

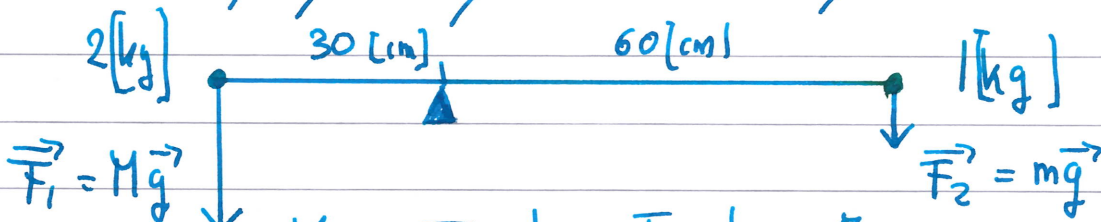
VI Rotations

1. Moment de force et mom. cinétique
2. Rotation plane
 - 2.1 matrice de rotation
 - 2.1.1 du point
 - 2.1.2 du repère
 - 2.2 rot. infinitésimale
 - + vit. instant. de rot.

3. matrice de rotation 3D
 - 3.1 axe quelconque
 - (3.2 rot. infinitésimale)
 - 3.3 formule de Poisson
4. Coordonnées cylindriques & sphériques

1. Moment de force

constat empirique: équilibre lors d'équivalence de leviers



$$M_1 = F_1 \cdot d_1 = F_2 \cdot d_2 = M_2$$

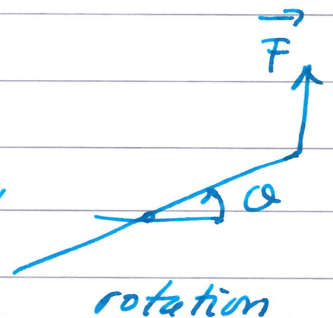
$$g = 10 \text{ [m/s}^2\text{]}$$

$$20 \cdot 0,3 = 10 \cdot 0,6$$

Autre interprétation: comment généraliser la force à un (angle) nouveau concept de telle sorte qu'au niveau de l'énergie on ait une équation du type

$$M \cdot d\theta = \delta W = \vec{F} \cdot d\vec{x}$$

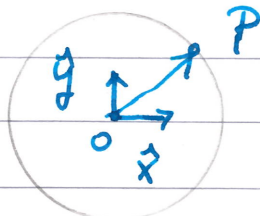
Nlle quantité à définir $\nearrow$ angle $\nearrow$ (Energie) Travail infinitésimal
infinitement petit



Étudions cette analogie au niveau d'une rotation plane d'un angle infinitésimal $d\theta$

Comme il s'agit d'une rotation, il y a une contrainte circulaire

$$\begin{aligned} \vec{OP} &= r \hat{r} \\ &= x \hat{x} + y \hat{y} \end{aligned}$$



$$x^2 + y^2 = r^2 = \|\vec{OP}\|^2$$

$\uparrow$
contrainte

dérivons la contrainte $x \frac{dx}{dt} + y \frac{dy}{dt} = 0$
 $\Rightarrow x dx + y dy = 0$

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\vec{r} = F_x dx + F_y dy$$

car $\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$

$$d\vec{r} = dx \hat{x} + dy \hat{y}$$

introduisons la paramétrisation

$$x = r \cos \theta$$

$$y = r \sin \theta$$

qui vérifie la contrainte $x^2 + y^2 = r^2$

$$\begin{cases} dx = -r \sin \theta d\theta \\ dy = r \cos \theta d\theta \end{cases} \quad \leftarrow \text{i.e. } \begin{cases} \dot{x} = -r \sin \theta \dot{\theta} \\ \frac{dx}{dt} = -r \sin \theta \frac{d\theta}{dt} \end{cases}$$

mais $r \sin \theta = y$ et $r \cos \theta = x$

ainsi

$$dx = -y d\theta$$

$$dy = x d\theta$$

et donc $\delta W = F_x (-y d\theta) + F_y (x d\theta) = \underbrace{(x F_y - y F_x)}_M d\theta$

