

TX chocs et collisions

1. lois de Newton
2. Forces très , intervalle P
3. lois de conservation 3.1 q m
3.2 m c
4. Exemple du marteau
5. Energie cinétique du solide - coefficient de restitution

1. lois de Newton

O: pt fixe

$$a) \frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{ext}$$

b)

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{\tau}_O^{ext} \quad \text{(général pas unig. pour solide.)}$$

G: centre de masse (de gravité)

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\tau}_G^{ext}$$

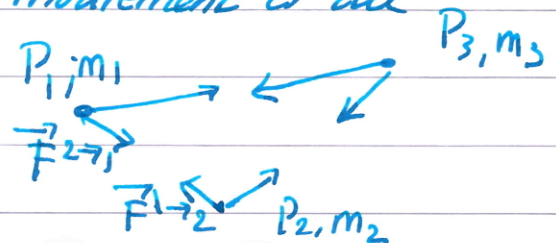
A: point quelconque

$$\frac{d\vec{L}_A}{dt} =$$

$$+ \vec{\tau}_A^{ext}$$

Remarque: les forces ne contribuent pas à la modification de la quantité de mouvement et du moment cinétique

Regardons de plus près a) et b)



$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext} + \vec{F}_{\alpha}^{ext} = \sum_{i=1}^3 \vec{F}_i^{ext} + \dots = \sum_{i=1}^n \vec{F}_i^{ext}$$

à cause du principe action-réaction on a

$$a) \quad \vec{F}^{i \rightarrow j} + \vec{F}^{j \rightarrow i} = 0 \quad \forall i, j \quad i \neq j$$

$$\text{et donc} \quad \frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_{\alpha} \vec{F}_{\alpha}^{ext}$$

$$b) \quad \frac{d\vec{L}_O}{dt} = \sum \vec{\tau}_O = \vec{\tau}_O^{ext} + \sum \vec{OP}_{\alpha} \wedge \vec{F}^{j \rightarrow \alpha}$$

mais $\vec{OP}_{\beta} = \vec{OP}_{\alpha} + \vec{P}_{\alpha} \vec{P}_{\beta}$

et comme $\lambda = 0$ ($\vec{F}^{B \rightarrow A}$ et $\vec{P}_A \vec{P}_B$ collinéaires)

on déduit également $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$

2. Forces percussives : percussions

En général, pour une force ordinaire

$$\lim_{\vec{t} \rightarrow 0} \int_0^{\vec{t}} \vec{F}^{\text{ext}} \cdot dt =$$

impulsion $\vec{P}^{\text{ext}}$

Pour une percussion

$$\lim_{\vec{t} \rightarrow 0} \int_0^{\vec{t}} \vec{F}^{\text{ext}} dt$$

théoriquement les percussions sont des forces infinies dont l'intégrale est finie

ainsi $\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}^{\text{ext}}$

$$d\vec{p} = \vec{F}^{\text{ext}} dt$$

Les forces percussives, ou percussions, sont des forces (externes) pour lesquelles

(relatifs au système envisagé)

$$\lim_{\vec{t} \rightarrow 0} \int_0^{\vec{t}} \vec{F}^{\text{ext}} dt =$$

ainsi

$$\int d\vec{p} = \vec{p}^{(+)} - \vec{p}^{(-)} =$$

Moment de force

moment percussif

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

Lorsque $\lim_{\vec{t} \rightarrow 0} \int_0^{\vec{t}} \vec{M}_O dt$

on parle de moment de force percussif ou moment de percussion

lorsque la force est percutante

$$\lim_{t \rightarrow 0} \int_0^t \vec{OP} \wedge \vec{F}^{ext} = \vec{OP} \wedge$$

$$\vec{L}_0^{(+)} - \vec{L}_0^{(-)} = \quad =$$

Lors d'un choc, toutes les quantités avant le choc sont désignées par et toutes les quantités après le choc sont désignées par

Conservation: lors de percussions $\vec{L}_0^{+} = \vec{L}_0^{-}$
 $\vec{p}^{+} = \vec{p}^{-}$

Choc élastique: (parfaitement élastique)

$$W_{cin} =$$

$$W_{cin} = \frac{1}{2} \sum_i m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} \cdot \vec{V}_{\alpha} = \frac{1}{2} \sum_i m_{\alpha} \|\vec{V}_{\alpha}\|^2$$

Pour un solide $W_{cin} = \quad +$

Coefficient de restitution

Choc inélastique W_{cin}

Coefficient de restitution entre la vitesse relative

$e < 1$ entre deux billes qui se choquent $V_r =$

Formule de l'énergie cinétique d'un solide

Partons d'un ensemble de points matériels

$$W_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} \dot{\vec{r}}^2 = \frac{1}{2}$$

$$\vec{OP}_i = \vec{OG} + \vec{GP}_i \quad \dot{\vec{OP}}_i = \dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP}}_i$$

$$W_{\text{cin}} = \frac{1}{2} \sum m_i (\dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP}}_i) \cdot (\dot{\vec{OG}} + \dot{\vec{GP}}_i)$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{OG}} \cdot \dot{\vec{OG}} + \sum m_i \dot{\vec{OG}} \cdot \dot{\vec{GP}}_i + \frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{GP}}_i \cdot \dot{\vec{GP}}_i$$

Comme $\sum m_i \vec{GP}_i = 0$ (propriété du centre de masse),

on a $\sum m_i \dot{\vec{GP}}_i = 0$ et donc

$$\sum m_i \dot{\vec{OG}} \cdot \dot{\vec{GP}}_i = \dot{\vec{OG}} \cdot (\sum m_i \dot{\vec{GP}}_i) = 0$$

ainsi

$$W_{\text{cin}} = \frac{1}{2} M \dot{\vec{OG}} \cdot \dot{\vec{OG}} + \underline{\underline{\frac{1}{2} \sum m_i \dot{\vec{GP}}_i \cdot \dot{\vec{GP}}_i}}$$

on utilise la cinématique du solide

$$\dot{\vec{GP}}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i$$

ainsi le terme en vert s'écrit (terme souligné)

$$\frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i) \cdot (\vec{\omega} \wedge \vec{GP}_i) = \frac{1}{2} \sum m_i (\vec{\omega} \cdot \vec{\omega}) (\vec{GP}_i \cdot \vec{GP}_i)$$

car $(-1)(-1) = +1$ et $\vec{\omega} \wedge \vec{\omega} = 0$

En notation matricielle :

$$\frac{1}{2} \sum m_i \begin{pmatrix} [\vec{GP}_i] & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [\vec{GP}_i] & 1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{2} \sum m_i \begin{pmatrix} [\vec{GP}_i] & 1 \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} [\vec{GP}_i] & 1 \end{pmatrix}$$

mais on va montrer que $\sum m_i [\vec{GP}_i] \begin{pmatrix} [\vec{GP}_i] & 1 \end{pmatrix}^T =$

En effet :
$$[\quad \Lambda] = [\quad]$$

En désignant

$$\overrightarrow{GP_i} = \sum_j x_j \vec{x}_j \quad \text{et}$$

$$[\quad \Lambda]^T [\quad \Lambda] = [\quad] [\quad]$$

$$= [\quad]$$

et on a bien
$$\frac{1}{2} \tau \left(\sum_i m_i L \right)^T [\quad \Lambda]$$

$$= \frac{1}{2} I_G$$

et ainsi

$$W_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} M \quad + \frac{1}{2}$$