

XIV Statique

1) Conditions d'équilibre

1.1

1.2

1.3

to

+ red

2) Travaux et équilibre

2.1 Contrainte
et

2.2 Principe de d'

2.3 Forces appliquées
(conservatives &
non conservatives)

2.4 Principe des travaux

1) Conditions d'équilibre

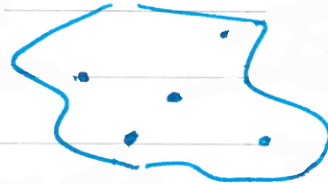
1.1)

=

= Σ

$$\Sigma_i = 0$$

Solide en équilibre
forces et
ramenées au



1.2

Un équilibre peut être assimilé à

(A)

→ un ensemble de
→ chaque est en

(B)

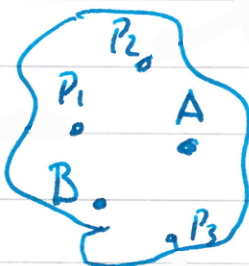
→ un unique

"] " "

Les deux interprétations sont possibles dues à l'absence

1.2

Moment de



On peut envisager un point
A quelconque du " "

A: point de red

(A n'est pas nécessairement le
point de support des forces.)
& pas nécessairement à l'intérieur du "solide".

condition d'équilibre:

$\forall A,$

$$\vec{M}_A =$$

$=$

en d'autres termes, si on choisit B, il est également vrai que

$$\vec{M}_B =$$

$=$

1.3 Torseur

Définition : torseur de forces :

Un biseau τ de forces est un ensemble de forces ou . On ^{associe} attache chacune des forces à un point d'application (vecteur) ou à un point sur la droite de support (vecteur).

$$\tau = \{ (,), (,), (,), \dots, (,) \}$$

On définit une classe d'équivalence entre les torseurs.

Noté : classe d'équivalence

relation

+

$\sim$ et $\sim \Rightarrow \sim$

+

$\sim \Rightarrow \sim$

+

$\sim$

Définition d'équivalence de deux torseurs :

$\sim$

$\Leftrightarrow$

Résultante



$=$

Moment



$=$

Pour tout point de réduction A.

La dépendance de la réduction par rapport au point de réduction obéit à la règle BABAR

$$\vec{M}' = \vec{M} + \vec{r} \wedge \vec{R}$$

(changement du point de réduction)

Autres torseurs : torseur cinétique (,)
torseur cinématique (,)
"résultante" "moment"

BABAR

torseur cinétique

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{BA} \wedge \vec{r}$$

torseur cinématique

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{BA} \wedge \vec{r}$$

torseur de force

$$\vec{r} = \vec{r} + \vec{BA} \wedge \vec{r}$$

La condition d'équilibre s'écrit comme l'annulation des éléments de force

du torseur

Autre image :

$$\left\{ \begin{array}{l} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{array} \right. \quad \text{plan de coupe arbitraire de "l'objet"}$$

$$\tau = \tau_\gamma \cup \tau_\delta$$

$$\begin{array}{l} \sum \vec{F} = 0 \\ \sum \vec{M} = 0 \end{array}$$

$$\tau_\gamma = \{ (,) \mid P_\alpha \in \gamma \}$$

$$\tau_\delta = \{ (,) \mid P_\beta \in \delta \}$$

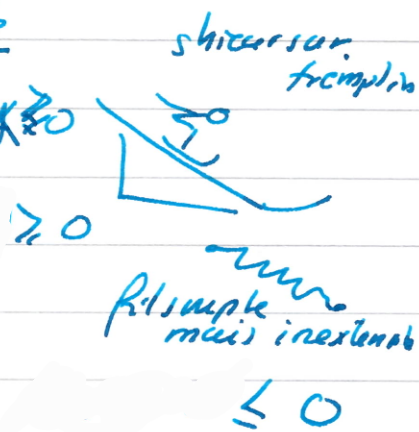
2.1 Contrainte unilatérale et bilatérale

unilatérale : inégalité

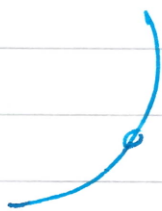
bilatérale



fil simple mais inextensible



bilatérale : contrainte exprimée sous la forme d'une égalité



cercle

$$= 0$$

⚠ L'application du principe des travaux virtuels impose l'utilisation, le cas de contraintes parfaites bilatérales.

2.2 Principe de d' : Rappel : le travail des forces de liaison parfaites bilatérales est nul.

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{F}_i^{n.c} + \vec{T}_i$$

↑
rayon recteur

$\sum_{i=0}^{\alpha} \cdot = 0$

Principe d'Alembert

$$\left\{ \begin{array}{l} m_i \ddot{x}_i = F_{i,x}^{n.c} + T_{i,x} \\ m_i \ddot{y}_i = F_{i,y} + T_{i,y} \\ m_i \ddot{z}_i = F_{i,z} + T_{i,z} \end{array} \right.$$

$\delta x + \delta y + \delta z = 0$

Principe d'Alembert

2.3 Forces appliquées

Forces non conservatives
(non issue de potentiel, frottements, autres forces)

- Forces conservatives = associée à un potentiel

$$\vec{F} = - \nabla \phi$$

Ponts matériels et bilan des forces

$$m_i \ddot{\vec{r}}_i = \vec{T}_i + \vec{F}_i^{n.c} + \vec{F}_i^{pot} = \vec{T}_i + \vec{F}_i^{n.c} - \vec{\nabla} V$$

Travail des forces appliquées (travail infinitésimal des forces appliquées)

$$\delta W = \sum_{i=1}^N \left(\vec{F}_i^{app} \right) \cdot \delta \vec{r}_i$$

2.4

Principe des travaux virtuels

$$\left\{ \begin{array}{l} \delta W = 0 \text{ pour les forces appliquées} \\ \Leftrightarrow \\ \text{le système est à l'équilibre} \end{array} \right.$$

$$\sum_i \vec{F}_i^{app} \cdot \delta \vec{r}_i = 0 \Leftrightarrow \text{Equilibre}$$

En coordonnées généralisées:

On peut de Lagrange $\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = Q_i$

On fait sortir la partie potentiel:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \left(\vec{F}_i^{app} - \vec{\nabla} V \right) \cdot \delta \vec{r}_i$$

Force généralisée appliquée (avec potentiel).

Remarque: les équations de Lagrange sont établies à partir du principe de d'Alembert et on a

$$\sum_i \left(\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} \right) \delta q_i = \sum_i \left(\vec{F}_i^{app} - \vec{\nabla} V \right) \cdot \delta \vec{r}_i$$

$\forall \delta q_i$ A l'équilibre la partie

$$\text{Equilibre} \Leftrightarrow \sum_i (\quad) = 0$$

Esquisse de démonstration

La démonstration repose sur le fait qu'à l'équilibre $\dot{q}_i = 0, \ddot{q}_i = 0$
 et que T est une forme quadratique des vitesses $\dot{q}_i$.

$$\text{Equilibre} \Leftrightarrow \quad = 0.$$