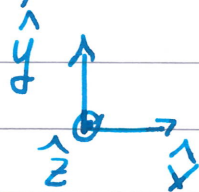
$$M \triangleq x F_y - y F_x$$

(on retrouve le bras de levier mais quelque peu généralisé)

Essayons de transformer cette formule en une formule plus vectorielle

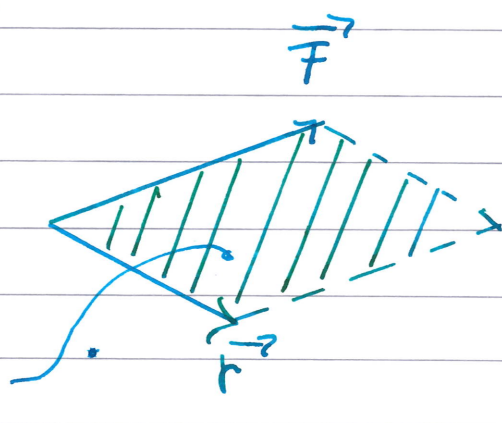
Si on pose $\vec{M} = M \hat{z}$

$\hat{z}$ sort de la feuille de papier
on a



$$\vec{M} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x F_y - y F_x \end{pmatrix} = (x F_y - y F_x) \hat{z}$$

Si on décompose et que l'on construit le parallélogramme



on constate que la surface est bien donnée par

$$A = x F_y - y F_x$$

$$\vec{r} = x \hat{x} + y \hat{y}$$

$$\vec{F} = F_x \hat{x} + F_y \hat{y}$$

A

Ainsi on est amené à poser

$$\vec{M} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\vec{M} = M \hat{z} = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

$$\begin{vmatrix} \hat{x} & \hat{y} & \hat{z} \\ x & y & 0 \\ F_x & F_y & 0 \end{vmatrix} = (xF_y - yF_x) \hat{z}$$



$\vec{M}$ dépend du point origine. Ainsi on note

$$\vec{M}_O = \vec{r} \wedge \vec{F}$$

Définition: Le moment de force d'un système de forces $\vec{F}_\alpha$ agissant sur des points P_α bien particuliers, moment de force par rapport à un point A donné, est:

$$\vec{M}_A = \sum_{\alpha} \vec{AP}_\alpha \wedge \vec{F}_\alpha$$

Généralisation de la loi de Newton

$$\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

$$\vec{R} = \frac{d\vec{P}}{dt}$$

$$\vec{M} = \frac{d?}{dt}$$

$$\vec{P} = \sum_{\alpha} m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}$$

Définition: Moment cinétique $\vec{L}_A$ par rapport à un point A.

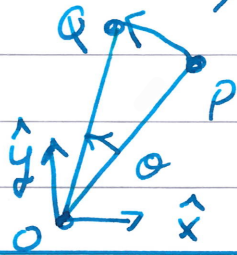
$$\vec{L}_A = \sum_{\alpha} \vec{AP}_\alpha \wedge m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}$$

Thm: $\vec{M}_O = \frac{d\vec{L}_O}{dt}$

$$\begin{aligned} \vec{L}_O &= \sum_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha} \\ \frac{d\vec{L}_O}{dt} &= \sum_{\alpha} \underbrace{\vec{V}_{\alpha} \wedge m_{\alpha} \vec{V}_{\alpha}}_0 + \sum_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge m_{\alpha} \dot{\vec{V}}_{\alpha} \\ &= \sum_{\alpha} \vec{OP}_\alpha \wedge \vec{F}_{\alpha} = \vec{M}_O \end{aligned}$$

