

VIII mvt relatif / Effets gyroscopiques (Corps solide II)

- 1) Vitesse et accélération des points d'un solide
- 2) (vitesses et accélérations relatives) mouvements relatifs, 2 référentiels
- 3) Angles d'Euler
- 4) Vitesse spatiale (Equations d'Euler)
- 5) Torques et gyroscopes

1) 1.1 vitesse (distribution des vt.) d'un solide

"BABAR"

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$$

$$\boxed{\vec{V}_P = \vec{V}_A + \vec{PA} \wedge \vec{\omega}}$$

$\vec{PA} = -\vec{AP} \quad \vec{\omega} \wedge \vec{AP} = -\vec{AP} \wedge \vec{\omega}$



Démonstration: on attache un réf. repère mobile au point A lié au solide
(A, $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$)

règle BABAR: $\vec{\pi}_B = \vec{\pi}_A + \vec{BA} \wedge \vec{R}$

$$\vec{V}_P = \dot{\vec{OP}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{x}_i = \dot{\vec{OA}} + \dot{\vec{AP}}$$

$$\vec{AP} = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i \quad \dot{\vec{AP}} = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\hat{y}}_i$$

Comme $\vec{AP}$ est un vecteur du solide, les coordonnées y_i sont fixes dans le repère lié au solide, $\dot{y}_i = 0, i=1,2,3$.
ainsi $\dot{\vec{AP}} = \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\hat{y}}_i$

on applique Poisson, $\dot{\vec{AP}} = \sum_{i=1}^3 y_i (\vec{\omega} \wedge \hat{y}_i)$
 $= \vec{\omega} \wedge \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$

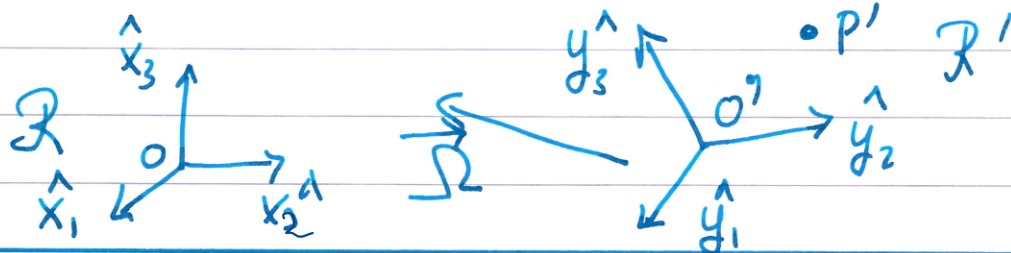
et donc $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \dot{\vec{AP}} = \vec{V}_A + \vec{\omega} \wedge \vec{AP}$ c.q.f.d.

1.2 accélération des points d'un solide

Leibniz + Poisson
+ 1 dérivée:

$$\boxed{\vec{a}_P = \vec{a}_A + \dot{\vec{\omega}} \wedge \vec{AP} + \vec{\omega} \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{AP})}$$

2.) mouvements relatifs on a deux référentiels: R galiléen
 les référentiels sont des corps solide sans masse R' en mouvement
 soit $\vec{\Omega}$ le vecteur de rotation instantané de R' par rapport à R .



Soit P' un point fixe de R' (comme c'est un solide on a)

$$\vec{V}_{P'} = \vec{V}_{O'} + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'P'}$$

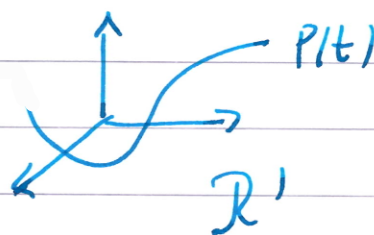
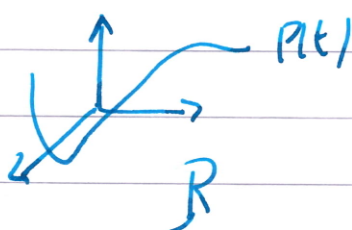
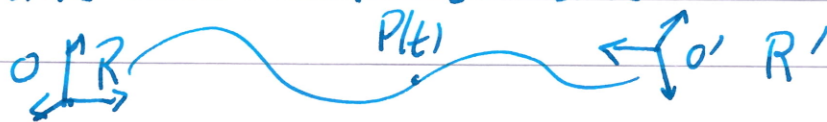
$$\vec{a}_{P'} = \vec{a}_{O'} + \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{O'P'} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'P'})$$

Δ P' est fixe dans R' .

