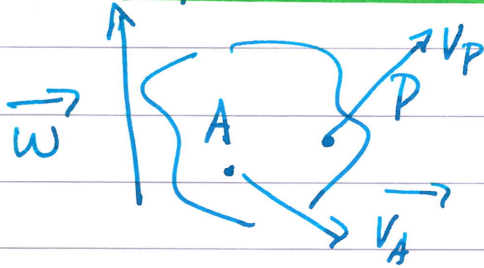


VIII mvt relatif / Effets gyroscopiques (Corps solide II)

- 1) Vitesse et accélération des points d'un solide
- 2) (vitesses et accélérations) mouvements 2 référentiels
- 3) Angles
- 4) Vitesse spatiale (Equations)
- 5) T et g

1) 1.1 vitesse (distribution des vt.) d'un solide

$$\vec{V}_P = \vec{V}_A +$$



Démonstration : on attache un réf/repère mobile au point A lié au solide
(A, $\hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3$)

$$\vec{V}_P = \dot{\vec{OP}} = \sum_{i=1}^3 \dot{x}_i \hat{x}_i = \dot{\vec{OA}} + \dot{\vec{AP}}$$

$$\vec{AP} = \sum_{i=1}^3 y_i \hat{y}_i \quad \dot{\vec{AP}} = \sum_{i=1}^3 \dot{y}_i \hat{y}_i + \sum_{i=1}^3 y_i \dot{\hat{y}}_i$$

Comme $\vec{AP}$ est un vecteur du solide, les coordonnées y_i sont fixes dans le repère lié au solide, $i=1,2,3$, ainsi $\dot{\vec{AP}} =$

on applique Poisson, $\dot{\vec{AP}} = \sum_{i=1}^3$

et donc $\vec{V}_P = \vec{V}_A + \dot{\vec{AP}} = \vec{V}_A +$ C.Q.F.D.

1.2 accélération des points d'un solide

Leibniz + Poisson
+ 1 dérivée:

$$\vec{a}_P = \vec{a}_A +$$

2.) mouvements relatifs on a deux référentiels: R galiléen
 les référentiels sont des corps solide sans masse R' en mouvement
 soit le vecteur de rotation instantané de R' par rapport à R .



Soit P' un point fixe de R' (comme c'est un solide on a)

$$\vec{V}_{P'} = \vec{V}_{O'} +$$

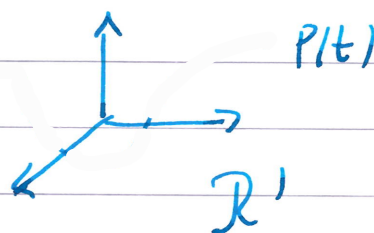
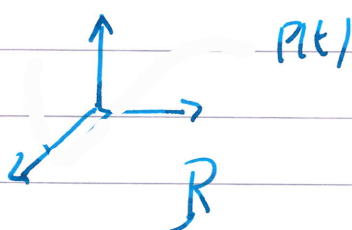
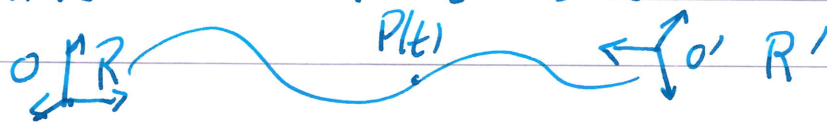
$$\vec{a}_{P'} = \vec{a}_{O'} +$$

⚠ P' est fixe dans R' .

Que se passe-t-il lorsque P' se déplace?

appelons P le point qui se déplace et P' le point
coïncidant avec P à l'instant t dans R' .

Lorsque P se déplace il laisse
 une trace dans R et une trace dans R' ,



Si on suppose R' "non concurrencé" de son déplacement
 et on décrit les trajectoires dans R' $\frac{d}{dt} \Big|_{R'}$ $O'P$ mais $\frac{d}{dt} \Big|_{R'}$ $O'P'$

En détails

$$\vec{OP} =$$

$$= \vec{OP}' =$$

car point
coincident

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP} =$$

$$\neq \left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP}' =$$

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{OP} =$$

$$\neq \left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{OP}' =$$

Formule des vitesses relatives et absolue

$$\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP} = \left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{OP}' + \underbrace{\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OO}'}_{\text{vitesse du point}} + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}'$$

(vitesse du point)

Formule des accélérations

$$\left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_R \vec{OP} = \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_{R'} \vec{OP}' + \left. \frac{d^2}{dt^2} \right|_R \vec{OO}' + \vec{\Omega} \wedge \vec{OP}' + \vec{\Omega} \wedge (\vec{\Omega} \wedge \vec{OP}') + 2 \vec{\Omega} \wedge \left. \frac{d}{dt} \right|_{R'} \vec{OP}'$$

Démonstration des vitesses:

car $\vec{PP}' = 0$

$$\vec{OP} = \vec{OO}' + \vec{O'P}' =$$

$$\dot{\vec{OP}} = \quad + \quad +$$

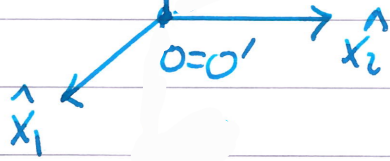
$$\left. \frac{d}{dt} \right|_R \vec{OP} = \quad + \quad +$$

C.Q.F.D.

