

VII le corps solide

1. Formules du chapitre et explications

2. Cinématique du solide $\vec{\omega}$ unique

3. Inerties

3.1 plan 2D

3.2 3D :

3.3 Calcul des inerties

3.4 Steiner

3.5 Exemples

4. Transferts
point arbitraire

5. Energie cinétique

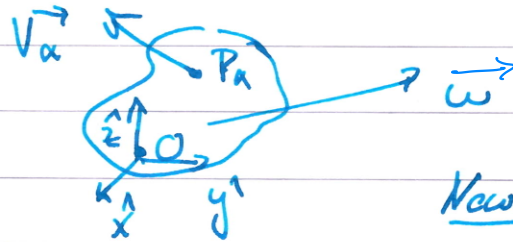
1. Formules du chapitre

1.1 Point fixe O du solide.

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \\ \vec{V}_\alpha &= \end{aligned}$$

$$(\vec{L}_O =$$

Solide
uniquement!



Newton!

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_{ext}$$

$$\vec{r}_{ext} =$$

1.2 Centre de masse G (centre de gravité)

formules "Newton" valables $\forall$ système

Rotation!

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}_{ext}$$

$$\vec{r} =$$

Centre de masse (translation)

$$M \frac{d\vec{V}_G}{dt} =$$

Solide:

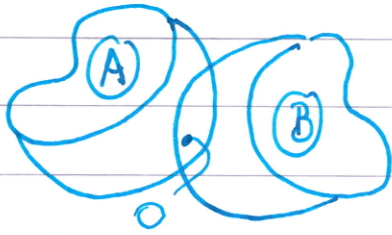
$$\begin{aligned} \text{moment in.} &= \\ \text{cinématique } \vec{V}_\alpha &= \end{aligned}$$

uniquement pour un
solide

Hypothèse O est un point commun à (A) et (B)

2. cinématique du solide

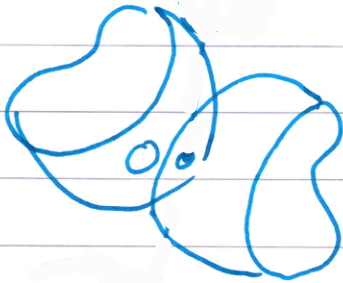
Soit un solide dans une configuration (A) , et
examinons le dans une configuration (B)



Existe-t-il une transformation
qui amène (A) vers (B) ?

Réponse: oui il suffit

O fixe



$\Rightarrow$ Passage à la limite pour avoir
une rotation instantanée

$$\boxed{=}$$

$\vec{\omega}$ identique pour

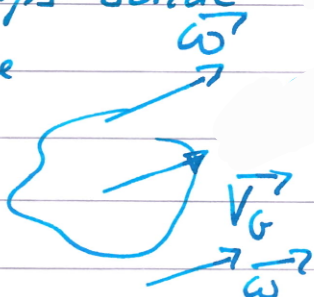
mouvement général du solide

Le solide translète & tourne

La translation permet d'obtenir un point fixe, puis
on applique le résultat ci-dessus,

mouvement infinitésimal général du solide

le corps solide
"hélice"



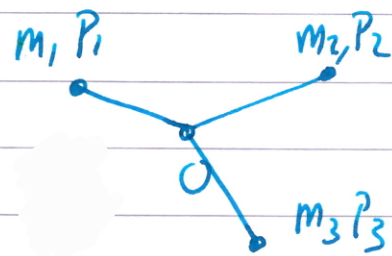
+

$$\boxed{\vec{V}_{Pa} = +}$$

3. Inertie de rotation. $\equiv$ moment d'inertie I

On va exprimer le moment cinétique en tenant compte de la particularité cinématique du solide, à savoir l'existence pour tous les

Solide



O : point fixe

La densité peut ou non être uniforme. Ici 3 points matériels rigidement reliés.

La rigidité conduit à l'existence d'un $\rightarrow$ unique

$$\vec{V}_\alpha = \omega$$

$\alpha = 1, 2, 3, \dots$

moment cinétique $\vec{L}_O = \sum_\alpha$

$$= \sum_\alpha$$

on utilise le produit triple (double) : $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) =$

