

XIV Statique

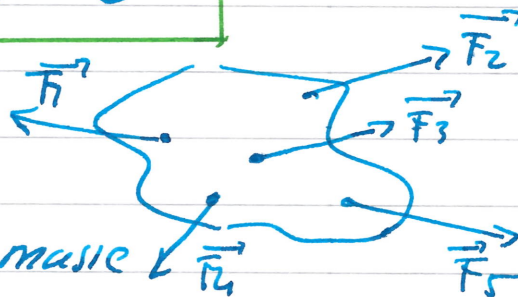
- 1) Conditions d'équilibre "classique"
 - 1.1 résultante
 - 1.2 moment
 - 1.3 torseur et réduction
- 2) Travaux virtuels et équilibre
 - 2.1 Contrainte unilatérale et-bilatérale
 - 2.2 Principe de d'Alembert
 - 2.3 Forces appliquées (conservatives & non conservatives)
 - 2.4 Principe des travaux virt. d'équil.

1) Conditions d'équilibre "classique"

1.1) résultante
 $\vec{R} = \sum \vec{F}_i$

$$\sum \vec{F}_i = 0$$

$\vec{F}_i$ forces appliquées et ramenées au centre de masse

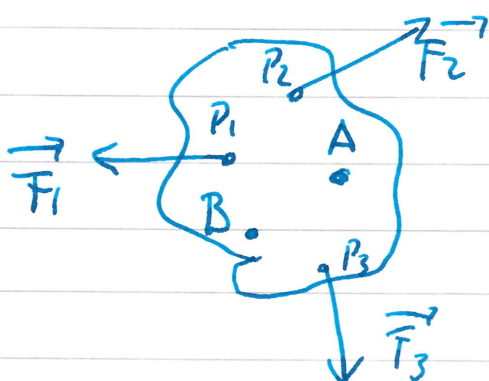


Un équilibre peut être assimilé à

- (A) $\left\{ \begin{array}{l} \rightarrow \text{un ensemble de solides} \\ \rightarrow \text{chaque solide est en équilibre} \end{array} \right.$
 - (B) $\rightarrow \text{un solide unique}$
- "solide"

Les deux interprétations sont possibles dès à l'absence de mouvement.

1.2 Moment de force



On peut envisager un point A quelconque du "solide"

A: point de réduction

(A n'est pas nécessairement le point de support des forces.)
 & pas nécessairement à l'intérieur du "solide".

condition d'équilibre:

$\forall A,$

$$\vec{M}_A = \sum_i \vec{AP}_i \wedge \vec{F}_i = 0$$

en d'autres termes, si on choisit B , il est également vrai que

$$\vec{M}_B = \sum_i \vec{BP}_i \wedge \vec{F}_i = 0$$

1.3 Torseur

Définition : torseur de forces :

Un biscur τ de forces est un ensemble de forces liées ou glissantes. On ^{associe} attache chacune des forces à un point d'application (vecteurs liés) ou à un point sur la droite de support (vecteur glissant).

$$\tau = \{ (P_1, \vec{F}_1), (P_2, \vec{F}_2), (P_3, \vec{F}_3), \dots, (P_N, \vec{F}_N) \}$$

On définit une classe d'équivalence entre les torseurs.

Prop : Classe d'équivalence

+ transitive

+ réflexive

+ symétrique

relation

$$\tau_1 \sim \tau_2 \text{ et } \tau_2 \sim \tau_3 \Rightarrow \tau_1 \sim \tau_3$$

$$\tau_1 \sim \tau_2 \Rightarrow \tau_2 \sim \tau_1$$

$$\tau_1 \sim \tau_1$$

Définition d'équivalence de deux torseurs :

$$\tau_1 \sim \tau_2 \Leftrightarrow$$

Résultante identique

$$\begin{aligned} \textcircled{I} \quad \vec{R}_{(1)} &= \vec{R}_{(2)} \\ \textcircled{II} \quad \vec{M}_A^{(1)} &= \vec{M}_A^{(2)} \end{aligned}$$

Moment en un point de réduction identique

Pour tout point de réduction A .

