

XII Forces centrales & Kepler

Mvt à la surface de la terre

- 1) Forces centrales
- 2) Coniques et accélération en $\frac{1}{r^2}$ (conique: parabole, hyperbole, ellipse).
- 2.0 Binet 2.1 conique $\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}$ 2.2 $\frac{1}{r^2} \Leftrightarrow$ conique
- 3) Mvt à la surface de la terre: exemple sur les mvt dans des référentiels en mvt: vitesses absolue et relative.

1) Forces centrales

Définition: Une force est dite centrale si, à chaque instant, elle passe par un point fixe O . (Plus précis: si sa droite de support passe par le point fixe O .)

Thm I. Sous l'action d'une force centrale, le mouvement d'un point matériel est toujours planaire.

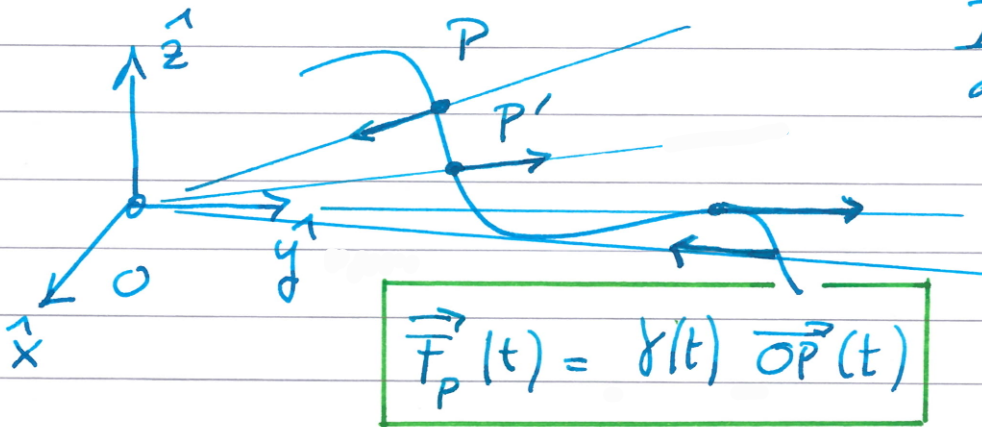
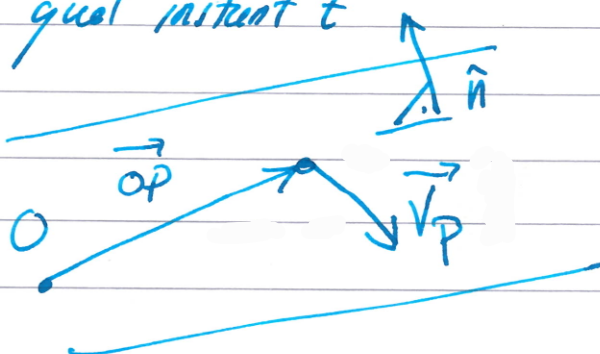


Illustration
du concept de
force centrale.

Démonstration du Thm I La position $\vec{OP}$ et le vecteur vitesse $\vec{V}_P$ définissent un plan à n'importe quel instant t



dont $\hat{n}$ est la normale
le mouvement est plan

$$\hat{n} = 0.$$

montrons que $\dot{\vec{n}} = 0$. Soit $\vec{n} = \vec{OP} \wedge \vec{V}_P$ (on d'un mouvement à force centrale.)

$$\dot{\vec{n}} = \dot{\vec{OP}} \wedge \vec{V}_P + \vec{OP} \wedge \dot{\vec{V}}_P = \underbrace{\vec{V}_P \wedge \vec{V}_P}_{=0} + \vec{OP} \wedge \underbrace{\frac{1}{m} \delta \vec{OP}}_{\text{à cause force centrale}}$$

$$\dot{\vec{n}} = \frac{1}{m} \delta \vec{OP} \wedge \vec{OP} = 0 \Rightarrow \text{le mouvement est plan}$$

la réciproque est évidente car si le mot est plan alors $\dot{\vec{n}} = 0$.

ainsi $\vec{OP} \wedge \vec{V}_P = \text{cte}$ (Corollaire)