Illustration

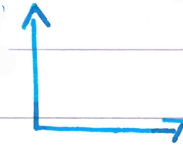
Vitesse et accélérations en coordonnées cylindriques

$$\hat{x}_3' = \hat{x}_3 \quad \vec{\Omega} = \dot{\phi} \vec{e}_z = \dot{\phi} \hat{x}_3$$



le mouvement est plan

dans



ainsi la vitesse relative: $\vec{v}_r$

vitesse d'entraînement: vitesse du point coïncidant

$$\vec{\Omega} =$$

$\wedge$

$$\vec{v}_e = \Omega \wedge (\vec{O'P'}) =$$

$$\Rightarrow \vec{v}_{Pa} =$$

accélération relative: $\vec{a}_r =$

accélération d'entraînement: $\vec{a}_e = \dot{\Omega} \wedge \vec{OP} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \vec{OP})$

$$\vec{a}_e = \dot{\Omega} \wedge \vec{OP} + \Omega \wedge (\Omega \wedge \vec{OP})$$

=

accélération complémentaire (ou de Coriolis):

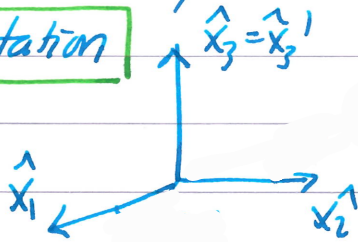
$$\vec{a}_c = 2 \vec{\Omega} \wedge \vec{v}_r = \Omega \wedge (\Omega \wedge \vec{OP})$$

=

3) Angles d'Euler Trois rotations successives d'axes canoniques en répétant l'axe $3-1-3$ afin de décrire la position (de rotation) d'une solide avec un pt fixe.

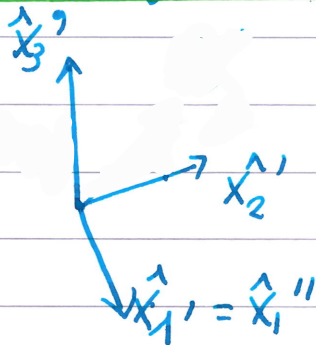
Première rotation

axe 3
angle ψ



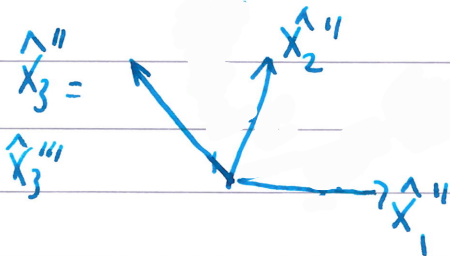
$$\begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi & \sin \psi & 0 \\ -\sin \psi & \cos \psi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}$$

Deuxième rotation
axe 1', angle θ



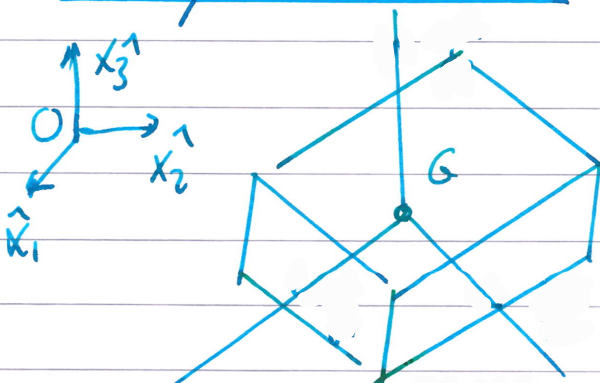
$$\begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \theta & \sin \theta \\ 0 & -\sin \theta & \cos \theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{bmatrix}$$

Troisième rotation
axe 3'', angle ϕ



$$\begin{bmatrix} x_1''' \\ x_2''' \\ x_3''' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \phi & \sin \phi & 0 \\ -\sin \phi & \cos \phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1'' \\ x_2'' \\ x_3'' \end{bmatrix}$$

3. Equation d'Euler



Solide avec ou sans gravité
en particulier satellite
ou parallélépipède homogène

$I_G =$
lié au solide

$$\begin{bmatrix} I_{11} & I_{12} & I_{13} \\ I_{21} & I_{22} & I_{23} \\ I_{31} & I_{32} & I_{33} \end{bmatrix}$$