Que se passe-t-il lorsque P' se déplace?

appelons P le point qui se déplace et P' le point
coïncidant avec P à l'instant t dans R' .

Lorsque P se déplace il laisse "deux traces"
 une dans R et une dans R' , des points coïncidents dans chaque référentiel



Si on suppose R' "non concurrencé" de son déplacement
 et on dérive les trajectoires dans R'

$$\frac{d}{dt} \Big|_{R'} \vec{O'P} \neq 0 \quad \text{mais} \quad \frac{d}{dt} \Big|_{R'} \vec{O'P'} = 0.$$

En détails

$$\vec{OP} = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i = \vec{OP}' = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i \quad \text{car point coïncident}$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP} = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\hat{y}}_i \neq \left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP}' = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{OP} = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i \neq \left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{OP}' = 0$$

Formule des vitesses relatives et absolue

$$\underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP}}_{\text{vitesse absolue de } P} = \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{O'P}}_{\text{vitesse relative}} + \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OO'}}_R + \vec{\Omega} \wedge \vec{O'P}$$

vitesse d'entraînement
(vitesse du point coïncident P')

Formule des accélérations

$$\underbrace{\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_R \vec{OP}}_{\text{accélération absolue}} = \underbrace{\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{R'} \vec{O'P}}_{\text{accélération relative}} + \underbrace{\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_R \vec{OO'}}_R + \underbrace{\vec{\Omega} \wedge \vec{O'P} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{O'P})}_{\text{accélération de Coriolis}} + 2 \vec{\Omega} \wedge \left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{O'P}$$

accélération d'entraînement

Démonstration des vitesses:

car $\vec{PP}' = 0$

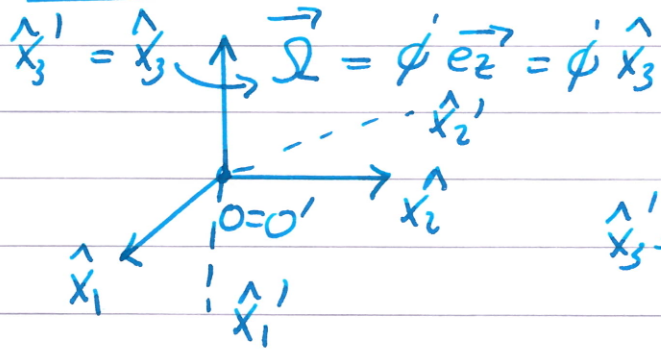
$$\vec{OP} = \vec{OO'} + \vec{O'P} = \vec{OO'} + \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i$$

$$\dot{\vec{OP}} = \dot{\vec{OO'}} + \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\hat{y}}_i$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP} = \left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OO'} + \left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{O'P} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}$$

C.Q.F.D.

Illustration Vitesse et accélérations en coordonnées cylindriques



le mouvement est plan
dans $\hat{x}_1' \hat{x}_3'$, $\vec{e}_\rho \vec{e}_z$
 $\hat{x}_3' = \vec{e}_z$
 $\hat{x}_1' = \vec{e}_\rho$

ainsi la vitesse relative: $\dot{z} \vec{e}_z + \dot{\rho} \vec{e}_\rho = \vec{V}_r$

vitesse d'entraînement: vitesse du point coïncidant
 $\vec{\Omega} \wedge \underbrace{(z \vec{e}_z + \rho \vec{e}_\rho)}_{\vec{O'P'}}$
 $\vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z$
 $\vec{V}_e = \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge (z \vec{e}_z + \rho \vec{e}_\rho) = \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi$

$$\Rightarrow \vec{V}_{Pa} = \dot{z} \vec{e}_z + \dot{\rho} \vec{e}_\rho + \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

accélération relative: $\vec{a}_r = \ddot{z} \vec{e}_z + \ddot{\rho} \vec{e}_\rho$

accélération d'entraînement: $\vec{a}_e = \dot{\vec{\Omega}} \wedge \vec{OP} + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP})$

