

VII le corps solide

1. Formules du chapitre et explications

2. Cinématique du solide $\vec{\omega}$ unique

3. Inerties

3.1 plan 2D I scalaire

3.2 3D : $I \downarrow 3$ matrice 3×3 .

3.3 Calcul des inerties

3.4 Steiner

3.5 Exemples

4. Transferts
point arbitraire

5. Energie cinétique

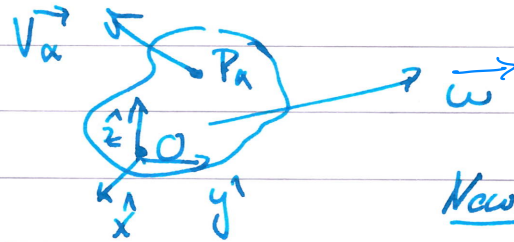
1. Formules du chapitre

1.1 Point fixe O du solide.

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= I_O \vec{\omega} \\ \vec{V}_\alpha &= \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha \end{aligned}$$

Solide
uniquement!

$$(L_O \triangleq \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{V}_\alpha)$$



Newton!

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O^{\text{ext}}$$

$$\vec{M}_O^{\text{ext}} = \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

1.2 Centre de masse G (centre de gravité)

formules "Newton" valables $\forall$ système

Rotation!

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G^{\text{ext}}$$

$$\vec{M}_G^{\text{ext}} = \sum \vec{GP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

Centre de masse (translation)

$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} = \sum \vec{F}_\alpha^{\text{ext}}$$

Solide:

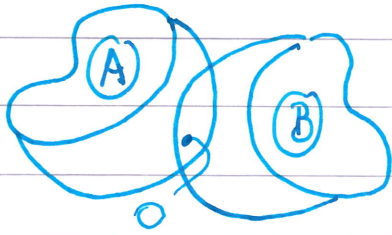
$$\begin{aligned} \text{momentum. } \vec{L}_G &= I_G \cdot \vec{\omega} \\ \text{cinématique } \vec{V}_\alpha &= \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP}_\alpha \end{aligned}$$

uniquement pour un
solide

Hypothèse O est un point commun à (A) et (B)

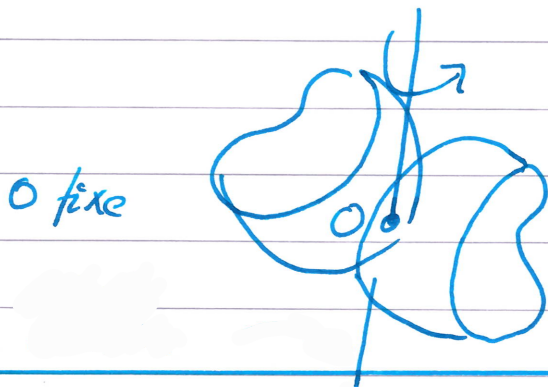
2. cinématique du solide

Soit un solide dans une configuration (A) , et ramenons le dans une configuration (B)



Existe-t-il une transformation qui amène (A) vers (B) ?

Réponse: oui! il suffit d'une rotation unique d'un axe spécifique et d'un angle spécifique!



$\Rightarrow$ Passage à la limite pour avoir une rotation instantanée

$$\dot{\vec{OP}}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha$$

$\vec{\omega}$ identique pour tous les points P_α

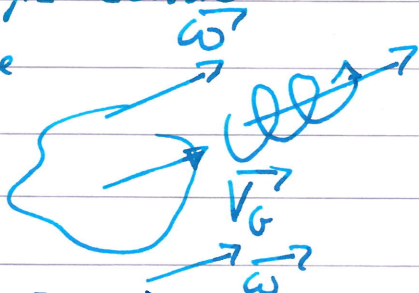
mouvement général du solide

Le solide translète & tourne

La translation permet d'obtenir un point fixe, puis on applique le résultat ci-dessus, rotation unique d'axe et angle spécifiques.

mouvement infinitésimal général du solide

le corps solide se déplace infinitésimalement en "hélice"
"hélice"



$$\vec{V}_{P_\alpha} = \vec{V}_G + \vec{P}_\alpha G \wedge \vec{\omega}$$

translation ($\vec{V}_G$)