2. matrice de rotation plane

2.1 le point tourne, le repère reste fixe



$\vec{OP}$ tourne de θ et le retrouve en $\vec{OQ}$

$$\vec{OP} = x\hat{x} + y\hat{y}$$

$$\vec{OQ} = x'\hat{x} + y'\hat{y}$$

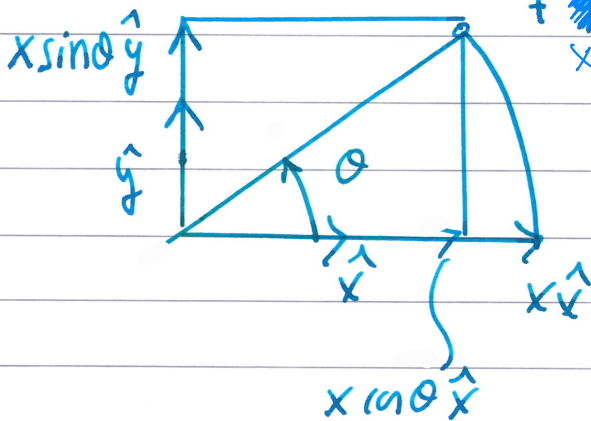
Existe-t-il une matrice 2×2 qui assure la correspondance

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}', \hat{y}')} = \begin{pmatrix} ? \\ ? \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}, \hat{y})} = R \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(0, \hat{x}, \hat{y})}$$

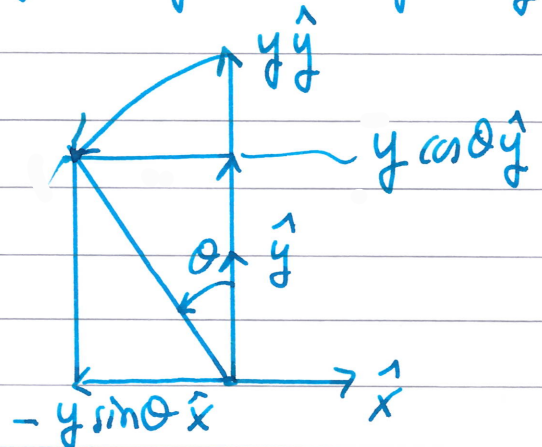
Tournons composante par composante

$$\vec{OQ} = R \vec{OP} = R x \hat{x} + R y \hat{y}$$

$$R x \hat{x} = x \cos \theta \hat{x} + x \sin \theta \hat{y}$$



$$R y \hat{y} = -y \sin \theta \hat{x} + y \cos \theta \hat{y}$$



Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} x \cos \theta \\ x \sin \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & \dots \\ \sin \theta & \dots \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix}$$

à cause du 0, les ... ne comptent pas !

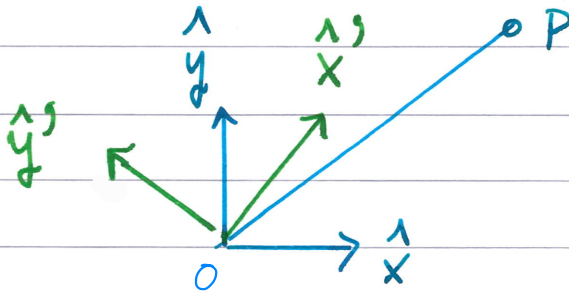
Ecriture matricielle

$$\begin{pmatrix} -y \sin \theta \\ y \cos \theta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dots & -\sin \theta \\ \dots & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ y \end{pmatrix}$$

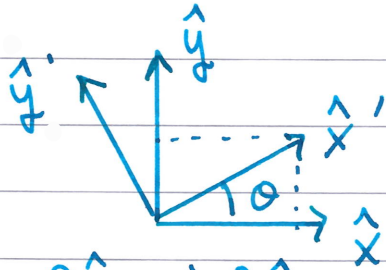
à cause du 0, les ... ne comptent pas.

2.2 le point reste fixe, le repère tourne

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= x\hat{x} + y\hat{y} \\ &= x'\hat{x}' + y'\hat{y}'\end{aligned}$$

