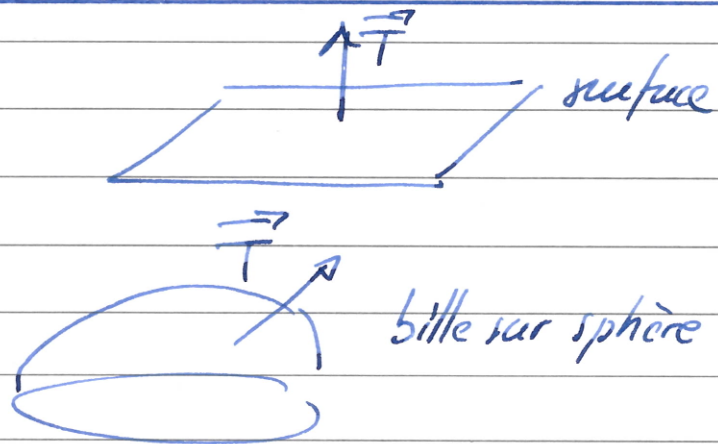
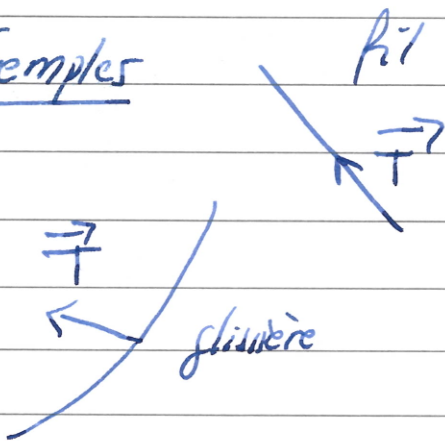


- 1) Contraintes parfaites
- 2) principe de d'Alembert (exemple du pendule simple)
- 3) déduction du formalisme de Lagrange
- 4) cas général (transparents)
diapositives
- 5) Exemples

9) Contraintes parfaites

Définition: Contrainte entre coordonnées telles que les forces nécessaires pour les faire respecter n'effectue aucun travail lors d'un déplacement compatible avec la contrainte.

Exemples



$F(x, y, z, t) = 0$ expression de la contrainte parfaite

surface $C_1 x + C_2 y + C_3 z = 0$ p. ex. $z = 0$

$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$ (bille sur sphère)

$x^2 + y^2 = l^2$ (pendule simple)

$\phi = \Omega t$
 $x = r \cos \theta \cos \Omega t$
 $y = r \cos \theta \sin \Omega t$
 $z = r \sin \theta$

$\left\{ \begin{array}{l} x^2 + y^2 + z^2 = R^2 \\ \frac{x}{\cos \Omega t} = \frac{y}{\sin \Omega t} \end{array} \right. \left| \begin{array}{l} \text{glissière} \\ \text{hémisphérique} \end{array} \right.$

2. Principe de d'Alembert

(2)

2.1 déplacement virtuel

la contrainte parfaite est fixée dans le temps

$F(x, y, z, t) = 0$ t n'est plus une variable.

Def. Un déplacement virtuel infinitésimal $\delta \vec{r} = \delta x \hat{x} + \delta y \hat{y} + \delta z \hat{z}$ est un déplacement tel que $\frac{\partial F}{\partial x} \delta x + \frac{\partial F}{\partial y} \delta y + \frac{\partial F}{\partial z} \delta z = 0$.

Exemple glissière $x^2 + y^2 + z^2 = R^2$

$$x \sin \Omega t + y \cos \Omega t = 0$$

1 d° de liberté car x, y, z sous deux contraintes.

$$\left\{ \begin{array}{l} 2x \delta x + 2y \delta y + 2z \delta z = 0 \\ \delta x \sin \Omega t - \delta y \cos \Omega t = 0 \end{array} \right. \left. \begin{array}{l} \text{tout } \delta x, \delta y, \delta z \text{ tels que} \\ \text{les deux} \\ \text{équations soient} \\ \text{satisfaites} \end{array} \right\}$$

le temps est "figé"

2.2. Travail virtuel

C'est le travail effectué par une force quelconque suite à un déplacement virtuel

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r}$$

Principe de d'Alembert: Une force responsable du maintien d'une contrainte parfaite, n'effectue aucun travail virtuel!