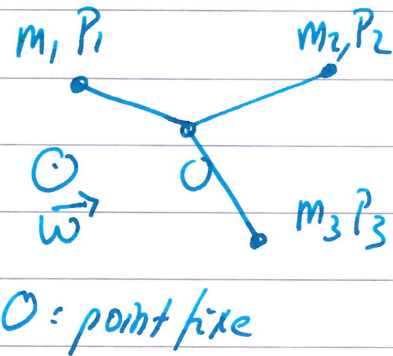
rotation infinitésimale

$$\vec{V}_{P_\alpha} = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{GP}_\alpha = \vec{V}_G + \vec{\omega} \wedge \vec{P}_\alpha G = \vec{V}_G + \vec{P}_\alpha G \wedge \vec{\omega}$$

3. Inertie de rotation. $\equiv$ moment d'inertie I

On va exprimer le moment cinétique $L_O^{\rightarrow}$ en tenant compte de la particularité cinématique du solide, à savoir l'existence d'un vecteur libre $\vec{\omega}$ unique pour tous les points du solide.

Solide bidimensionnel



La densité peut ou non être uniforme. Ici 3 points matériels rigidelement reliés.

La rigidité conduit à l'existence d'un $\vec{\omega}$ unique

$$\vec{V}_\alpha = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha$$

$\alpha = 1, 2, 3, \dots$

moment cinétique $L_O^{\rightarrow} = \sum_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge m_{\alpha} \vec{V}_\alpha$

$$= \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha)$$

on utilise le produit triple (double): $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c}) \vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b}) \vec{c}$

$$L_O^{\rightarrow} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{OP}_\alpha) \vec{\omega} - \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \vec{OP}_\alpha$$

Dans le cas planaire, $\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega} = 0$ car $\vec{\omega} = \omega \cdot \hat{z}$.
et $\vec{OP}_\alpha = x_{\alpha} \hat{x} + y_{\alpha} \hat{y}$

$$\Rightarrow L_O^{\rightarrow} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} (\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{OP}_\alpha) \vec{\omega} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \|\vec{OP}_\alpha\|^2 \vec{\omega}$$

$$L_O^{\rightarrow} = \left(\sum_{\alpha} m_{\alpha} \|\vec{OP}_\alpha\|^2 \right) \vec{\omega} = I_O \vec{\omega}$$

Définition

$$I_0 = \sum_i m_\alpha \|OP_\alpha\|^2$$

Moment d'inertie

$$I_0 = \int \|OP_\alpha\|^2 dm$$

$$I_0 = \int \rho^2 \mu(\rho) d\rho$$

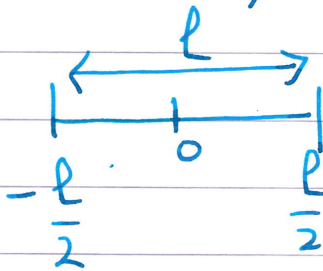
$$I_0 : [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

μ : densité linéique
 $[\frac{\text{kg}}{\text{m}}]$

Si densité uniforme

$$I_0 = \int \rho^2 \frac{m}{\ell} d\rho$$

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$

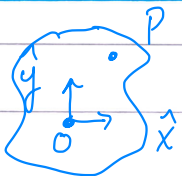


$$= \frac{m}{\ell} \int_{-l/2}^{l/2} \rho^2 d\rho$$

$$\frac{m}{\ell} \left. \frac{\rho^3}{3} \right|_{-l/2}^{l/2} = \frac{m}{\ell} \left(\frac{l^3}{8 \cdot 3} + \frac{l^3}{8 \cdot 3} \right) = \frac{m\ell^2}{12}$$

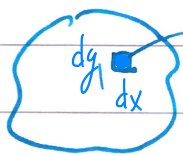
Pour un corps 2D planaire

$$\|\vec{OP}\|^2 = x^2 + y^2$$



$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) \mu dx dy$$

μ : masse surfacique $[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2}]$

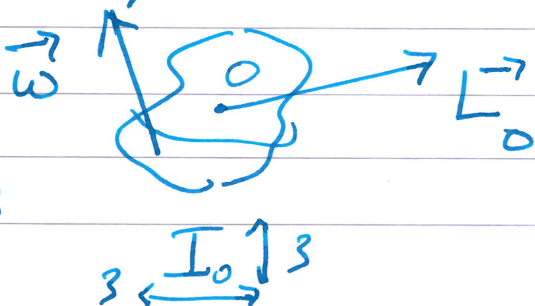


$$dm = \mu dx dy$$

$$I_0 = \iint (x^2 + y^2) dm$$
$$= \iint \rho^2 dm$$
$$[\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$

En 3D, on ne plus garantir $\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega} = 0$.