Corollaire 1 Loi des aires $r^2 \dot{\theta} = \text{cte}$

Démonstration

en introduisant les coordonnées cylindriques (dans le plan engendré)

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

$$\vec{V}_P = \dot{\vec{OP}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\hat{z} = \vec{e}_z = \hat{n}$$

$$\begin{aligned} \vec{OP} \wedge \vec{V}_P &= r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) = \dot{\theta} r^2 \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta \\ &= r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z = \text{cte} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r^2 \dot{\theta} = \text{cte} \quad \text{car } \dot{\vec{n}} = 0.$$

2) Coniques et accélération en $\frac{1}{r^2}$

2.0) La formule de Binet Dans un mouvement central, la formule de Binet exprime l'accélération radiale (en coord. cyl.) en fonction de la trajectoire $r(\theta)$ (c-à-d. en fonction de la dépendance de la distance radiale en fonction de l'angle θ)

Thm

Formule de Binet :

$$a_r = - \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

Explications:

C est la constante des aires

$$C = r^2 \dot{\theta}$$

r est la (fonction) distance radiale donnée en fonction de θ .

a_r : accélération radiale

Démonstration:

$$V_p = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$a_p = \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta$$

$$= \underbrace{(\ddot{r} - r \dot{\theta}^2)}_{a_r} \vec{e}_r + (2\dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}) \vec{e}_\theta$$

accélération radiale

$$\left(\frac{d}{d\theta} r^{-1} = -r^{-2} \frac{dr}{d\theta} \right)$$

$$\underline{\underline{\frac{dr}{dt}}} = \frac{dr}{d\theta} \cdot \frac{d\theta}{dt} = \frac{dr}{d\theta} \frac{C}{r^2} = - \underline{\underline{\frac{d}{d\theta} \frac{C}{r}}}$$

(règle de la dérivée)

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{d}{d\theta} \frac{dr}{dt} \frac{d\theta}{dt} = \left[\frac{d}{d\theta} \left(- \frac{d}{d\theta} \frac{C}{r} \right) \right] \frac{C}{r^2}$$

$$a_p = \ddot{r} - r \dot{\theta}^2 = \ddot{r} - \frac{C^2}{r^3} = \left[\frac{d}{d\theta} \left(- \frac{d}{d\theta} \frac{C}{r} \right) \right] \frac{C}{r^2} - \frac{C^2}{r^3}$$

(comme C est une constante)

$$a_r = - \frac{C^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad \text{C.Q.F.D}$$

$$2.1) \text{ conique } \Rightarrow a_r \propto \frac{1}{r^2} \quad \text{et } 2.2) \text{ conique } \Leftarrow a_r \propto \frac{1}{r^2}$$

quelques explications: on va relier l'apparition du type d'accélération en $\frac{1}{r^2}$ avec la nature

des trajectoires à savoir une conique qui est

Soit une parabole
une ellipse
une hyperbole.

Quels sont les types d'effets physiques qui donnent une accélération en $\frac{1}{r^2}$?

Force gravifique $\chi = GM \Rightarrow \vec{a} = -\chi \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$

(Force électrostatique $\chi = -\frac{1}{m} \frac{1}{4\pi\epsilon_0} qQ$)
Loi de Coulomb