$$\vec{a}_e = \dot{\phi}'' \vec{e}_z \wedge (z \vec{e}_z + \rho \vec{e}_\rho) + \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge \rho \dot{\phi} \vec{e}_\phi$$

$$= \rho \dot{\phi}'' \vec{e}_\phi + - \rho \dot{\phi}^2 \vec{e}_\rho$$

accélération complémentaire (ou de coriolis):

$$\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega}' \wedge \vec{V}_r = 2 \dot{\phi} \vec{e}_z \wedge (\dot{z} \vec{e}_z + \dot{\rho} \vec{e}_\rho)$$

$$= 2 \dot{\phi} \dot{\rho} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{a}_a = \boxed{\vec{a}_r} + \vec{a}_e + \vec{a}_c = \boxed{\ddot{z} \vec{e}_z + \ddot{\rho} \vec{e}_\rho} + \rho \dot{\phi}'' \vec{e}_\phi - \rho \dot{\phi}^2 \vec{e}_\rho + 2 \dot{\phi} \dot{\rho} \vec{e}_\phi$$

$$\vec{c\phi}: (P\ddot{\phi} + 2\dot{\phi}\dot{P})$$

$$\vec{c\rho}: \dot{P} - \rho\dot{\phi}^2$$

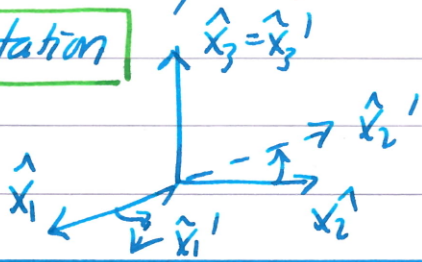
$$c_z: \ddot{z}$$

accélération en
coordonnées
cylindriques..

3) Angles d'Euler Trois rotations successives d'axes canoniques en répétant l'axe 3-1-3 afin de décrire la position (de rotation) d'une solide avec un pt fixe.

Première rotation

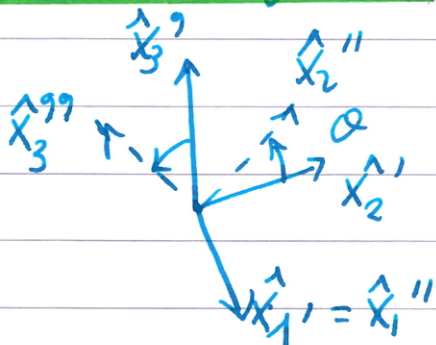
axe 3
angle ψ



$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

(0, $\hat{x}_1', \hat{x}_2', \hat{x}_3'$) (0, $\hat{x}$)

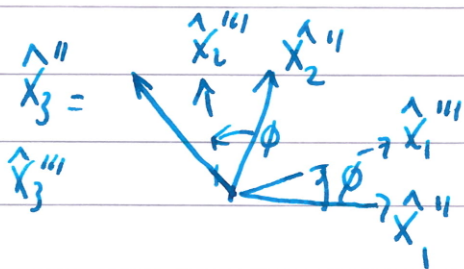
Deuxième rotation
axe 1', angle θ



$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

(0, $\hat{x}_i''$) (0, $\hat{x}_i'$)

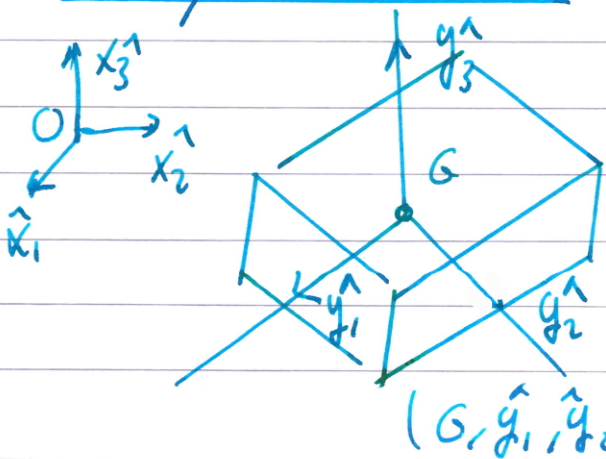
Troisième rotation
axe 3'', angle ϕ



$$\begin{bmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}$$

(0, $\hat{x}_i'''$) (0, $\hat{x}_i''$)