$\Rightarrow$ conséquence $\vec{L}_0$ n'est plus aligné avec $\vec{\omega}$

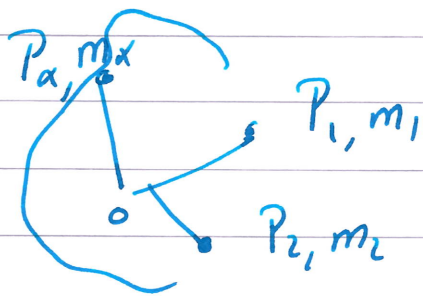


correspondance à l'aide
d'une matrice

$$\vec{L}_0 = \underline{I}_0 \vec{\omega}$$

$$\underline{I} \in \mathbb{R}^{3 \times 3}$$

3D ensemble de points matériels, rigides



$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= \sum \vec{OP}_\alpha \wedge m_\alpha \vec{v}_\alpha \\ &= \sum_\alpha \vec{OP}_\alpha \wedge m_\alpha (\vec{\omega} \wedge \vec{OP}_\alpha)\end{aligned}$$

$$(\vec{OP}_\alpha^T \cdot \vec{\omega}) \vec{OP}_\alpha = \vec{OP}_\alpha (\vec{OP}_\alpha^T \cdot \vec{\omega})$$

$$\begin{aligned}\vec{L}_O &= - \sum_\alpha m_\alpha (\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{\omega}) \vec{OP}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \|\vec{OP}_\alpha\|^2 \vec{\omega} \\ &= \sum_\alpha \left(-m_\alpha \vec{OP}_\alpha \cdot \vec{OP}_\alpha^T + m_\alpha \|\vec{OP}_\alpha\|^2 \right) \vec{\omega}\end{aligned}$$

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha m_\alpha \left[- \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x^2+y^2+z^2 & 0 & 0 \\ 0 & x^2+y^2+z^2 & 0 \\ 0 & 0 & x^2+y^2+z^2 \end{pmatrix} \right] \vec{\omega}$$

$$(\vec{OP}_\alpha = x\hat{x} + y\hat{y} + z\hat{z})$$

$$I_O = \sum_\alpha m_\alpha \begin{bmatrix} y^2+z^2 & -xy & -xz \\ -xy & x^2+z^2 & -yz \\ -xz & -yz & x^2+y^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_O = I_O \cdot \vec{\omega}$$

corps continu

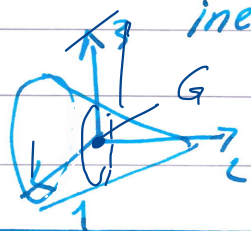
$$I_O = \begin{bmatrix} \iiint y^2+z^2 dm & -\iiint xy dm & -\iiint xz dm \\ \iiint -yx dm & \iiint x^2+z^2 dm & \iiint -yz dm \\ \iiint -zx dm & \iiint -zy dm & \iiint y^2+x^2 dm \end{bmatrix}$$

3D axes principaux d'inertie

(maths: vecteurs propres de I_0).

I_0 est diagonal avec des éléments positifs (valeurs propres)

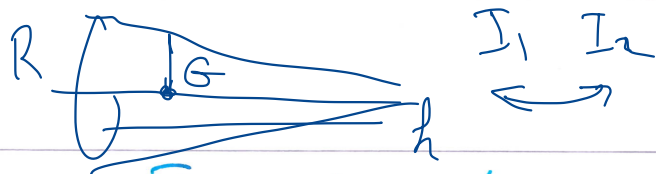
inerties selon un système d'axes $\perp$.