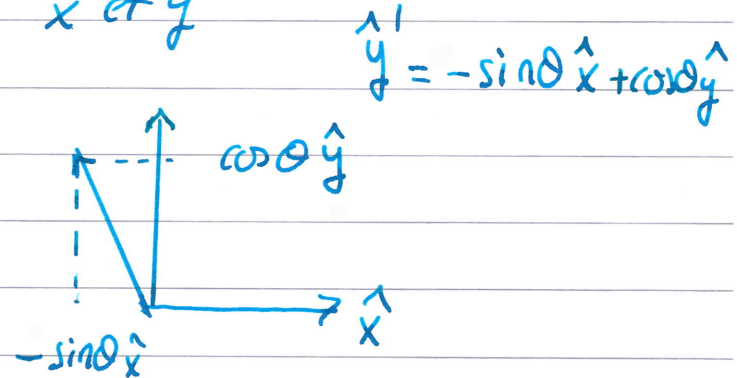


Exprimons $\hat{x}'$ en fonction de $\hat{x}$ et $\hat{y}$



$$\hat{x}' = \cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}$$

Exprimons $\hat{y}'$ en fonction de $\hat{x}$ et $\hat{y}$



$$\hat{y}' = -\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y}$$

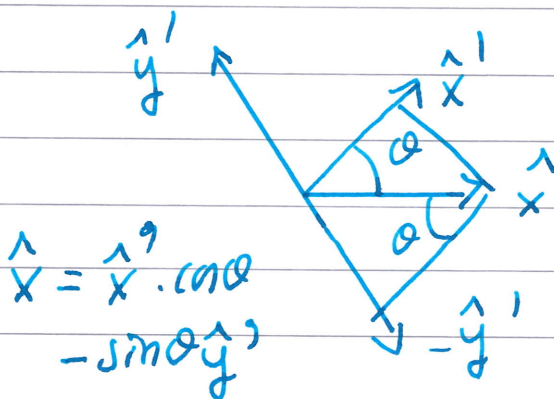
$$\begin{aligned}\text{ainsi } x'\hat{x}' + y'\hat{y}' &= x'(\cos\theta \hat{x} + \sin\theta \hat{y}) \\ &+ y'(-\sin\theta \hat{x} + \cos\theta \hat{y})\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(x'\cos\theta - y'\sin\theta)\hat{x} \\ + (x'\sin\theta + y'\cos\theta)\hat{y} &= x\hat{x} + y\hat{y}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

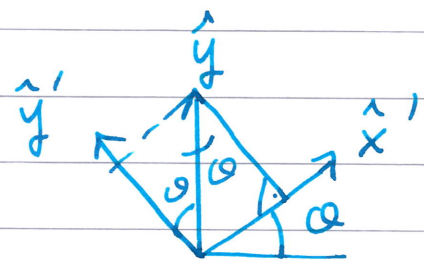
$$\begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

Exprimons $\hat{x}$ en fonction de $\hat{x}'$ et $\hat{y}'$



$$\hat{x} = \hat{x}'\cos\theta - \hat{y}'\sin\theta$$

$\hat{y}$ en fct de $\hat{x}'$ et $\hat{y}'$



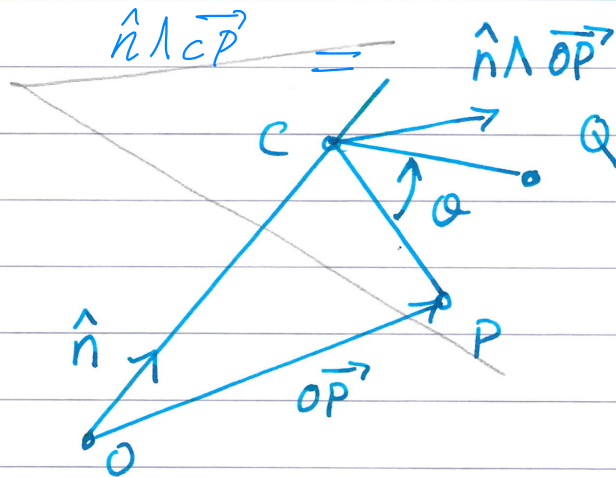
$$\hat{y} = \sin\theta \hat{x}' + \cos\theta \hat{y}'$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= x\hat{x} + y\hat{y} = x\cos\theta\hat{x}' - x\sin\theta\hat{y}' \\ &\quad + y\sin\theta\hat{x}' + y\cos\theta\hat{y}' \\ &= (x\cos\theta + y\sin\theta)\hat{x}' + (-x\sin\theta + y\cos\theta)\hat{y}' \\ \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}_{(O,\hat{x}',\hat{y}')} &= \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -\sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}_{(O,\hat{x},\hat{y})}\end{aligned}$$

3 Rotation 3D

angle θ

Déterminons la matrice 3×3 qui représente cette rotation.