les coniques

Parabole

Ellipse

Hyperbole

$p := e \cdot d$
 $p = \frac{b^2}{a}$

$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \alpha$

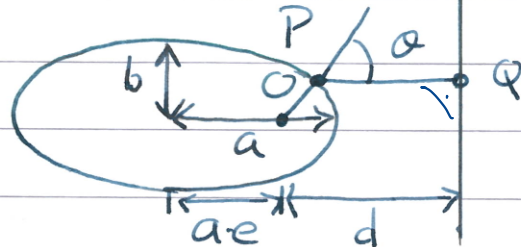
foyer O

$\|\vec{OP}\| = r$

$\frac{1}{2}$ grand axe a
 $\frac{1}{2}$ petite axe b

distance du foyer à la directrice : d

Directrice Δ
ellipse $0 < e < 1$



eccentricité : e

$e = 0$ cercle

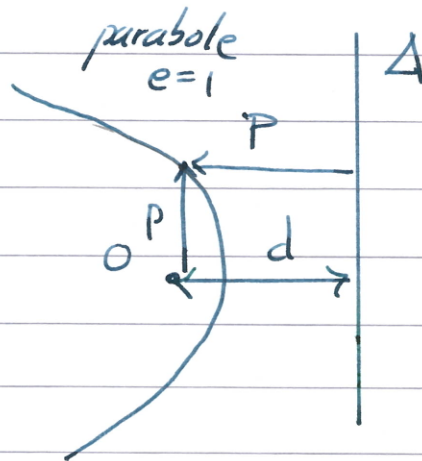
$0 < e < 1$ ellipse

$e = 1$ parabole

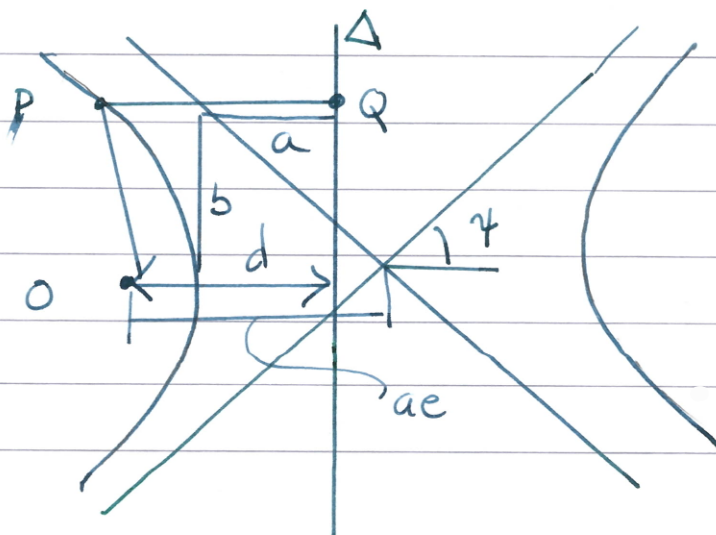
$1 < e < \infty$ hyperbole

$e = \infty$ droite

parabole
 $e = 1$



hyperbole
 $1 < e < \infty$



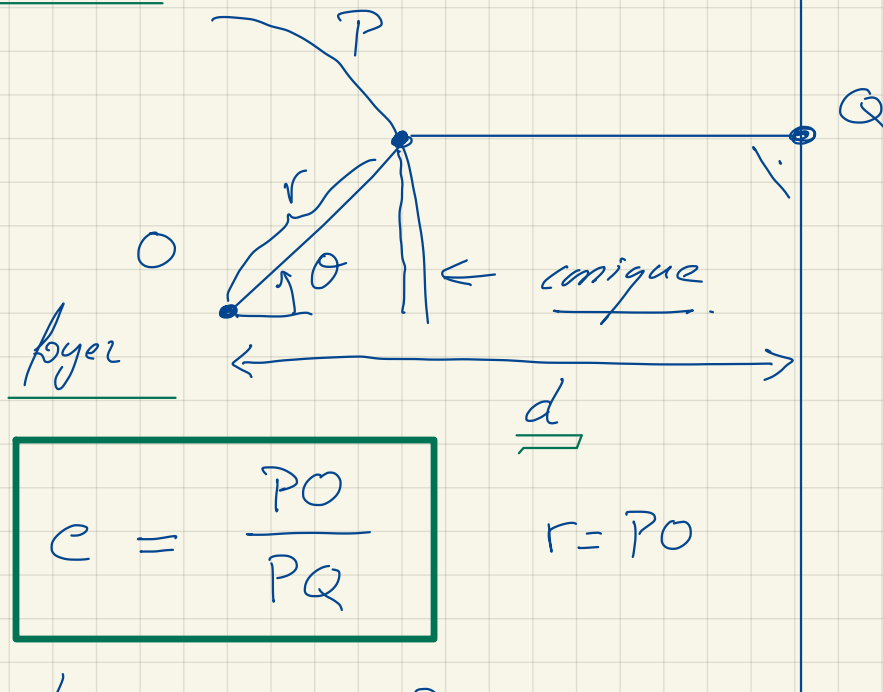
$\tan \gamma = \frac{b}{a}$

$e = \frac{PO}{PQ} = \frac{r}{d - r \cos \alpha}$

$p := e \cdot d$
 $p = \frac{b^2}{a}$

Définition d'une conique
excentricité e

Δ la directrice.