Modèle de force

$$\vec{F} = m\vec{g} =$$

Comme $\vec{G} = 0$

$$\vec{\Gamma}_G^{\text{ext}} = \vec{1} =$$

Loi de Newton

pour la rotation, on utilise

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{\text{ext}}$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{\Gamma}_G^{\text{ext}} =$$

$$\vec{L}_G =$$

(car solide)

Exprimons $\vec{L}_G$ et $\vec{\omega}$ dans un repère lié au solide
(afin d'avoir le tenseur constant diagonal)

$$\vec{\omega} =$$

$$= \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

objectif

Déterminer les équations différentielles qui gouvernent
les ω_i , $i=1,2,3$.

$$\vec{L}_G =$$

$$= \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$=$$

(on a utilisé)
la propriété diagonal
de $\vec{I}_G$

$$\Delta \quad \dot{\hat{y}}_i \neq$$

car $(G, \hat{y}_i)$ est lié au solide

utilisons $\vec{\omega}$ pour déterminer les $\dot{\hat{y}}_i$

$$\dot{\hat{y}}_i =$$

$$= [] []$$

$$[] = \begin{pmatrix} \\ \\ \end{pmatrix}$$

$$\dot{\hat{y}}_1 = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

$$\dot{\hat{y}}_2 = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

$$\dot{\hat{y}}_3 = \begin{pmatrix} \\ \end{pmatrix} =$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \dots + \dots + \dots$$

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = m \hat{y}_1 + \hat{y}_2 + \hat{y}_3 =$$

$$m =$$

$$=$$

$$=$$

$$\left. \begin{aligned} \dot{\omega}_1 &= \frac{1}{m} \left(\dots \right) \\ \dot{\omega}_2 &= \frac{1}{m} \left(\dots \right) \\ \dot{\omega}_3 &= \frac{1}{m} \left(\dots \right) \end{aligned} \right\} \text{Equations d'Euler}$$

Expression des ω_i en fonction des angles d'Euler
et des vitesses angulaires $\dot{\theta}, \dot{\varphi}, \dot{\phi}$

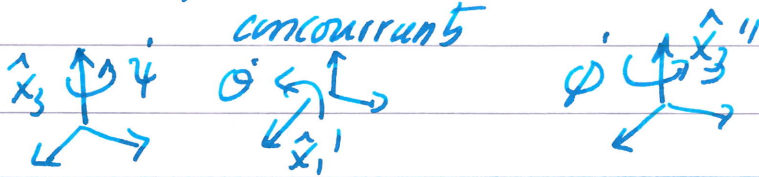
$$\vec{\omega} = \omega_1 \hat{y}_1 + \omega_2 \hat{y}_2 + \omega_3 \hat{y}_3$$

On constate que le repère $(G, \hat{y}_1, \hat{y}_2, \hat{y}_3)$ n'est autre
que $(G, \dots, \dots, \dots)$ des angles d'Euler

et donc $\omega_i = \dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$ $i=1,2,3$.

Expression de $\vec{\omega}$ en fonction de $\dot{\psi}, \dot{\theta}, \dot{\phi}$

$\vec{\omega}$ comporte trois rotations infinitésimales d'axes



$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3 + \dot{\theta} \hat{x}_1 + \dot{\phi} \hat{x}_3''$$

comme $\hat{x}_3 = \hat{x}_3'$ et $\hat{x}_1' = \hat{x}_1''$ et $\hat{x}_3'' = \hat{x}_3'''$

$$\vec{\omega} = \dot{\psi} \hat{x}_3' + \dot{\theta} \hat{x}_1'' + \dot{\phi} \hat{x}_3'''$$

Exprimons $\vec{\omega}$ dans $(\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3) = (\hat{e}_1, \hat{e}_2, \hat{e}_3)$

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & \sin\theta \\ 0 & -\sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\psi} \end{bmatrix}$$

$(\hat{e}_1, \hat{x}_1')$ $(\hat{e}_1, \hat{x}_1')$

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \hat{x}_1'' + \sin\theta \dot{\psi} \hat{x}_2'' + \cos\theta \dot{\psi} \hat{x}_3'' + \dot{\phi} \hat{x}_3'''$$

$$\begin{bmatrix} \cos\phi & \sin\phi & 0 \\ -\sin\phi & \cos\phi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \dot{\phi} \end{bmatrix}$$

$$\vec{\omega} = \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \hat{y}_1 + \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \hat{y}_2 + \begin{pmatrix} \dots \end{pmatrix} \hat{y}_3$$

$$\begin{cases} \omega_1 = \\ \omega_2 = \\ \omega_3 = \end{cases}$$

il faut encore intégrer
ces 3 équations diff. ordre 1
pour obtenir les angles θ, φ