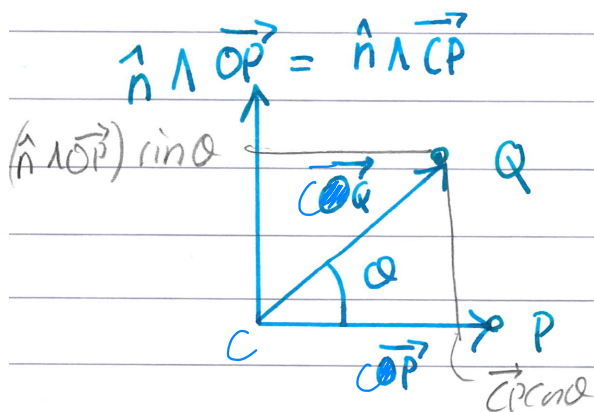


$\hat{n}$ vecteur générateur de l'axe de norme 1.

$$\|\hat{n}\| = 1.$$

Vu de dessus du plan

$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$



$$\begin{pmatrix} OQ_x \\ OQ_y \\ OQ_z \end{pmatrix} = R \begin{pmatrix} OP_x \\ OP_y \\ OP_z \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned}\vec{OP} &= OP_x \hat{x} + OP_y \hat{y} + OP_z \hat{z} = \sum_{i=1}^3 OP_i \hat{x}_i \\ \vec{OQ} &= OQ_x \hat{x} + OQ_y \hat{y} + OQ_z \hat{z} = \sum_{i=1}^3 OQ_i \hat{x}_i\end{aligned}$$

$$\vec{CP} = \vec{OP} - \vec{OC}$$

$$\vec{OC} = (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n}$$

scalaire

$$\begin{aligned}\vec{CP} &= \vec{OP} - (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} = \vec{OP} - \hat{n} (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \\ &= (\mathbf{I} - \hat{n} \hat{n}^T) \vec{OP}\end{aligned}$$

Remarque
 $\hat{n} \cdot \vec{OP} = \hat{n}^T \vec{OP}$
en notation matricielle

$$\vec{OQ} = \vec{OC} + \vec{CP} \cos\theta + (\hat{n} \wedge \vec{OP}) \sin\theta$$

$$\begin{pmatrix} n_1 \\ n_2 \\ n_3 \end{pmatrix} \begin{bmatrix} n_1 & n_2 & n_3 \end{bmatrix} = \hat{n} \cdot \hat{n}^T$$

$$\vec{OQ} = (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} + (\vec{OP} - (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n}) \cos\theta + \sin\theta (\hat{n} \wedge \vec{OP})$$

Écriture matricielle

$$\hat{n} \wedge \vec{OP} = \begin{pmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OP_1 \\ OP_2 \\ OP_3 \end{pmatrix}$$

$$[\hat{n} \wedge] \vec{OP}$$

! nouveauté!

$$\begin{aligned} (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} &= \hat{n}^T (\hat{n} \cdot \vec{OP}) = \hat{n} \hat{n}^T \vec{OP} \\ &= \begin{pmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} OP_1 \\ OP_2 \\ OP_3 \end{pmatrix} \\ \vec{OP}' - (\hat{n} \cdot \vec{OP}) \hat{n} &= (\mathbf{I} - \hat{n} \hat{n}^T) \vec{OP} \end{aligned}$$

On arrive finalement à l'expression de la matrice de rotation d'axe $\hat{n}$ et d'angle ϑ :

3.1

$$R = \hat{n} \hat{n}^T + (\mathbf{I} - \hat{n} \hat{n}^T) \cos \vartheta + \begin{bmatrix} 0 & -n_3 & n_2 \\ n_3 & 0 & -n_1 \\ -n_2 & n_1 & 0 \end{bmatrix} \sin \vartheta$$

$$\hat{n} \hat{n}^T = \begin{bmatrix} n_1^2 & n_1 n_2 & n_1 n_3 \\ n_2 n_1 & n_2^2 & n_2 n_3 \\ n_3 n_1 & n_3 n_2 & n_3^2 \end{bmatrix}$$