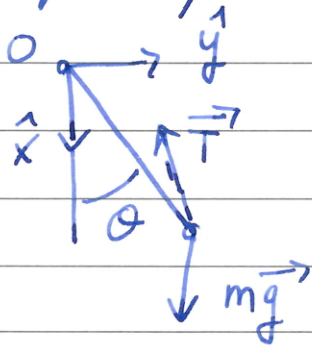
Exemple glissière $\vec{T} = T_x \hat{x} + T_y \hat{y} + T_z \hat{z}$

$$\vec{T} \cdot \delta \vec{r} = 0 \quad T_x \delta x + T_y \delta y + T_z \delta z = 0$$

pour tout $\delta x, \delta y, \delta z$ qui satisfont à $\left\{ \begin{array}{l} x \delta x + y \delta y + z \delta z = 0 \\ \sin \Omega t \delta x - \cos \Omega t \delta y = 0 \end{array} \right.$

(3)

Exemple du pendule simple



$$\begin{cases} m\ddot{x} = T_x + mg \\ m\ddot{y} = T_y \end{cases}$$

contrainte parfaite $x^2 + y^2 = l^2$

Principe de d'Alembert déplacement virtuel $x\delta x + y\delta y = 0$ (1)
travail virtuel de la force de liaison:

$$\delta W = \vec{F} \cdot \delta \vec{r} = T_x \delta x + T_y \delta y = 0.$$

idée de d'Alembert

Réunir toutes les forces potentielles et les pseudo-forces inertielles pour exprimer le travail des forces de liaisons parfaites.

$$(m\ddot{x} - mg)\delta x + m\ddot{y}\delta y = 0. \quad (1)$$

Equations du pendule

il faut dériver 2x la contrainte

$$x\dot{x} + y\dot{y} = 0$$

$$x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0$$

(1) $\rightarrow x\delta x + y\delta y$ et (2)

$$\begin{bmatrix} m\ddot{x} - mg & m\ddot{y} \\ x & y \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \delta x \\ \delta y \end{bmatrix} = 0$$

comme il existe des $\delta x \neq 0$ $\delta y \neq 0$ il faut que

$$\begin{vmatrix} m\ddot{x} - mg & m\ddot{y} \\ x & y \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{cases} (m\ddot{x} - mg)y - x m\ddot{y} = 0 \\ x\ddot{x} + y\ddot{y} + \dot{x}^2 + \dot{y}^2 = 0 \end{cases}$$

Equations
cartésiennes
du pendule.

(4)

pour obtenir des équations différentielles "minimales",
c.-à-d. en nombre minimum, on doit introduire la
coordonnée généralisée θ

$$x = l \cos \theta$$

$$y = l \sin \theta$$

la contrainte $x^2 + y^2 = l^2$
est automatiquement satisfaite

déplacements virtuels:

$$\delta x = -l \sin \theta \delta \theta$$

$$\delta y = l \cos \theta \delta \theta$$

accélération

$$\dot{x} = -l \sin \theta \dot{\theta}$$

$$x'' = -l \sin \theta \ddot{\theta} - l \cos \theta \dot{\theta}^2$$

$$\dot{y} = l \cos \theta \dot{\theta}$$

$$\ddot{y} = l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2$$

$$(m\ddot{x} - mg) \delta x + m\ddot{y} \delta y = 0 \quad (\text{principe de d'Alembert}).$$

$$\text{ou} \quad (\ddot{x} - g) \delta x + \ddot{y} \delta y = 0$$

$$(-l \sin \theta \ddot{\theta} - l \cos \theta \dot{\theta}^2 - g)(-l \sin \theta) \delta \theta + (l \cos \theta \ddot{\theta} - l \sin \theta \dot{\theta}^2)(l \cos \theta) \delta \theta = 0$$

$$(+l^2 (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \ddot{\theta} + g l \sin \theta) \delta \theta = 0$$

comme ceci doit être vrai quel que soit $\delta \theta \neq 0$

$$\ddot{\theta} = -\frac{g}{l} \sin \theta$$

3) déduction du formalisme de Lagrange à
partir du principe de d'Alembert.

$$(m\ddot{x} - mg) \delta x + (m\ddot{y}) \delta y = 0$$

$$(\ddot{x} - g) \delta x + \ddot{y} \delta y = 0$$

(5)

$$x = l \cos \theta \quad \delta x = -l \sin \theta \delta \theta$$

$$y = l \sin \theta \quad \delta y = l \cos \theta \delta \theta$$

$$\dot{x} = -l \sin \theta \dot{\theta} \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = -l \cos \theta \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} = l \sin \theta$$

$$\dot{y} = l \cos \theta \dot{\theta} \quad \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{\theta}} = -l \sin \theta \quad \frac{\partial \dot{y}}{\partial \dot{\theta}} = l \cos \theta$$

$$m \ddot{x} (-l \sin \theta) \delta \theta + m \ddot{y} (l \cos \theta) \delta \theta \quad \text{travail des forces cinétiques}$$

$$m \ddot{x} (-l \sin \theta) = \frac{d}{dt} \left[m \dot{x} \left(-l \sin \theta \right) \right] - m \dot{x} \left(-l \cos \theta \dot{\theta} \right)$$

