

Lagrange I

- 1) contexte et principe
- 2) masse ponctuelle sous l'effet d'une force
- 3) le Lagrangien et la formulation, coordonnées généralisées
- 4) L'énergie cinétique d'un solide
- 5) Exemple d'application

1) Contexte et principe

→ on connaît des lois de conservation :

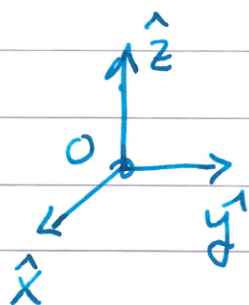
a) dans le cadre de forces issues de potentiels
⇒ conservation de l'énergie

b) dans le cas de symétries : moment cinétique (rotation)
quantité de mouvement (translation)

Ce sont des quantités scalaires. Elles sont conservées lorsque les équations dynamiques de Newton sont respectées.

La question est d'inverser : Existe-t-il une fonction scalaire
qui permette de déduire les équations (diff.) du
mouvement ? ⇒ Formalisme de Lagrange

2) Masse ponctuelle sous l'effet d'une force conservative (issue d'un potentiel)



• m P

$$\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z}$$

$$\exists V(x, y, z)$$

$$m\ddot{x} = F_x = -\frac{\partial V}{\partial x}$$

$$m\ddot{y} = F_y = -\frac{\partial V}{\partial y}$$

$$m\ddot{z} = F_z = -\frac{\partial V}{\partial z}$$

C'est une équation vectorielle différentielle (3 équations différentielles)
 faisons apparaître l'énergie cinétique

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt}(m\dot{x}) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

variation de la quant. de movt en x par temps.

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

la quantité de mouvement est la dérivée partielle en x

Comme c'est une dérivée partielle, on peut faire apparaître/introduire l'énergie cinétique complète

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial}{\partial \dot{x}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} m \dot{y}^2 + \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \right) \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{x}} \right) + \frac{\partial V}{\partial x} = 0$$

même chose pour les équations en y et en z :

$$m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{y}} \right) + \frac{\partial V}{\partial y} = 0$$

$$m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{z}} \right) + \frac{\partial V}{\partial z} = 0$$

3) le Lagrangien

$$L = T - V = E_{\text{cin}} - E_{\text{pot}}$$

Coordonnées généralisées L devient fonction

— d'un nombre fini de variables indépendantes

$$q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dot{q}_2, \dots, \dot{q}_n$$

— La configuration mécanique est spécifiée de manière unique par $q_1, q_2, \dots, q_n$

Pour les n coordonnées généralisées $q_1, q_2, \dots, q_n$
 bijection entre les configurations (postures) mécaniques
 et les valeurs des coordonnées $q_1, q_2, q_3, \dots, q_n$.

EN ABSENCE
 DE FORCE
 EXTERIEURE
 !

Equations de
 la dynamique
 (du mvt)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad i=1, \dots, n$$

CAS CONSERVATIF UNIQUEMENT.

Equations de Lagrange avec forces extérieures (non conservatives)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = F_{q_i}$$

F_{q_i} sont les forces généralisées provenant des
 forces extérieures.

→ détermination des $F_{q_i} \Rightarrow$ cf. (cours suivants)

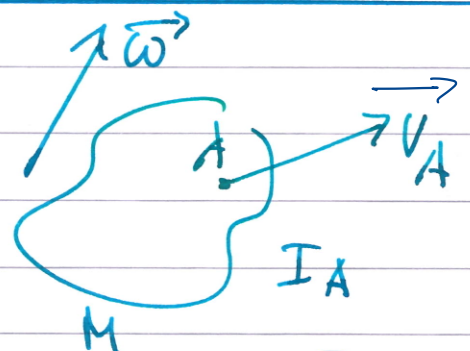
Remarque: - importance de l'énergie cinétique T
 - " de " potentielle V

$$L = T - V$$

⚠ signe $\ominus$!

4) Energie cinétique d'un solide

$$E_{\text{cin}} = T = \frac{1}{2} M \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A + M (\vec{\omega} \wedge \vec{AG}) \cdot \vec{V}_A + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_A \vec{\omega})$$



Cas particuliers: point fixe ou réf. Galilée $T = \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_O \vec{\omega})$

centre de masse $T = \frac{1}{2} M \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_G \vec{\omega})$

Démonstration de la formule:

cinématique du solide

$$E_{cin} = T = \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} \cdot \vec{V}_{\alpha}$$

$$\vec{V}_{\alpha} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_{\alpha}$$

$$\begin{aligned} T &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_{\alpha}) \cdot (\vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}_{\alpha}) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{V}_A - \vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{V}_A - \vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \\ &= \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A - \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{V}_A + \sum_{\alpha} \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A + \sum m_{\alpha} ((\vec{AG} + \vec{GP}_{\alpha}) \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{V}_A + \frac{1}{2} m_{\alpha} (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \\ &= \frac{1}{2} M \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A - \sum m_{\alpha} (\vec{AG} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{V}_A + \frac{1}{2} \sum m_{\alpha} (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \end{aligned}$$