3. Equalité d'Euler



$$\hat{y}_i = \hat{x}_i'''$$

Solide avec ou
sans gravité
en particulier satellite
ou parallélépipède
homogène

$$I_{G_1} < I_{G_2} < I_{G_3}$$

$$I_G =$$

$$\begin{bmatrix} I_{G_1} & 0 & 0 \\ 0 & I_{G_2} & 0 \\ 0 & 0 & I_{G_3} \end{bmatrix}$$

(G, $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$) lié au solide

Modèle de force

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\hat{x}_3$$

Comme $\vec{GG} = 0$

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \vec{GG} \wedge \vec{F} = 0$$

Loi de Newton

pour la rotation, on utilise

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}} = 0$$

$$\vec{L}_G = \mathcal{I}_G \vec{\omega} \quad (\text{car solide})$$

Exprimons $\vec{L}_G$ et $\vec{\omega}$ dans un repère lié au solide (afin d'avoir le tenseur constant diagonal)

$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{y}_1 + \omega_2 \hat{y}_2 + \omega_3 \hat{y}_3 = \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{(G, \hat{y}_i)} \quad i=1,2,3$$

objectif

Déterminer les équations différentielles qui gouvernent les ω_i , $i=1,2,3$.

$$\vec{L}_G = \sum_{i=1}^3 L_{Gi} \hat{y}_i = \begin{pmatrix} L_{G1} \\ L_{G2} \\ L_{G3} \end{pmatrix}_{(G, \hat{y}_i)} = \mathcal{I}_G \begin{pmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{pmatrix}_{(G, \hat{y}_i)}$$

$$= \mathcal{I}_{G1} \omega_1 \hat{y}_1 + \mathcal{I}_{G2} \omega_2 \hat{y}_2 + \mathcal{I}_{G3} \omega_3 \hat{y}_3 \quad (\text{on a utilisé la propriété diagonal de } \mathcal{I}_G)$$

⚠ $\dot{\hat{y}}_i \neq 0$ car $(G, \hat{y}_i)$ est lié au solide

utilisons Poisson pour déterminer les $\dot{\hat{y}}_i$

$$\dot{\hat{y}}_i = \vec{\omega} \wedge \hat{y}_i = [\vec{\omega} \wedge] [\hat{y}_i]$$

$$[\vec{\omega} \wedge] = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_3 & \omega_2 \\ \omega_3 & 0 & -\omega_1 \\ -\omega_2 & \omega_1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\dot{\hat{y}}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ \omega_3 \\ -\omega_2 \end{pmatrix} = \omega_3 \hat{y}_2 - \omega_2 \hat{y}_3$$

$$\dot{\hat{y}}_2 = \begin{pmatrix} -\omega_3 \\ 0 \\ \omega_1 \end{pmatrix} = -\omega_3 \hat{y}_1 + \omega_1 \hat{y}_3$$

$$\dot{\hat{y}}_3 = \begin{pmatrix} \omega_2 \\ -\omega_1 \\ 0 \end{pmatrix} = \omega_2 \hat{y}_1 - \omega_1 \hat{y}_2$$

$$\begin{aligned}
 \frac{d\vec{L}_G}{dt} &= I_{G1} \dot{\omega}_1 \hat{y}_1 + I_{G1} \omega_1 \dot{\hat{y}}_1 + I_{G2} \dot{\omega}_2 \hat{y}_2 + I_{G2} \omega_2 \dot{\hat{y}}_2 + I_{G3} \dot{\omega}_3 \hat{y}_3 + I_{G3} \omega_3 \dot{\hat{y}}_3 \\
 &= \underbrace{I_{G1} \dot{\omega}_1 \hat{y}_1}_{=0} + \underbrace{I_{G1} \omega_1 (\omega_3 \hat{y}_2 - \omega_2 \hat{y}_3)}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{I_{G2} \dot{\omega}_2 \hat{y}_2}_{=0} + \underbrace{I_{G2} \omega_2 (-\omega_3 \hat{y}_1 + \omega_1 \hat{y}_3)}_{=0} \\
 &\quad + \underbrace{I_{G3} \dot{\omega}_3 \hat{y}_3}_{=0} + \underbrace{I_{G3} \omega_3 (\omega_2 \hat{y}_1 - \omega_1 \hat{y}_2)}_{=0}
 \end{aligned}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \underbrace{0}_{=0} \hat{y}_1 + \underbrace{0}_{=0} \hat{y}_2 + \underbrace{0}_{=0} \hat{y}_3 = \vec{0}$$

