

TX chocs et collisions

1. lois de Newton
2. Forces très grande, intervalle court Percussion
3. lois de conservation 3.1 quantité de mvt $m\vec{v}$
3.2 moment cinétique $L^{\rightarrow}$
4. Exemple du marteau
5. Energie cinétique du solide - coefficient de restitution

1. lois de Newton

O: pt fixe

$$\textcircled{a} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

$$\textcircled{b} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^{\text{ext}}$$

(général
pas unig. pour
solide).

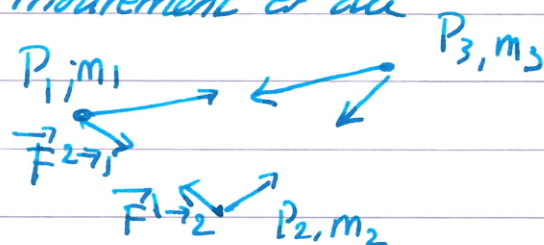
G: centre de masse
(de gravité)

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\tau}_G^{\text{ext}}$$

A: point quelconque $\frac{d\vec{L}_A}{dt} = -M \vec{v}_A \wedge \vec{v}_G + \vec{\tau}_A^{\text{ext}}$

Remarque: les forces internes ne contribuent pas à la modification de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Regardons de plus près $\textcircled{a}$ et $\textcircled{b}$



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{int}} + \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i^{\text{ext}} + \vec{F}_{1 \rightarrow 2}^{\text{int}} + \vec{F}_{2 \rightarrow 1}^{\text{int}} + \vec{F}_{1 \rightarrow 3}^{\text{int}} + \vec{F}_{3 \rightarrow 1}^{\text{int}} + \vec{F}_{2 \rightarrow 3}^{\text{int}} + \vec{F}_{3 \rightarrow 2}^{\text{int}} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i^{\text{ext}}$$

à cause du principe action-réaction on a

$$\textcircled{a} \quad \vec{F}^{i \rightarrow j} + \vec{F}^{j \rightarrow i} = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

et donc $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{\text{ext}}$

$$\textcircled{b} \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O^{\text{ext}} + \sum \vec{OP}_{\alpha} \wedge \left(\sum_j \vec{F}^{j \rightarrow \alpha} \right)$$

mais $\vec{OP}_{\beta} = \vec{OP}_{\alpha} + \vec{P}_{\alpha} \vec{P}_{\beta}$

et comme $\vec{F} \cdot \vec{P} \rightarrow \alpha \wedge \vec{P}_\alpha \vec{P}_\beta = 0$ (car alignés)
 $\vec{F} \cdot \vec{P} \rightarrow \alpha$ et $\vec{P}_\alpha \vec{P}_\beta$

on déduit également $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Pi}_0^{\text{ext}}$

2. Forces percussives : percussions

En général, pour une force ordinaire

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_0^T \vec{F}^{\text{ext}} \cdot dt = \vec{0}$$

impulsion P_{ext}

Pour une percussion

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_0^T \vec{F}^{\text{ext}} dt \neq \vec{0}$$

théoriquement
les percussions
sont des forces
infinies dont
l'intégrale est finie

ainsi $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$

$$d\vec{p} = \vec{F}^{\text{ext}} dt$$

Les forces percussives, ou percussions, sont des forces
 (externes) pour lesquelles

(relatifs au
système
envisagé)

$$\lim_{T \rightarrow 0} \int_0^T \vec{F}^{\text{ext}} dt = \vec{\Pi} \neq \vec{0}$$

ainsi

$$\int d\vec{p} = \vec{p}^{(+)} - \vec{p}^{(-)} = \vec{\Pi}$$

Moment de force

moment percussif

$$\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\Pi}_0$$

Lorsque $\lim_{T \rightarrow 0} \int_0^T \vec{\Pi}_0 dt \neq \vec{0}$

on parle de moment de force percussif ou moment de
 percussion

lorsque la force est percutante

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \vec{OP} \wedge \vec{F}^{\text{ext}} dt \neq \vec{0}$$
$$= \vec{OP} \wedge \vec{\Pi}$$

$$\boxed{\vec{L}_0^{(+)} - \vec{L}_0^{(-)} = \vec{OP} \wedge \vec{\Pi} = \lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \vec{M}_0 dt}$$

Lors d'un choc, toutes les quantités avant le choc sont désignées par $(-)$ et toutes les quantités après le choc sont désignées par $(+)$