$\sum m_{\alpha} \vec{GP}_{\alpha} = 0$

concentrons nous sur le dernier terme

$$\frac{1}{2} \sum m_{\alpha} (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) \cdot (\vec{AP}_{\alpha} \wedge \vec{\omega}) = \frac{1}{2} \sum m_{\alpha} \vec{\omega}^T [\vec{AP}_{\alpha} \wedge]^T [\vec{AP}_{\alpha} \wedge] \vec{\omega}$$

$$[\vec{AP}_{\alpha} \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}$$

$$[\vec{AP}_{\alpha} \wedge]^T [\vec{AP}_{\alpha} \wedge] = \begin{bmatrix} 0 & z & -y \\ -z & 0 & x \\ y & -x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -z & y \\ z & 0 & -x \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} z^2 + y^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2 + y^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2 + y^2 \end{bmatrix}$$

ainsi

$$\begin{aligned} T &= \frac{1}{2} M \vec{V}_A \cdot \vec{V}_A - M (\vec{AG} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{V}_A \\ &\quad + \frac{1}{2} \vec{\omega} \cdot (I_A \vec{\omega}) \end{aligned}$$

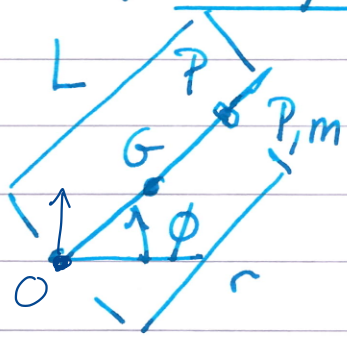
C.Q.F.D.

Rappel: produit mixte

$$(\vec{AG} \wedge \vec{\omega}) \cdot \vec{V}_A = \begin{vmatrix} \vec{AG} & \vec{\omega} & \vec{V}_A \end{vmatrix} \leftarrow \text{déterminant}$$



5) Exemple



- barre avec un axe de rotation O fixe
- centre de masse G au milieu de la barre fixe
- longueur de la barre L de masse M
- angle ϕ
- anneau en P et de masse m. il peut glisser le long de la barre.
- position radiale de l'anneau: r

O est à l'arrêt: $\vec{V}_O = 0$.

Energie cinétique

$$T = \frac{1}{2} M \vec{V}_G \cdot \vec{V}_G + \frac{1}{2} I_G \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \vec{V}_P \cdot \vec{V}_P$$

$$E_{pot} = V = mgy_P + Mgy_G = mgy_P + Mg \frac{L}{2} \sin \phi$$

$$\vec{OP} = r \cos \phi \hat{x} + r \sin \phi \hat{y} \quad \vec{OG} = \frac{L}{2} \cos \phi \hat{x} + \frac{L}{2} \sin \phi \hat{y}$$

$$\vec{V}_P = (\dot{r} \cos \phi - r \sin \phi \dot{\phi}) \hat{x} + (\dot{r} \sin \phi + r \cos \phi \dot{\phi}) \hat{y}$$

$$\vec{V}_G = -\frac{L}{2} \dot{\phi} \sin \phi \hat{x} + \frac{L}{2} \dot{\phi} \cos \phi \hat{y}$$

$$\begin{aligned} \vec{V}_P \cdot \vec{V}_P &= \dot{r}^2 \cos^2 \phi - 2r\dot{r}\cos\phi\sin\phi\dot{\phi} + r^2\sin^2\phi\dot{\phi}^2 \\ &\quad + \dot{r}^2\sin^2\phi + 2r\dot{r}\sin\phi\cos\phi\dot{\phi} + r^2\dot{\phi}^2\cos^2\phi \\ &= \dot{r}^2 + r^2\dot{\phi}^2 \end{aligned}$$

En coord. polaires:

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

$$\dot{\vec{OP}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

$$\dot{\vec{OP}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{V}_P \cdot \vec{V}_P = \dot{\vec{OP}} \cdot \dot{\vec{OP}} = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\phi}^2$$

$$\vec{V}_G \cdot \vec{V}_G = \frac{L^2}{4} \dot{\phi}^2$$

$$T = \underbrace{\frac{1}{2} M \frac{L^2}{4} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} I_G \dot{\phi}^2}_{\frac{1}{2} I_0 \dot{\phi}^2} + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2$$

$$V = mgr \sin \phi + Mg \frac{L}{2} \sin \phi$$

$$L = T - V = \frac{1}{2} I_0 \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\phi}^2 - mgr \sin \phi - Mg \frac{L}{2} \sin \phi$$

2 équations diff. d'ordre 2 chacune (2 coord. généralisées ϕ et r)

$$\textcircled{1} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = 0$$

$$\textcircled{2} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} \right) - \frac{\partial L}{\partial r} = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} = I_0 \dot{\phi} + m r^2 \dot{\phi}$$

$$\frac{\partial L}{\partial \phi} = -mgr \cos \phi - Mg \frac{L}{2} \cos \phi$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} \right) - \frac{\partial L}{\partial \phi} = \textcircled{1} \quad I_0 \ddot{\phi} + \underbrace{2mr\dot{r}}_{+mr^2\ddot{\phi}} \dot{\phi} + mgr \cos \phi + Mg \frac{L}{2} \cos \phi = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m\dot{r}$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = m r \dot{\phi}^2 - mg \sin \phi$$

$$\textcircled{2} \quad \underline{m\ddot{r} - m r \dot{\phi}^2 + mg \sin \phi = 0}$$

$$I_G = \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dm = \frac{M}{L} \int_{-L/2}^{L/2} r^2 dr = \frac{M}{L} \left. \frac{r^3}{3} \right|_{-L/2}^{L/2} = \frac{M}{L} \cdot \frac{L^3}{3 \cdot 8} = \frac{1}{12} M L^2$$

$$I_0 = \int_0^L r^2 dm = \frac{M}{L} \int_0^L r^2 dr = \frac{M}{L} \left. \frac{r^3}{3} \right|_0^L = \frac{1}{3} M L^2$$