$$0 = I_{G1} \dot{\omega}_1 - I_{G2} \omega_2 \omega_3 + I_{G3} \omega_3 \omega_2$$

$$0 = I_{G2} \dot{\omega}_2 + I_{G1} \omega_1 \omega_3 - I_{G3} \omega_3 \omega_1$$

$$0 = I_{G3} \dot{\omega}_3 - I_{G1} \omega_1 \omega_2 + I_{G2} \omega_1 \omega_2$$

$$\left. \begin{aligned}
 \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{I_{G1}} (I_{G2} - I_{G3}) \omega_2 \omega_3 \\
 \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{I_{G2}} (I_{G3} - I_{G1}) \omega_1 \omega_3 \\
 \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{I_{G3}} (I_{G1} - I_{G2}) \omega_1 \omega_2
 \end{aligned} \right\} \text{Equations d'Euler}$$

Exprimons les ω_i en fonction des angles d'Euler

et des vitesses angulaires $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\phi}$

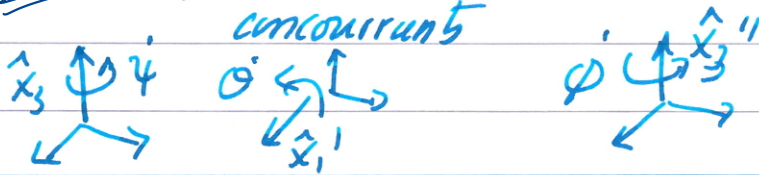
$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{y}_1 + \omega_2 \hat{y}_2 + \omega_3 \hat{y}_3$$

On constate que le repère $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ n'est autre que $(G, \hat{x}_1''', \hat{x}_2''', \hat{x}_3''')$ des angles d'Euler

et donc $\omega_i = \omega_i'''$ $i=1,2,3$.

Expression de $\vec{\omega}$ en fonction de $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$

$\vec{\omega}$ $\rightarrow$ des angles d'Euler $\equiv \vec{\omega}$ dans $(G, \hat{y}_i)$
 $\vec{\omega}$ comporte trois rotations infinitésimales d'axes



$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{x}_1 + \dot{\phi} \hat{x}_3''$$

comme $\hat{x}_3 = \hat{x}_3'$ et $\hat{x}_1' = \hat{x}_1''$ et $\hat{x}_3'' = \hat{x}_3'''$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3' + \dot{\theta} \hat{x}_1'' + \dot{\phi} \hat{x}_3'''$$

Exprimons $\vec{\omega}$ dans $(G, \hat{x}_1''', \hat{x}_2''', \hat{x}_3''') = (G, \hat{g}_1, \hat{g}_2, \hat{g}_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \sin\theta \dot{\psi} \\ \cos\theta \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$(G, \hat{x}_i')$ $(G, \hat{x}_i'')$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{x}_1'' + \sin\theta \dot{\psi} \hat{x}_2'' + \cos\theta \dot{\psi} \hat{x}_3'' + \dot{\phi} \hat{x}_3'''$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{\theta} \\ \sin\theta \dot{\psi} \\ \cos\theta \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\phi \dot{\theta} + \sin\phi \sin\theta \dot{\psi} \\ -\sin\phi \dot{\theta} + \cos\phi \sin\theta \dot{\psi} \\ \cos\theta \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = (\cos\phi\dot{\theta} + \sin\phi\sin\theta\dot{\psi})\hat{y}_1 + (-\sin\phi\dot{\theta} + \cos\phi\sin\theta\dot{\psi})\hat{y}_2 + (\dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi})\hat{y}_3$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \cos\phi\dot{\theta} + \sin\phi\sin\theta\dot{\psi} \\ \omega_2 = -\sin\phi\dot{\theta} + \cos\phi\sin\theta\dot{\psi} \\ \omega_3 = \dot{\phi} + \cos\theta\dot{\psi} \end{cases}$$

il faut encore intégrer
ces 3 équations diff. ordre 1
pour obtenir les angles θ, ψ, ϕ