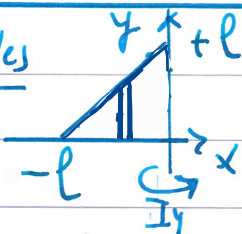
$$I_G = \begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{bmatrix}$$

pour le cône

$$I_1 = I_3 > I_2$$



3.5 Exemples de calcul



exemple triangle uniforme

$$\mu = \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^2} \right]$$

$$dm = \mu dx dy$$

$$\mu = \frac{m}{\frac{1}{2} l^2} = \frac{2m}{l^2}$$

$$I_y = \iint x^2 dm$$

$$I_y = \frac{2m}{l^2}$$

$$\int_{x=-l}^0 \int_{y=0}^{l+x} x^2 dx dy$$

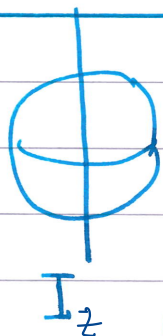
$$\frac{2m}{l^2} \int_{x=-l}^0 x^2 \left(\int_{y=0}^{l+x} dy \right) dx$$

$$= \frac{2m}{l^2} \int_{x=-l}^0 x^2 \left[y \right]_{y=0}^{l+x} dx$$

$$= \frac{2m}{l^2} \int_{x=-l}^0 x^2 (l+x) dx$$

$$\left[\frac{x^4}{4} + l \frac{x^3}{3} \right]_{-l}^0 = -\frac{l^4}{4} + \frac{l^4}{3} = \frac{l^4}{12}$$

$$I_y = \frac{2m}{l^2} \cdot \frac{l^4}{12} = \frac{1}{6} m l^2 \quad [\text{kg} \cdot \text{m}^2]$$



la sphère

boule pleine

$$\mu \iiint (x^2 + y^2) dx dy dz = I_z$$

$$\mu: \left[\frac{\text{kg}}{\text{m}^3} \right]$$

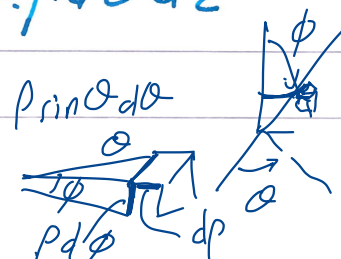
I_z

En coordonnées sphériques $dV = r^2 \sin \theta d\theta d\phi dr$

" " cylindriques $dV = \rho p \cdot \rho d\theta dz$

éléments de volume

$$dV = \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi d\rho$$



la sphère (suite)

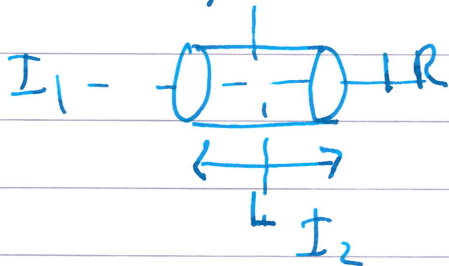
$$V = \frac{4}{3} \pi R^3$$

$$\mu = \frac{3m}{4\pi R^3} \quad [\text{kg/m}^3]$$

$$I = \frac{3m}{4\pi R^3} \int_{\rho=0}^R \int_{\phi=0}^{2\pi} \int_{\theta=0}^{\pi} \underbrace{\rho^2 \sin^2 \theta}_{x^2+y^2} \rho^2 \sin \theta d\theta d\phi d\rho$$

$$= \frac{2}{5} MR^2$$

autres exemples



cylindre

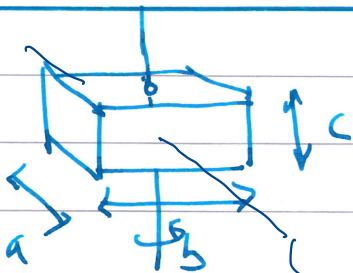
$$I_1 = \frac{1}{2} m R^2$$

$$I_2 = \frac{1}{4} m R^2 + \frac{1}{12} m L^2$$



tige mince

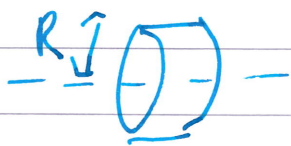
$$I = \frac{1}{12} m L^2$$



parallélépipède

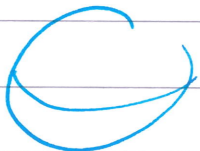
$$I = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2)$$