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha$$

Dans le cas planaire, $\vec{OP}_\alpha \cdot \vec{v}_\alpha = 0$ car $=$
et $=$

$$\Rightarrow \vec{L}_O =$$

$$\vec{L}_O =$$

Definition

$$I_o =$$

$$I_o =$$

$$I_o =$$

$$I_o : [\quad]$$

μ : densité linéique

$$[\quad]$$

Si densité uniforme

$$I_o = \int \quad d\rho$$

$$\mu = \frac{m}{\ell}$$



$$= \int \quad d\rho$$

$$= \frac{m\ell^2}{12}$$

Pour un corps 2D planaire

$$I_o = \iint \quad dx dy$$

μ : masse surfacique $[\frac{kg}{m^2}]$

$$I_o = \iint \quad dm$$

$$dm = \mu dx dy$$

$$= \iint \quad dm$$

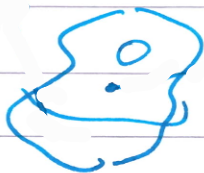
$[kg m^2]$

En 3D, on ne plus garantir

$$= 0.$$

$\Rightarrow$ conséquence

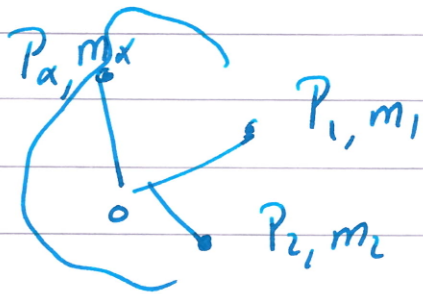
nécessaire plus aligné avec



correspondance à l'aide
d'une matrice

$$=$$

3D ensemble de points matériels, rigides



$$\vec{L}_O =$$

=

$$\vec{L}_O = - \sum_\alpha \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha + \sum_\alpha m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{\omega}$$

$$= \sum_\alpha \left(- \vec{r}_\alpha \times m_\alpha \vec{v}_\alpha + m_\alpha \vec{r}_\alpha \times \vec{\omega} \right)$$

$$\vec{L}_O = \sum_\alpha \left[- \left(\begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_{x\alpha} \\ v_{y\alpha} \\ v_{z\alpha} \end{pmatrix} \right) + \begin{pmatrix} x_\alpha \\ y_\alpha \\ z_\alpha \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} \right]$$

$$\vec{OP}_\alpha =$$

$$I_O = \sum_\alpha m_\alpha \begin{bmatrix} y_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -x_\alpha y_\alpha & -x_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha y_\alpha & x_\alpha^2 + z_\alpha^2 & -y_\alpha z_\alpha \\ -x_\alpha z_\alpha & -y_\alpha z_\alpha & x_\alpha^2 + y_\alpha^2 \end{bmatrix}$$

$$\vec{L}_O =$$

corps continu

$$I_O = \begin{bmatrix} \int (y^2 + z^2) dm & - \int x y dm & - \int x z dm \\ - \int x y dm & \int (x^2 + z^2) dm & - \int y z dm \\ - \int x z dm & - \int y z dm & \int (x^2 + y^2) dm \end{bmatrix}$$

3D axes principaux d'inertie
 (maths:)
 avec des éléments positifs (inerties)

I est diagonal



$$I_G = \begin{bmatrix} & & \\ & & \\ & & \end{bmatrix}$$

3.5 Exemples de calcul



exemple triangle uniforme

$$\mu = \begin{bmatrix} & \\ & \end{bmatrix}$$

$$\mu =$$

$$dm = \mu dx dy$$

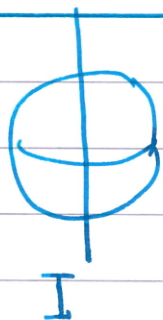
$$I_y =$$

$$I_y = \int \int$$

$$= \int \left| \right| \int$$

$$\left| \right| =$$

$$I_y =$$



la sphère

$$\mu \iiint () = I$$

En coordonnées sphériques $dV =$

" " cylindriques $dV =$

éléments de volume

la sphère (suite)

$$V =$$

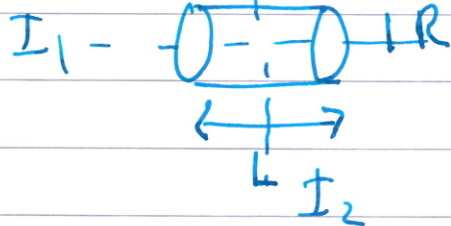
$$[\quad]$$

$$I =$$

$$\int \int \int$$

$$=$$

autres exemples



cylindre

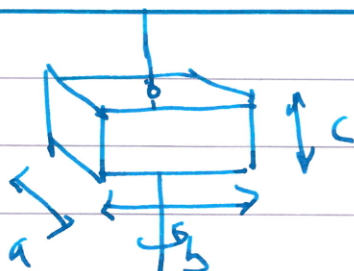
$$I_1 =$$

$$I_2 =$$



tige mince

$$I =$$



parallélépipède

$$I =$$



anneau

$$I =$$



Sphère creuse

$$I =$$

Boule pleine

$$I =$$

3.4 Steiner

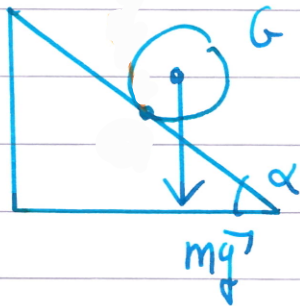
$$I_A = I_G + M$$

$$\vec{AG} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

Exemple cylindre sur plan incliné:

$$\frac{d}{dt} =$$

Steiner



O point à l'arrêt
car contrainte parfaite
de Roulement sans glissement

$$I =$$

$$\vec{M} = \lambda =$$

$$I_0 =$$

$$= \vec{M} =$$

$\vec{T}$: force de la liaison parfaite.

(transfert du moment $\vec{M} = \vec{T} + \vec{r} \wedge ()$)

$$\vec{M} = \lambda =$$

translation du centre de masse

$$=$$