Conservation: lors de percussions respectant le principe action - réaction système fermé

$$\vec{L}_0^{(-)} = \vec{L}_0^{(+)}$$

$$\vec{p}^{(-)} = \vec{p}^{(+)}$$

Choc élastique: (parfaitement élastique)

$$W_{\text{cin}}^{(-)} = W_{\text{cin}}^{(+)}$$

$$W_{\text{cin}} = \sum_i m_\alpha \vec{V}_\alpha \cdot \vec{V}_\alpha = \sum_i m_\alpha \|\vec{V}_\alpha\|^2$$

$$\text{Pour un solide} \quad W_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \|\vec{V}_G\|^2 + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot \vec{I}_G \vec{\omega}$$

Coefficient de restitution

Choc inélastique

$$W_{\text{cin}}^{(+)} < W_{\text{cin}}^{(-)}$$

Coefficient de restitution entre la vitesse relative $V_r^{(+)} = e V_r^{(-)}$

$0 < e < 1$ entre deux billes qui se choquent $V_r = V_2 - V_1$

Formule de l'énergie cinétique d'un solide

Partons d'un ensemble de points matériels

$$W_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_i \cdot \vec{V}_i = \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{O}P_i} \cdot \dot{\vec{O}P_i}$$

$$\vec{O}P_i = \vec{OG} + \vec{GP_i} \quad \dot{\vec{O}P_i} = \dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP_i}}$$

$$\begin{aligned} W_{\text{cin}} &= \frac{1}{2} \sum_i m_i (\dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP_i}}) \cdot (\dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP_i}}) \\ &= \frac{1}{2} \sum_i m_i \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G + \sum_i m_i \vec{V}_G \cdot \dot{\vec{GP_i}} + \frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{GP_i}} \cdot \dot{\vec{GP_i}} \end{aligned}$$

Comme $\sum_i m_i \vec{GP_i} = 0$ (propriété du centre de masse),

on a $\sum_i m_i \dot{\vec{GP_i}} = 0$ et donc

$$\sum_i m_i \vec{V}_G \cdot \dot{\vec{GP_i}} = \vec{V}_G \cdot \left(\sum_i m_i \dot{\vec{GP_i}} \right) = 0$$

ainsi

$$W_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G + \underline{\underline{\frac{1}{2} \sum_i m_i \dot{\vec{GP_i}} \cdot \dot{\vec{GP_i}}}}$$

on utilise la cinématique du solide

$$\dot{\vec{GP_i}} = \vec{\omega} \wedge \vec{GP_i}$$

ainsi le terme en vert s'écrit (terme souligné)

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{GP_i}) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{GP_i}) = \frac{1}{2} \sum_i m_i (\vec{GP_i} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{GP_i} \wedge \vec{\omega})$$

(car $(-1)(-1) = +1$ et $\vec{\omega} \wedge \vec{GP_i} = -\vec{GP_i} \wedge \vec{\omega}$)

En notation matricielle :

$$\frac{1}{2} \sum_i m_i \left([\vec{GP_i} \wedge] \vec{\omega} \right)^T \left([\vec{GP_i} \wedge] \vec{\omega} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \left(\sum_i m_i [\vec{GP_i} \wedge]^T [\vec{GP_i} \wedge] \right) \vec{\omega}$$

mais on va montrer que $\sum_i m_i [\vec{GP_i} \wedge]^T [\vec{GP_i} \wedge] = \mathbf{I}_G$

En effet :
$$[\vec{GP_i} \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

En désignant

$$\vec{GP_i} = \sum_j x_j \vec{\hat{x}}_j \quad \text{et}$$

$$[\vec{GP_i} \wedge]^T [\vec{GP_i} \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & x_3 & -x_2 \\ -x_3 & 0 & x_1 \\ x_2 & -x_1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -x_3 & x_2 \\ x_3 & 0 & -x_1 \\ -x_2 & x_1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} x_3^2 + x_2^2 & -x_2 x_1 & -x_3 x_1 \\ -x_1 x_2 & x_3^2 + x_1^2 & -x_3 x_2 \\ -x_1 x_3 & -x_2 x_3 & x_2^2 + x_1^2 \end{bmatrix}$$

et on a bien

$$\frac{1}{2} \vec{\omega}^T \left(\sum_i m_i [\vec{GP_i} \wedge]^T [\vec{GP_i} \wedge] \right) \vec{\omega}$$

$$= \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I}_G \vec{\omega}$$

et ainsi

$$W_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} M \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G + \frac{1}{2} \vec{\omega}^T \mathbf{I}_G \vec{\omega}$$