$$e = \frac{PO}{PQ}$$

$$r = PO$$

$$d = r \cos \theta + PQ$$

$$e = \frac{r}{d - r \cos \theta}$$

$$ed - er \cos \theta = r$$

$$\frac{ed}{r} - e \cos \theta = 1$$

$$\frac{ed}{r} = 1 + e \cos \theta$$

définition: $p \triangleq ed$

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta$$

Définition d'une conique

Le rapport entre la distance au foyer et à la directrice est toujours constant

$$e = \frac{PO}{PQ} = \frac{r}{d - r \cos \theta}$$

d est la distance de O à la directrice Δ .

2.1 Thm (conique $\Leftrightarrow \frac{1}{r^2}$) Si la trajectoire est une conique d'équation $\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta$ elle a alors l'accélération en $\frac{1}{r^2}$.

$$p \triangleq e \cdot d$$

paramètre p
 $p = \frac{b^2}{a}$

Démonstration

La trajectoire fournit pour θ changeant un rayon r qui varie. On a ainsi l'expression du rayon vecteur (distance radiale) que l'on peut introduire dans Binet.

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \theta} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta)$$

$$\begin{aligned} a_r &= -\frac{c^2}{p^2} (1 + e \cos \theta)^2 \left[-\frac{e \cos \theta}{p} + \frac{1}{p} (1 + e \cos \theta) \right] \\ &= -\frac{c^2}{r^2} \left[-\frac{e}{p} \cos \theta + \frac{e}{p} \cos \theta + \frac{1}{p} \right] = -\frac{c^2}{p r^2} \quad \text{C.Q.F.D.} \end{aligned}$$

$$\chi = \frac{c^2}{p} = \frac{c^2 a}{b^2}$$

Dans le cas de loi universelle de la gravitation

$$\chi = GM = c^2 \frac{a}{b^2}$$

2.2 Étudions la réciproque $\frac{1}{r^2} \Rightarrow$ conique

Thm: Si l'évolution du point (matériel) est telle que

$\vec{a} = -\chi \frac{\vec{r}}{\|\vec{r}\|^3}$ où χ est une constante, alors le mouvement est central de centre O , et la trajectoire est une conique dont O est le foyer.

$$a_r = -\frac{\chi}{r^2} \quad (\text{hypothèse})$$

$$a_r = -\frac{c^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right] \quad (\text{Binet})$$

$$-\frac{\chi}{r^2} = -\frac{c^2}{r^2} \left[\frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right) + \frac{1}{r} \right]$$

$$\frac{\chi}{c^2} - \frac{1}{r} = \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{1}{r} \right)$$

mais $\frac{\chi}{c^2}$ est une constante que l'on peut ajuster sans le symbole $\frac{d^2}{d\theta^2}$

$$\frac{\frac{\chi(\theta)}{c^2} - \frac{1}{r}}{1} = \frac{d^2}{d\theta^2} \left(\frac{\frac{\chi(\theta)}{c^2} - \frac{1}{r}}{1} \right)$$

$\Rightarrow$ c'est l'équation d'un oscillateur harmonique dont θ est la ^{variable} indépendante

$$\frac{d^2 x}{d\theta^2} = -x$$

$$x(\theta) = A \cos \theta + B \sin \theta$$

on peut choisir l'axe polaire afin que $B=0$

(*) $\frac{1}{r} = \frac{\chi}{c^2} + A \cos \theta$ et on a bien une équation d'une conique avec

$$\frac{p}{r} = 1 + e \cos \theta$$

$$p = \frac{c^2}{|\chi|} \quad e = \frac{|A| c^2}{|\chi|}$$

$$\frac{1}{r} \frac{c^2}{\chi} = 1 + \frac{c^2}{\chi} A \cos \theta \quad \text{C.Q.F.D.}$$