$$I = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2)$$



anneau

$$I = m R^2$$



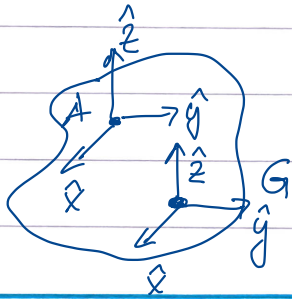
Sphère creuse

$$I = \frac{2}{3} m R^2$$

Boule pleine

$$I = \frac{2}{5} m R^2$$

3.4 Steiner



$$I_A = I_G + M$$

$$\vec{GA} = \delta_x \hat{x} + \delta_y \hat{y} + \delta_z \hat{z}$$

$$\begin{bmatrix} \delta_y^2 + \delta_z^2 & -\delta_x \delta_y & -\delta_x \delta_z \\ -\delta_y \delta_x & \delta_x^2 + \delta_z^2 & -\delta_y \delta_z \\ -\delta_x \delta_z & -\delta_z \delta_y & \delta_x^2 + \delta_y^2 \end{bmatrix}$$

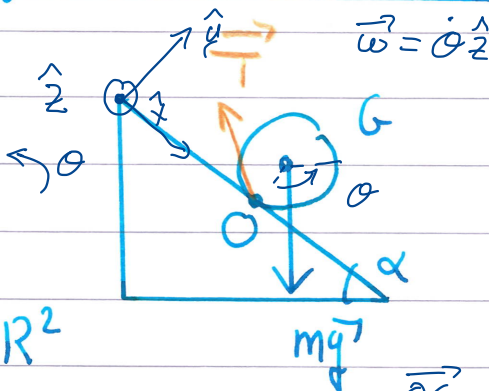
Exemple cylindre sur plan incliné:

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$\vec{L} = I_O \vec{\omega}$$

$$\vec{g} = -g \cos \alpha \hat{y} + g \sin \alpha \hat{x}$$

Steiner



O point à l'arrêt
car contrainte parfaite
de Roulement sans glissement

$$I_O = I_{cy} + mR^2$$

$$\vec{M}_O = \vec{OG} \wedge m\vec{g} = R\hat{y} \wedge m\vec{g} = -Rmg \sin \alpha \hat{z}$$

$$I_O = \frac{3}{2} mR^2$$

$$I_O \vec{\omega} = \vec{M}_O = -mgR \sin \alpha \hat{z}$$

$\vec{T}$: force de la liaison parfaite.

$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$$

(transfert du moment $\vec{M}_G = \vec{M}_O + \vec{GO} \wedge (m\vec{g} + \vec{T})$)

$$\vec{M}_G = \vec{GO} \wedge \vec{T} = I_G \vec{\omega} \hat{z} = T_x R \hat{z}$$

$$\vec{GO} = -R\hat{y} \quad \vec{T} = T_x \hat{x} + T_y \hat{y} \quad \vec{GO} \wedge \vec{T} = +T_x R \hat{z} = \vec{M}_G$$

translation du centre de masse

$$mg \sin \alpha + T_x = m \ddot{x}$$

contrainte de roulement
sans glissement
 $x = -R\theta$

$$\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O$$

$$-mg \sin \alpha R = I_O \ddot{\theta} = \underbrace{(I_{cy} + mR^2)}_{I_O} \ddot{\theta} \Rightarrow \ddot{\theta} = -\frac{mgR \sin \alpha}{I_{cy} + mR^2}$$

$$T_x R = I_G \ddot{\theta}$$

$$I_{cy} \ddot{\theta}$$

$$T_x = (-mR\ddot{\theta} - mg \sin \alpha)$$

$$(-mR\ddot{\theta} - mg \sin \alpha) R = I_{cy} \ddot{\theta}$$



$$\frac{d\vec{L}_G}{dt} = \vec{M}_G$$

$$\vec{L}_G = I_G \vec{\omega} \quad \frac{d\vec{L}_G}{dt} = I_G \ddot{\omega} \hat{z} = I_G \ddot{\theta} \hat{z} = I_{cy} \ddot{\theta} \hat{z}$$