3.2 $R(d\vartheta) = \mathbf{I} + [\hat{n} \wedge] d\vartheta$

3.3 Formule de Poisson

$$\dot{\vec{OP}} = \frac{\vec{OP}(t+dt) - \vec{OP}(t)}{dt} = (R - \mathbf{I}) \frac{\vec{OP}}{dt}$$

$$R(d\vartheta) = R(0) + \left. \frac{\partial R}{\partial \vartheta} \right| d\vartheta = \mathbf{I} + [\hat{n} \wedge] d\vartheta$$

$$\begin{aligned} \dot{\vec{OP}} &= (\mathbf{I} + [\hat{n} \wedge] d\vartheta - \mathbf{I}) \frac{\vec{OP}}{dt} = [\hat{n} \wedge] \frac{d\vartheta}{dt} \vec{OP} \\ &= \left[\frac{d\vartheta}{dt} \hat{n} \wedge \right] \vec{OP} \end{aligned}$$

$$\vec{\omega} \triangleq \frac{d\vartheta}{dt} \hat{n}$$

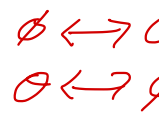
Formule de Poisson

$$\dot{\vec{OP}} = [\vec{\omega} \wedge] \vec{OP} = \vec{\omega} \wedge \vec{OP}$$

* ($\vec{OP}$ est un vecteur de longueur fixe qui tourne selon une rotation instantanée)

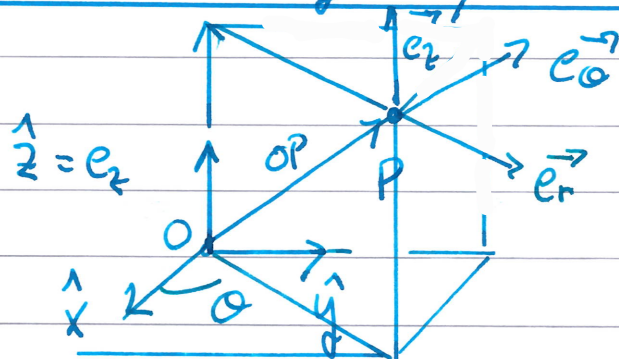
Livre :  Slides

ci-dessous : 

ainsi $\phi \leftrightarrow \theta$  ci-dessous

4 coordonnées cylindriques et sphériques

4.1 cylindriques
 r, θ, z

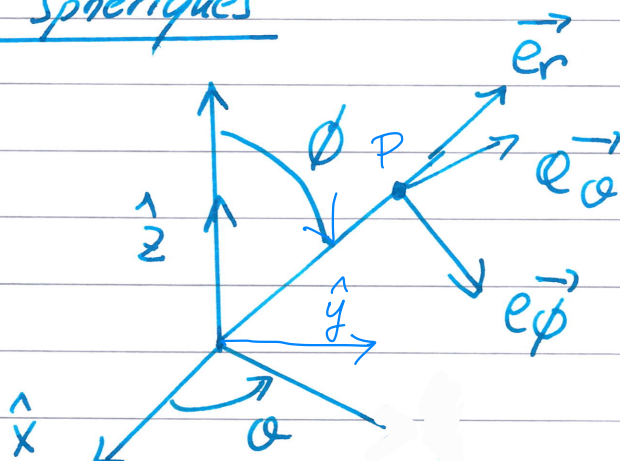


$$\hat{z} = \vec{e}_z$$

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z$$

4.2 sphériques



$$\begin{cases} x = r \sin \phi \cos \theta \\ y = r \sin \phi \sin \theta \\ z = r \cos \phi \end{cases}$$

Soit le repère cylindrique qui se déplace :
le repère effectue une rotation instantanée selon l'axe $\hat{z}$ et d'un angle $d\theta$.