Leibniz!

$$m \ddot{x} (-l \sin \theta) = \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} m \dot{x}^2 \right)$$

$$\text{et } m \ddot{y} (l \cos \theta) = \frac{d}{dt} \left[m \dot{y} \left(l \cos \theta \right) \right] - m \dot{y} \left(-l \sin \theta \dot{\theta} \right)$$

$$= \frac{d}{dt} \left[\frac{\partial}{\partial \dot{\theta}} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right) \right] - \frac{\partial}{\partial \theta} \left(\frac{1}{2} m \dot{y}^2 \right)$$

$$\text{et ainsi } [m \ddot{x} (-l \sin \theta) + m \ddot{y} (l \cos \theta)] \delta \theta = \left[\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right] \delta \theta$$

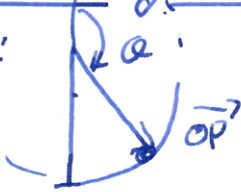
travail virtuel de la force potentielle

$$mg \delta x = -mg l \sin \theta \delta \theta = -\frac{\partial V}{\partial \theta} \delta \theta$$

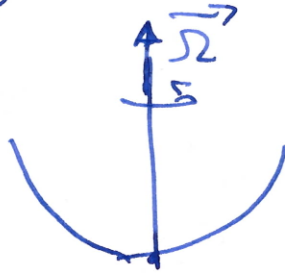
$$V = -mg l \cos \theta \Rightarrow \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) \delta \theta = \left(-\frac{\partial V}{\partial \theta} \right) \delta \theta$$

valable quel que soit $\delta \theta$, et donc

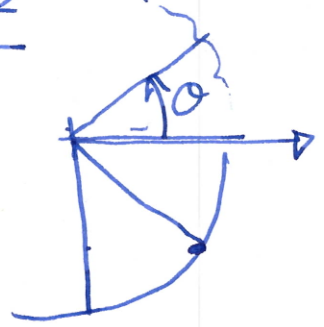
$$\boxed{\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}} \right) - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta} = 0} \quad \mathcal{L} = T - V.$$

Exemple : glissière hémisphériquesphérique 1:

$$\begin{aligned}x &= r \sin \theta \cos \phi \\y &= r \sin \theta \sin \phi \\z &= r \cos \theta\end{aligned}$$

sphérique 2

$$\begin{aligned}x &= r \cos \theta \cos \phi \\y &= r \cos \theta \sin \phi \\z &= r \sin \theta\end{aligned}$$

sphérique 1

$$a_r = \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 - r\dot{\phi}^2 \sin^2 \theta = \underline{\underline{-r\dot{\theta}^2 - r\Omega^2 \sin^2 \theta}}$$

$$a_\theta = r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta} - r\dot{\phi}^2 \cos \theta \sin \theta = \underline{\underline{r\ddot{\theta} - r\Omega^2 \cos \theta \sin \theta}}$$

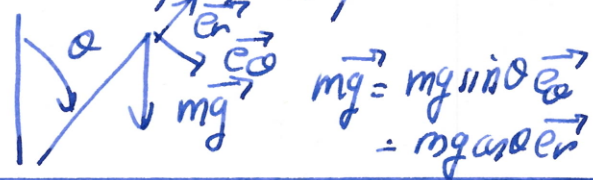
$$a_\phi = r\ddot{\phi} \sin \theta + 2r\dot{\phi}\dot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\phi} \sin \theta = \underline{\underline{2r\Omega\dot{\theta} + 2\dot{r}\Omega \sin \theta}}$$

Equations dynamiques: (avec forces de liaison parfaite)

$$ma_r = T_r - mg \cos \theta$$

$$ma_\theta = T_\theta + mg \sin \theta$$

$$ma_\phi = T_\phi$$

déplacements virtuels: $\delta\phi=0$ $\delta r=0$ $\delta\theta$ quelconque.Principe de d'Alembert: $T_r \delta r + T_\theta \delta\theta + T_\phi \delta\phi = 0$ mais comme $\delta r=0$ et $\delta\phi=0 \Rightarrow r T_\theta \delta\theta = 0 \quad \forall \delta\theta$

$$(ma_\theta - mg \sin \theta) \delta\theta = 0 \quad \forall \delta\theta \neq 0 \Rightarrow T_\theta \delta\theta = 0$$

$$\Rightarrow ma_\theta - mg \sin \theta = 0$$

$$\boxed{r\ddot{\theta} - r\Omega^2 \cos \theta \sin \theta - g \sin \theta = 0}$$