ÉQUATIONS DIFFÉRENTIELLES ORDINAIRES POUR PHYSIQUE I

1. Equations différentielles de second ordre (homogènes)

Soit l'équation différentielle homogène (membre de droite nul) de second ordre

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$$

avec m, k, b des constantes réelles. Distinguons plusieurs cas:

2.1 $k = 0$

On effectue le « changement de variable » $u(t) = \dot{x}(t) \Rightarrow \dot{u}(t) = \ddot{x}(t)$ pour se ramener à une équation différentielle de premier ordre.

2.2 $b = 0$, $k = 0$

L'équation différentielle devient $\ddot{x}(t) = 0$. On intègre deux fois et on trouve donc

$$\boxed{x(t) = C_1 t + C_2}$$

avec C_1 et C_2 deux constantes réelles.

2.3 $b = 0$, $k \neq 0$ <u>(Oscillateur harmonique I)</u>

L'équation différentielle devient $\ddot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = 0$, avec $k > 0$. La solution générale est donnée par

$$\boxed{x(t) = A\cos(t\sqrt{\frac{k}{m}}) + B\sin(t\sqrt{\frac{k}{m}})}$$

avec A, B deux constantes réelles.

2.4 Cas général <u>(Oscillateur harmonique II)</u>

On parle de cas général lorsque k et b sont des constantes quelconques.

La solution générale est donnée par

$$\boxed{x(t) = Ae^{\left(\frac{-b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t} + Be^{\left(\frac{-b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}}$$

avec A, B deux constantes. On voit qu'il y a plusieurs cas à distinguer concernant le signe de ce qui se trouve à l'intérieur de la racine:

2.4.1 $\frac{b^2}{4m^2} > \frac{k}{m}$

La solution est simplement donnée par

$$\boxed{x(t) = Ae^{\left(\frac{-b}{2m}+\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t} + Be^{\left(\frac{-b}{2m}-\sqrt{\frac{b^2}{4m^2}-\frac{k}{m}}\right)t}}$$

2.4.2 $\dfrac{b^2}{4m^2} = \dfrac{k}{m}$

Dans ce cas de figure, la racine devient nulle et on a

$$\boxed{x(t) = (A + Bt)e^{-\frac{b}{2m}t}}$$

2.4.3 $\dfrac{b^2}{4m^2} < \dfrac{k}{m}$

Cette fois l'intérieur de la racine est négatif. On a donc forcément un chiffre complexe qui apparaît dans l'exposant, et après quelques calculs en utilisant la formule d'Euler et en factorisant, on trouve la solution

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{b}{2m}t}(\tilde{A}\cos\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\right) + \tilde{B}\sin\left(t\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{b^2}{4m^2}}\right))}$$

<u>Remarque:</u> Habituellement, pour le cours de physique I, on écrit cette équation différentielle comme

$$\ddot{x}(t) + 2\gamma\dot{x}(t) + \omega_0^2 x(t) = 0$$

afin de faciliter certains calculs et de mettre en avant certaines grandeurs physiques dès le début. On voit donc, par rapport à la première version de cette équation différentielle, que $\dfrac{b}{m} = 2\gamma$ *et* $\dfrac{k}{m} = \omega_0^2$*. La solution générale en fonction des nouveaux paramètres est donc*

$$x(t) = Ae^{(-\gamma+\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t} + Be^{(-\gamma-\sqrt{\gamma^2-\omega_0^2})t}$$

et la solution dans le cas où $\gamma < \omega_0$ *(cas complexe) est donnée par*

$$x(t) = e^{-\gamma t}(\tilde{A}\cos(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\ t) + \tilde{B}\sin(\sqrt{\gamma^2 - \omega_0^2}\ t)$$

2. Equations différentielles de second ordre (non homogènes)

Soit l'équation différentielle de second ordre

$$\ddot{x}(t) + \frac{b}{m}\dot{x}(t) + \frac{k}{m}x(t) = f(t)$$

alors la solution générale est donnée par

$$\boxed{x(t) = x_h(t) + x_p(t)}$$

avec $x_h(t)$ la solution homogène (trouvée au point 1) et $x_p(t)$ la solution particulière (va dépendre de $f(t)$). Il existe plusieurs manières de trouver la solution particulière $x_p(t)$. On va s'intéresser à une méthode appelée *coefficients indéterminés*. Selon la nature de $f(t)$ (fonction trigonométrique, fonction exponentielle, polynôme, etc), on va poser un certain type de solution particulière avec des coefficients A, B, etc., qu'il faudra ensuite déterminer par identification. Distinguons donc plusieurs cas:

1. Fonction trigonométrique de degré 1

Si $f(t)$ est du type $f(t) = C_1 \cos(kt) + C_2 \sin(kt)$, où A, B, et k sont des constantes réelles quelconques, alors on pose toujours

$$\boxed{x_p(t) = A \sin(kt) + B \cos(kt)}$$

<u>Remarque:</u> L'une des deux constantes C_1 et C_2 peut être nulle. Dans ce cas, on se retrouve avec une fonction $f(t) = C_1 \cos(kt)$ ou $f(t) = C_2 \sin(kt)$. Cependant, la solution particulière que l'on pose ne change pas! On a donc toujours $x_p(t) = A \sin(kt) + B \cos(kt)$.

Exemple:

Si $f(t) = 3\cos(2t)$, alors on pose $x_p(t) = A \sin(2t) + B \cos(2t)$.

<u>Remarques sur certaines notations et expressions:</u>

−On peut écrire x au lieu de $x(t)$ pour faciliter la notation: il est sous-entendu que x est une fonction du temps t. Même chose pour les dérivées successives de x.

−Certaines expressions vous seront démontrées en Analyse II, ainsi que d'autres méthodes de résolution d'équations différentielles.