = \left(\frac{3t^2}{2} + a, \frac{2t^3}{3} + m, r\right)$ und somit $\vec{P} = (\frac{t^3}{2} + at + b, \frac{t^4}{6} + mt + n, rt + s)$

5. Umformungen und Vereinfachungen

a) Formen Sie den folgenden Ausdruck um und vereinfachen Sie ihn für $R/d \ll 1$: $\frac{1}{(d+R)^2} - \frac{1}{d^2}$

$$\frac{1}{d^2 + 2dR + R^2} - \frac{1}{d^2} = \frac{-R(2d + R)}{(d^2 + 2dR + R^2)d^2} = \frac{-R(2 + R/d)}{(1 + 2\frac{R}{d} + (\frac{R}{d})^2)d^3} \rightarrow \frac{R}{d} \ll 1 \rightarrow = -2R/d^3$$

b) Bestimmen Sie einen Ausdruck für v_1, ausgehend von der Gleichung:

$$\frac{c-v_1}{c+v_1} = \frac{(c-v_1^*)\times(c-v_0)}{(c+v_1^*)\times(c+v_0)} c - v_1 = \frac{(c-v_1^*)\times(c-v_0)}{(c+v_1^*)\times(c+v_0)}(c + v_1)$$

$$\downarrow$$

$$-v_1\left(\frac{(c - v_1^*) \times (c - v_0)}{(c + v_1^*) \times (c + v_0)} + 1\right) = \left(\frac{(c - v_1^*) \times (c - v_0)}{(c + v_1^*) \times (c + v_0)} - 1\right)c$$

$$\downarrow$$

$$-v_1(2c^2 + 2v_1^* v_0) = (-2v_0 c - 2v_1^* c)c$$

$$\downarrow$$

$$v_1(1 + v_1^* v_0/c^2) = (v_0 + v_1^*)$$

$$\downarrow$$

$$v_1 = \frac{(v_0 + v_1^*)}{\left(1 + \frac{v_1^* v_0}{c^2}\right)}$$

c) Wir betrachten die Näherung $sin\alpha = \alpha$, bei welchem Winkel α (in Radian und in Grad) ist der relative Fehler der Näherung grösser als 5 %, bei welchem Winkel ist er grösser als 10 %.
Skizzieren Sie α, sinα und den relativen Fehler.

$$\frac{\alpha - sin\alpha}{sin\alpha} > .05 \rightarrow \frac{\alpha}{sin\alpha} > 1.05\,; \frac{\alpha - sin\alpha}{sin\alpha} > .1 \rightarrow \frac{\alpha}{sin\alpha} > 1.1$$

Wenn man den Graphen betrachtet, so muss α grösser als 0.75 rad (43°) sein, damit der relative Fehler grösser als 10 % ist. Für einen Winkel der grösser ist als 0.52 rad (30°) ist der relative Fehler grösser als 5 %.