$$\vec{\omega} = \dot{\theta} \vec{e}_z \quad \dot{\vec{e}}_z = 0$$

$$\dot{\vec{e}}_r = \vec{\omega} \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_z \wedge \vec{e}_r = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

par calcul

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\dot{\vec{e}}_\theta = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

$$\begin{vmatrix} \vec{e}_r & \vec{e}_\theta & \vec{e}_z \\ 0 & 0 & \dot{\theta} \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\dot{\theta} \vec{e}_r$$

Vitesse et accélération d'un point matériel à l'aide du repère cylindrique en déplacement

$$\vec{OP} = r \vec{e}_r + z \hat{z}$$

$$\dot{\vec{OP}} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\vec{e}}_r + \dot{z} \hat{z} \quad (\text{Leibniz})$$

$$= \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \hat{z} \quad (\text{Poisson})$$

⚠ les quantités au final s'expriment dans le repère galiléen -
(les vit et accélérations sont tjrs celles absolues)

$$\begin{aligned} \ddot{\vec{OP}} &= \ddot{z} \hat{z} + \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\vec{e}}_r + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \dot{\theta} \dot{\vec{e}}_\theta \\ &= \ddot{r} \vec{e}_r + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + r \ddot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{r} \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \underbrace{-r \dot{\theta}^2 \vec{e}_r}_{\text{Poisson}} + \ddot{z} \hat{z} \end{aligned} \quad (\text{Leibniz})$$

$$(r'' - r\dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + \dot{r}\dot{\theta} + r\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \hat{z}$$

$2r\dot{\theta}$

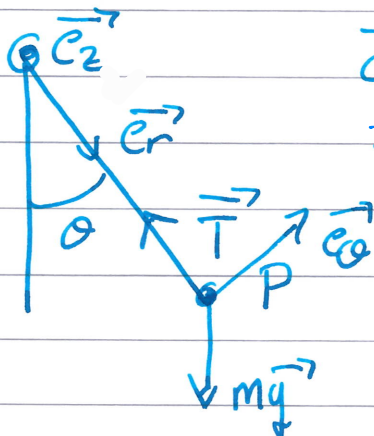
Accélération absolue du point matériel mais exprimée dans le repère cylindrique qui se déplace.

⇒ de manière analogue pour les coordonnées sphériques (exercices + slides)

⚠ à bien calculer $\vec{\omega}$ avant d'utiliser Poisson.



Exemple: coordonnées cylindriques: le pendule plan $z=0$



$$\vec{OP} = r \vec{e}_r$$

$$\dot{r} = 0$$

$$\vec{T} = -T \vec{e}_r$$

$$m\vec{g} = -mg \sin\theta \vec{e}_\theta + mg \cos\theta \vec{e}_r$$

Newton: $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

pendule plan (suite) $m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$

$$\vec{a} = -r\ddot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\underbrace{-mr\ddot{\theta}^2 \vec{e}_r + mr\ddot{\theta} \vec{e}_\theta}_{\text{}} = \underbrace{-mg \sin\theta \vec{e}_\theta + mg \cos\theta \vec{e}_r - T \vec{e}_r}_{\text{}}$$

$$\vec{e}_r] : T = mg \cos\theta + mr\ddot{\theta}^2$$

$$\vec{e}_\theta] : m\ddot{\theta} = -\frac{mg}{r} \sin\theta \quad \ddot{\theta} = -\frac{g}{r} \sin\theta$$

En utilisant $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$, on a exprimé les accélérations (absolues) ^(calculées) dans le repère embarqué, selon les directions $\vec{e}_\theta$ et $\vec{e}_r$ ^{p.r. aux référentiels}, ou plutôt, décomposées dans ce repère.

⚠ Ce n'est pas l'accélération mesurée dans ce repère*!

C'est la raison pour laquelle on a pu appliquer les

lois de Newton. Le référentiel est resté celui (immobile) Galiléen. Le repère cylindrique n'est utilisé pour définir un nouveau référentiel.

* pour être précis, accélération mesurée dans le référentiel dans lequel le repère est lié.