La dépendance de la réduction par rapport au point de réduction obéit à la règle BABAR

$$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$$

(changement du point de réduction)

Autres torseurs: torseur cinétique $(\vec{p}, \vec{L}_A)$
torseur cinématique $(\vec{\omega}, \vec{V}_A)$
"résultante" "moment"

BABAR

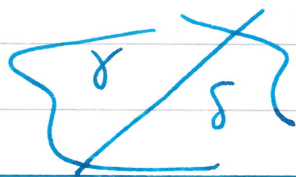
torseur cinétique	$\vec{p}$	$\vec{L}_A$	$\vec{L}_B = \vec{L}_A + \vec{BA} \wedge \vec{p}$
torseur cinématique	$\vec{\omega}$	$\vec{V}_A$	$\vec{V}_B = \vec{V}_A + \vec{BA} \wedge \vec{\omega}$
torseur de force	$\vec{R}$	$\vec{M}_A$	$\vec{M}_B = \vec{M}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$

La condition d'équilibre s'écrit comme l'annulation des éléments de réduction du torseur de force

$$\begin{cases} \vec{R} = 0 \\ \vec{M}_A = 0 \end{cases}$$

plan de coupe arbitraire du "solide"

Autre image:



$$\mathcal{T} = \mathcal{T}_X \cup \mathcal{T}_D$$

$$\begin{aligned} \vec{R}^X + \vec{R}^D &= 0 \\ \vec{M}_A^X + \vec{M}_A^D &= 0 \end{aligned}$$

$$\mathcal{T}_X = \{ (P_X, \vec{F}_X) \mid P_X \in X \}$$

$$\mathcal{T}_D = \{ (P_D, \vec{F}_D) \mid P_D \in D \}$$

2.1 Contrainte unilatérale et bilatérale

unilatérale : inégalité $F(x, y, z) \geq 0$
 $F(q_1, q_2, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \geq 0$

shifter sur
trampoline



fil simple mais
inextensible

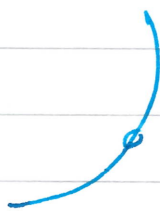
Rd simple
mais inextensible

$$x^2 + y^2 - r^2 \leq 0$$

bilatérale : contrainte exprimée sous la forme
d'une égalité

$$x^2 + y^2 - r^2 = 0$$

cercle



⚠ L'application du principe des travaux virtuels impose l'utilisation, le cas de contraintes parfaites bilatérales.

2.2 Principe de d'Alembert : Rappel : le travail des forces
de liaison parfaites bilatérales est nul.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{n.c} + \vec{T}_i$$

$\vec{r}_i$ rayon vecteur

$$\sum_{i=0}^{\alpha} \vec{T}_i \cdot \delta \vec{r}_i = 0$$

Principe d'Alembert

$$\begin{cases} m_i \ddot{x}_i = F_{i,x}^{n.c} + T_{i,x} \\ m_i \ddot{y}_i = F_{i,y}^{n.c} + T_{i,y} \\ m_i \ddot{z}_i = F_{i,z}^{n.c} + T_{i,z} \end{cases}$$

$$\sum T_i x \delta x + T_i y \delta y + T_i z \delta z = 0$$

Principe d'Alembert

2.3 Forces appliquées

Forces non conservatives

(non issue de potentiel, frottements, autres forces)
 $\vec{F}^{n.c}$

- Forces conservatives $\Rightarrow$ associée à un potentiel

$$\vec{F} = - \frac{\partial V}{\partial \vec{x}} = - \frac{\partial V}{\partial x} \hat{x} - \frac{\partial V}{\partial y} \hat{y} - \frac{\partial V}{\partial z} \hat{z}$$

Ponts matériels et bilan des forces

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{T}_i + \vec{F}_i^{n.c} + \vec{F}_i^{pot} = \vec{T}_i + \vec{F}_i^{n.c} - \vec{\nabla} V$$

Travail des forces appliquées (travail infinitésimal des forces appliquées)

$$\delta W = \sum_{i=1}^N (\vec{F}_i^{n.c} - \vec{\nabla} V_i) \cdot \delta \vec{r}_i$$

2.4

Principe des travaux virtuels

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta W = 0 \quad \text{pour les forces appliquées} \\ \Leftrightarrow \\ \text{le système est à l'équilibre} \end{array} \right.$$

$$\sum_i (\vec{F}_i^{n.c} - \vec{\nabla} V_i) \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \quad \Leftrightarrow \text{Equilibre}$$

En coordonnées généralisées:

$$\text{On peut de Lagrange} \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$$

On fait sortir la partie potentiel:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \left(Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \quad \begin{array}{l} \text{Force généralisée} \\ \text{appliquée} \\ \text{(sans potentiel)} \end{array}$$

Remarque: les équations de Lagrange sont établies à partir du principe de d'Alembert et on a

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i$$

$\forall \delta q_i$ compatible. A l'équilibre la partie gauche tombe.
(avec les contraintes)

$$\text{Equilibre} \Leftrightarrow \sum_i \left(Q_i - \frac{\partial V}{\partial q_i} \right) \delta q_i = 0$$

Esquisse de démonstration

La démonstration repose sur le fait qu'à l'équilibre $\dot{q}_i = 0, \ddot{q}_i = 0$
 et que T est une forme quadratique des vitesses $\dot{q}_i$.

$$\text{Equilibre} \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = 0.$$